한국경영과학회지
제35권 제1호
2010년 3월

복수제품의 선별검사 및 서비스시스템의 설계*

김 성 철**

A Joint Design of Rectifying Inspection Plans and Service Capacities for Multi-Products

Sung-Chul Kim**

■ Abstract ■

In this paper, we study a joint design problem of sampling inspections and service capacities for multi-products. Products are supplied in batches after rectifying inspections, that is, rejected lots are 100% inspected and defective products are reworked to good ones. When supplied, all defective products are uncovered through total inspection and returned to service. By exploiting the first and second order properties of the objective function, we identify the optimal inspection policies and service capacities for individual products, and develop allocation algorithms to obtain an optimal allocation of the limited total service capacity to products with the small number of computations.

Keyword : Rectifying Inspection, Joint Design Problem, Sampling Inspection, Service Capacity, Linear Piecewise Convex, Marginal Allocation Algorithm

1. 서 론

본 논문은 선별검사가 실시되는 경우에 복수제품의 통합적 품질시스템을 설계하는 문제를 다룬다. 통합적 품질시스템을 설계한다는 것은 품질수준이 서로 다른 복수의 제품들에 대하여 품질확보와 관련되는 평가비용(appraisal cost), 내적실패비용(internal failure cost), 고객에 인도된 후 발생하는 제품실패에 따른 서비스능력 확보비용, 그리고 외적실패비용(external failure cost)의 상호작용을 모두 고

논문접수일 : 2009년 09월 11일 논문게재확정일 : 2010년 02월 10일
논문수정일(1차 : 2009년 12월 23일)
* 본 연구는 덕성여자대학교 2009년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.
** 덕성여자대학교 경영학과

려하여 품질검사 및 서비스시스템을 통합적으로 고려하는 복수제품에 대한 최적의 품질시스템을 설계하는 것을 말한다.

각 제품은 로트(lot)로 공급되고 각각의 로트에 대하여 표본검사(sampling inspection)나 전수검사(total inspection) 등 적절한 품질검사가 실시되며 표본검사에 의하여 로트가 불합격되는 경우에는 전수검사를 실시하여 불량품(defects)을 모두 선별하고 재작업(rework)을 통하여 양품으로 교체하는 선별검사(rectifying inspection)가 실시된다. 그러므로 선별검사를 실시하는 경우에는 로트가 합격된 경우에는 표본 내의 불량품만 양품으로 교체되고 표본 외의 불량품은 그대로 공급되나 로트가 불합격되는 경우에는 주어진 로트에는 불량품이 하나도 없이 공급된다. 그러므로 선별검사는 검사 후 로트의 평균출검품질(average outgoing quality)을 크게 향상시켜 제품이 고객에 공급된 후 발생할 수 있는 제품실패로 인한 클레임, 제품회수, 애프터 서비스, 그리고 제품책임 등과 이에 기인한 외적실패비용을 현저히 줄일 수 있는 표본검사방법이다.

공급된 제품의 외적제품실패를 최소화하기 위하여 로트에 포함된 모든 불량품을 확인하고 양품으로 교체한 후 공급하는 전수검사가 실시될 수 있으나 이러한 전수검사는 기업의 한정된 능력을 과도하게 평가활동과 교정활동에 투입할 뿐만 아니라 시간과 비용이 높아 실패비용이 매우 큰 경우를 제외하고는 적절한 방법이 아니라고 할 수 있다. 이에 반하여 적절한 품질검사를 시행하지 않는 경우에는 제품이 고객에 인도된 후 구매자가 수행하는 다양한 품질검사에 의하여 로트에 포함된 불량품은 판별되고 거부되거나 반송되어 과도한 외적실패비용을 야기할 뿐만 아니라 기업에 대한 고객의 신뢰성을 상실시킴으로써 기업의 생존에도 영향을 줄 수 있다. 그러므로 외적실패비용에 비하여 평가비용이 상대적으로 상당히 크거나 과거의 경험 등에 의하여 불량품이 매우 적어 제품의 품질이 적절한 수준으로 보장되는 경우에만 품질검사를 줄일 수 있다. 최적의 품질확보를 의해 적절한 평가활동을 수행하는 것은 매우 중요한 일이다.

품질확보를 위한 품질검사와 더불어 적절한 서비스능력을 갖는 서비스시스템을 구비하는 것도 매우 중요하다. 공급된 제품은 전수검사 등 다양한 방법으로 품질이 확인되며 적합한 품질기능을 수행하지 못하는 불량품은 반송되어 제품실패에 대한 절차를 갖는다. 로트에 포함된 모든 불량품은 공급된 후 거부되거나 반송되어 제품실패에 따른 서비스가 수행되거나 적절한 보상이 요구되게 된다. 그러므로 이러한 제품실패에 대응하기 위하여 적절한 서비스시스템을 확보하는 것은 시장에서 제품의 품질과 관련된 불확실성에 대응하는 수단으로 매우 중요하며 나아가 제품의 차별화를 통하여 기업이 시장에서 경쟁우위를 확보할 수 있는 중요한 수단이 되고 있다.

그러나 과도한 서비스 능력을 확보하는 경우에는 서비스능력을 확보하는데 과도한 비용이 지출되며 외적제품실패보다 적은 능력의 서비스시스템을 확보하는 경우에는 시간외 근무나 외주 등에 의한 서비스절차를 갖게 되어 제품단위당 더 많은 외적실패비용이 요구된다. 뿐만 아니라 서비스 능력은 고객의 신뢰를 현저히 저하시키는 불량품의 수로 해석되어 제품실패가 이를 초과하는 경우에는 고객의 신뢰성이 상실되고 나아가 고객까지 상실할 수 있는 심각한 결과를 초래할 수 있다. 그러므로 적절한 서비스능력을 갖는 서비스시스템을 확보하는 것은 매우 중요한 의사결정문제가 된다.

표본검사에 의하여 로트로 공급되는 단일제품의 합격이나 불합격을 판정하는 방법은 Derman and Ross[4], Duncan[6], Grant and Leavenworth[9], Juran and Gryna[10], Wald[16] 등에서 다양하게 제시되고 있다. Juran and Gryna[10]는 표본검사, 무검사, 그리고 전수검사에 대하여 검사비용과 실패비용을 도입하여 최적화를 시도하였다. 품질검사의 설계와 더불어 서비스시스템의 설계도 중요하다. 시장에서 제품차별화를 위한 전략적 수단으로 제품품질의 불확실성에 대비하여 적절한 서비스시스템을 확보하는 것이 매우 중요함은 언급된 바와 같다. Crosby[3]는 제품의 품질, 실패비용, 그리고 신뢰성

과의 관계에 대하여 Shimp and Bearden[13]은 품질보증 등 서비스시스템과 기업의 차별화의 관계를 제시하였다. 이의 연장선상에서 품질보증과 비용 등 품질보증에 관한 연구도 Dimitrov, et al.[5], Yeh and Chen[20], Yeh, et al.[19] 등에서 다양하게 제시되고 있다. 선별검사와 관련된 연구로는 Bebbington and Govindaraju[1]은 선별검사와 유사하지만 좀 더 복잡한 절차를 갖는 표본검사법을 제시하였으며 Wu, et al.[18]은 선별검사에 있어서 최초로 불량률이 확률분포인 경우를 다루었으며 평균출검품질을 제약식으로 하고 평균 총검사수(average total inspection)를 최소화하거나 평균 총검사수를 제약식으로 하고 평균출검품질을 최소화하는 모형을 시뮬레이션을 이용하여 최적화하였다. Kleijen, et al.[11]은 선별검사를 재무감사에 적용하는 응용모형을 제시하였다. 본 논문과 같이 품질검사와 서비스시스템을 동시에 고려하여 최적화절차를 추구하는 모형은 Chen, et al.[2], Ritchken, et al.[12], 그리고 Tapiero and Lee[14] 등에서 볼 수 있다. Chen, et al.[2]은 로트로 공급되는 단일제품의 불량률이 확률적 분포를 가질 때 품질검사비용과 품질보증비용을 고려하는 순차적 품질검사절차를 제시하였다. Tapiero and Lee[14]는 선별검사를 적용하는 경우에 품질검사와 서비스능력을 공동으로 설계하는 최적화문제를 다루었다.

본 논문의 특징은 다음과 같다. 첫째, 기존의 품질시스템의 설계를 다루는 논문이 품질검사를 설계함에 있어서 경영자가 일정하게 제한하여 결정하여야 할 생산자의 위험부담, 즉 로트의 합격확률을 고려하지 않음에 비하여 본 논문은 로트의 합격확률을 일정한 값으로 적용하여 품질검사를 설계함에 있어서 필수적으로 고려되어야 할 생산자의 위험부담을 모형에 포함하였다. 둘째, 단일제품에 대한 품질시스템을 설계하는 기존의 논문에 대하여 본 논문은 통합적 품질시스템의 설계를 복수의 제품으로 연장 적용하였다. 셋째, 품질시스템의 설계에 관련되는 여러 요소를 도입하였음에도 불구하고 전반적인 모형의 이해가 쉽고 해의 유도과정이 간편하다. 마지막으로 선별검사를 통하여 평균출검품질을 높이고 제품이 고객에 인도된 후에도 전수검사를 시행 제품품질이 보증되어 고객만족을 전제로 하는 세분화된 제품시장에 대하여 적용이 가능하다.

제 2장에서는 복수제품의 최적 표본수와 최적 서비스능력을 동시에 고려하는 최적 품질시스템을 설계하는 최적화문제를 설명하고 이를 모형화한다. 제 3장에서는 각 제품의 불량률이 확정적인 특수한 경우를 모형화하고 비용함수의 이계특성을 활용한 복수제품 최적화알고리즘을 제시한다. 제 4장에서는 각 제품의 불량률이 확률적인 경우에 있어서 복수제품 최적화알고리즘을 제시한다. 제 5장에서는 도입된 최적화알고리즘을 적용한 수치 예가 제시되고 주어진 품질시스템의 특성이 논의된다. 제6장은 결어로 마감한다.

2. 모형화

제품 j, $j=1,\cdots,K$,의 불량률(defect rate)을 π_j라고 하고 제품의 불량률 $\pi_j \in [\pi_j^L,\ \pi_j^U]$, $0 \le \pi_j^L \le \pi_j^U \le 1$은 일양분포(uniform distribution)을 갖는다고 가정한다. 확률변수 π_j의 확률밀도함수(probability density function)를 $f(\pi_j)$로 이의 기대치(expected value)를 $\mu_j = E(\pi_j)$로 정의한다. 제품j는 크기 Q_j인 로트로 공급되며 이의 품질은 q_j, $0 \le q_j \le Q_j$,개의 표본을 추출하여 확인된다. 주어진 품질검사에서 불량으로 확인된 제품은 불량분석과 적절한 재작업절차에 의하여 적합한 품질의 양품으로 교정된다.

제품 j에 대하여 생산자 위험부담(producer's risk) α_j가 결정되고 이에 따라 합격확률 P_j^a가 정의된다. 모든 제품에 대하여 선별검사가 실시되어 로트가 불합격되는 경우에는 전수검사가 시행되고 불량품이 모두 양품으로 교체되며 로트가 합격되는 경우에는 표본 내의 불량품만 양품으로 교체되고 포본 외의 제품에 대하여는 추가적인 품질검사가 수행되지 않고 그대로 공급된다. 그러므로 로트가 합격되는 경우에는 확률 P_j^a를 가지고 추가적인 품질검사나 내

적실패비용이 발생하지 않으나 로트가 불합격되는 경우에는 확률 $1-P_j^a$를 가지고 추가적으로 Q_j-q_j개의 제품에 대한 품질검사가 수행되고 내적실패비용이 발생한다.

공급된 제품이 적절한 품질기능을 수행하지 못하는 불량품으로 확인되어 반송되는 외적제품실패는 서비스 능력이 m_j인 서비스시스템에서 제품실패에 대한 서비스를 제공받는다. 만약 외적 제품실패가 서비스 능력 m_j를 초과하는 경우에는 이를 초과하는 제품실패는 시간외 근무나 외주 등을 통하여 적합한 품질의 양품으로 교정되거나 또는 이에 상응하는 비용을 소비자에게 보상하게 된다.

그러므로 평가비용과 실패비용을 고려한 최적 품질시스템을 설계한다는 것은 모든 K종류의 제품과 관련되는 총 품질비용을 최소화하는 최적 표본 수 q_j*와 최적 서비스능력 m_j*를 동시에 결정함을 의미한다. 그러므로 품질검사를 위한 제품 단위당 평가비용을 ω_j^a, 내적 실패비용을 ω_j^r, 단위 서비스능력 확보비용을 ω_j^m, 서비스시스템을 활용한 외적실패비용을 ω_j^f, 그리고 서비스능력을 초과하는 외적실패비용을 ω_j^e라고 정의하고 $\omega_j^r<\omega_j^f<\omega_j^m+\omega_j^f\le\omega_j^e$가 성립함을 가정한다. 모든 K종류의 제품에 대하여 총 품질비용을 최소화하는 최적화문제(optimization problem)는 다음과 같이 정식화될 수 있다. 여기에서 $E\{C_j(m_j, q_j)\}$는 제품j의 서비스능력이 m_j이고 표본수가 q_j인 경우 제품j의 총 품질비용의 기대치를 의미한다.

$$
\begin{aligned}
Min.\ \sum_{j=1}^{K} E\{C_j(m_j, q_j)\}
&=\sum_{j=1}^{K}\{\omega_j^a q_j+\omega_j^r q_j E(\pi_j)+\omega_j^m m_j \\
&+\int_{\pi_j^L}^{\frac{m_j}{P_j^a(Q_j-q_j)}}\{\omega_j^a(Q_j-q_j)(1-P_j^a) \\
&+\omega_j^r(Q_j-q_j)(1-P_j^a)\pi_j \\
&+\omega_j^f(Q_j-q_j)P_j^a\pi_j\}f(\pi_j)d\pi_j \\
&+\int_{\frac{m_j}{P_j^a(Q_j-q_j)}}^{\pi_j^U}\{\omega_j^a(Q_j-q_j)(1-P_j^a) \\
&+\omega_j^r(Q_j-q_j)(1-P_j^a)\pi_j \\
&+\omega_j^f m_j+\omega_j^e[(Q_j-q_j)P_j^a\pi_j-m_j]\}f(\pi_j)d\pi_j.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s.t.\ & \sum_{j=1}^{K} m_j \le M, \\
& 0\le q_j\le Q_j,\ j=1,\cdots,K.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

제품j에 대하여 평가비용 ω_j^a는 표본에 포함되는 q_j개의 제품과 확률 $1-P_j^a$를 가지고 로트가 불합격되었을 때 추가적으로 검사되는 나머지 Q_j-q_j개의 제품에 소요되며 동일한 이유에서 내적실패비용 ω_j^r도 표본으로 추출된 제품 중에서 기대불량품의 수인 $q_jE(\pi_j)$개의 제품과 주어진 불량률 π_j에 대하여 로트가 불합격될 확률 $1-P_j^a$를 가지고 추가적으로 검사되는 제품으로부터 예상되는 $(Q_j-q_j)\pi_j$개의 불량품에 소요된다. 서비스능력 m_j를 확보하는 데는 비용 $\omega_j^m m_j$가 소요된다. 외적제품실패는 로트가 합격될 확률 P_j^a를 가지고 로트에서 표본으로 추출되지 않은 제품 Q_j-q_j에 대하여 확률 π_j로 발생되므로 이의 기대치는 $(Q_j-q_j)P_j^a\pi_j$가 되며 $(Q_j-q_j)P_j^a\pi_j\le m_j$이면 외적실패비용 ω_j^f만 발생하고 $(Q_j-q_j)P_j^a\pi_j>m_j$이면 서비스능력 m_j를 초과하는 외적제품실패의 기대치는 $(Q_j-q_j)P_j^a\pi_j-m_j$가 되어 외적실패비용 ω_j^e가 발생한다. 이에 따라 $m_j/P_j^a(Q_j-q_j)\le\pi_j^L$ 또는 $m_j/P_j^a(Q_j-q_j)>\pi_j^U$인 경우가 존재하며 식 (1.1)도 이에 상응하여 정식화되었다. 첫 번째 제약식은 모든 제품의 서비스 능력의 합은 주어진 총 서비스능력인 M을 초과하지 못함을 두 번째 제약식은 제품 j의 표본 수 q_j는 비음(non-negativity)제약을 만족시키고 로트크기 Q_j보다 클 수 없음을 의미한다.

3. $\pi_j^L=\pi_j^U$인 경우

먼저 특수한 경우로서 모든 제품에 대하여 불량률 π_j가 확정적(deterministic)인 경우의, 즉 $\pi_j^L=\pi_j^U$, $j=1,\cdots,K$,인 경우에 있어서 최적해를 구하는 절차를 제시함으로써 주어진 최적화문제에 대한 이

해를 돕기로 한다. 이 경우 식 (1.1)의 원 최적화문제는 다음과 같이 재정리될 수 있다.

$$
\begin{aligned}
Min.\ & \sum_{j=1}^{K} C_j(m_j, q_j) \\
&= \sum_{j=1}^{K} \{\omega_j^a q_j + \omega_j^r q_j \pi_j + \omega_j^m m_j \\
&\quad + \omega_j^a (Q_j - q_j)(1-P_j^a) + \omega_j^r (Q_j - q_j)(1-P_j^a)\pi_j \\
&\quad + \omega_j^f \min.[m_j, (Q_j - q_j)P_j^a \pi_j] \\
&\quad + \omega_j^e [(Q_j - q_j)P_j^a \pi_j - m_j]^+\} \\
s.t.\ & \sum_{j=1}^{K} m_j \le M, \\
& 0 \le q_j \le Q_j,\ j=1,\cdots,K. \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

주어진 최적화문제 식 (2.1)의 해법을 구하기 위해서 총 서비스능력에 대한 첫 번째 제약식을 고려하지 않고 각각의 제품을 독립적으로 보고 먼저 하나의 제품에 대한 최적화문제의 특성을 도출하기로 한다. 편의를 도모하기 위해서 제품을 구별하는 아래첨자(subscript) j를 생략하면 하나의 제품에 대한 목적함수는 다음과 같이 정리된다.

$$
\begin{aligned}
Min.\ & C(m, q) \\
&= \omega^a q + \omega^r q\pi + \omega^m m + \omega^a (Q-q)(1-P^a) \\
&\quad + \omega^r (Q-q)(1-P^a)\pi + \omega^f \min.[m, (Q-q)P^a\pi] \\
&\quad + \omega^e [(Q-q)P^a\pi - m]^+. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

불량확률 π가 확정적인 단일제품의 최적화문제의 경우에는 서비스 능력 m에 대한 제약이 존재하지 않고 $\omega_j^m + \omega_j^f \le \omega_j^e$이므로 최적화문제 식 (2.2)에서 최적 서비스능력 m^*는 외적실패비용 ω^e를 적용하지 않고 ω^f만을 적용하는 것이 최적임을 알 수 있다. 그러므로 $m=(Q-q)P^a\pi$라고 놓으면 비용함수 $C((Q-q)P^a\pi, q)$의 표본수 q에 대한 편도함수(partial derivative)로부터 최적 표본 수 q^*가 유도될 수 있으며 그 결과 만약 $\pi \le \omega^a/(\omega^m + \omega^f - \omega^r)$이면 $m^* = QP^a\pi$, $q^*=0$이며 $\pi > \omega^a/(\omega^m + \omega^f - \omega^r)$이면 $m^*=0$, $q^*=Q$임을 알 수 있다. 위의 결과는 제품 단위당 평가비용과 내적실패비용의 합이 서비스 능력 확보비용과 외적실패비용의 합보다 큰 경우에는, 즉 $\omega^a + \omega^r\pi \ge (\omega^m + \omega^f)\pi$인 경우에는 최적 서비스 능력 m^*는 제품실패의 수 $QP^a\pi$와 동일하게 설계하고 최적 표본 수 $q^*=0$이 되며 그렇지 않은 경우, 즉 $\omega^a + \omega^r \pi < (\omega^m + \omega^f)\pi$인 경우에는 공급하기 전에 로트에 포함된 모든 제품을 전수검사하여 모든 불량품을 제거하는 것이 비용함수 식 (2.2)를 최소화함을 의미한다.

또한 서비스 능력 m이 주어진 최적화문제 식 (2.2)에 있어서 외적실패의 제품수가 서비스능력 보다 큰 경우, 즉 $(Q-q)P^a\pi > m$인 경우에도 위의 결과가 적용됨을 알 수 있다. 불량률 π에 대하여 $\pi \le \omega^a/(\omega^e - \omega^r) \le \omega^a/(\omega^m + \omega^f - \omega^r)$가 성립하고 표본 수 q에 대한 식 (2.2)의 편도함수로 부터 비용함수 $C(m, q)$가 표본 수 q에 대하여 증가함수임을 알 수 있다. 즉, 서비스능력 m이 주어져 있다면 불량률 π에 대하여 만약 $\pi \le \omega^a/(\omega^e - \omega^r)$인 경우에는 최적 표본 수 $q^*=0$이며 외적제품실패는 서비스 능력 m을 초과하고 외적실패비용 ω^e가 발생함을 의미하며 $\omega^a/(\omega^e - \omega^r) < \pi \le \omega^a/(\omega^m + \omega^f - \omega^r)$인 경우에는 최적 표본수는 마찬가지로 $q^*=0$이나 서비스 능력 m을 초과하는 외적제품실패는 없으며 여분의 서비스 능력이 존재할 수 있음을 의미한다.

이제 단일제품에 대하여 유도된 지금까지의 결과를 이용하여 원래의 복수제품에 대한 최적화문제를 고려하기로 한다. 각각의 제품에 대하여 아래첨자 j를 복원하고 집합 $J=\{j|\pi_j \le \omega_j^a/(\omega_j^m + \omega_j^f - \omega_j^r)\}$, 그리고 이의 여집합 $J^c=\{j|\pi_j > \omega_j^a/(\omega_j^m + \omega_j^f - \omega_j^r)\}$라고 정의하면 이는 만약 $j \in J$이면 $m_j^* = Q_j P_j^a \pi_j$, $q_j^*=0$이며 $j \in J^c$이면 $m_j^*=0$, $q_j^*=Q$일 때 최적화문제 식 (2.1)의 목적함수인 비용함수 $\sum_{j=1}^{K} C_j(m_j, q_j)$가 최소가 됨을 의미한다. 이제 $\sum_{j \in J} m_j^* \le M$이면 주어진 결과는 최적화문제 식 (2.1)의 최적해가 된다. 그러나 만약 $\sum_{j \in J} m_j^* > M$이면 총 서비스 능력의 제약조건 M을 직접 고려하여 주어진 최적화문제의 최적해가 새로

이 유도되어야 한다.

주어진 최적화문제의 최적해를 구하기 위해서 먼저 서비스 능력 $m_j(\leq m_j^* = Q_j P_j^a \pi_j)$에 대한 최적 표본수를 $q_{m_j}^*$라고 정의하고 이에 따라 주어진 문제의 최적 서비스능력 m_j^*에 대한 최적 표본수를 $q_{m^*_j}^*$라고 정의하자. 이제 주어진 문제의 최적화알고리즘(algorithm)을 위하여 서비스 능력 $m_j(\leq m_j^* = Q_j P_j^a \pi_j)$에 대한 비용함수 $C_j(m_j, q_{m_j}^*)$의 일계모멘트(the first moment)와 이계모멘트(the second moment)의 특성에 대하여 살펴보기로 한다. 주어진 서비스 능력 m_j에 대하여 $\pi_j \leq \omega_j^a/(\omega_j^e - \omega_j^r)$인 경우에는 $q_{m_j}^* = 0$이며, $\omega_j^a/(\omega_j^e - \omega_j^r) < \pi_j \leq \omega_j^a/(\omega_j^m + \omega_j^f - \omega_j^r)$인 경우에는 $m_j = (Q_j - q_j)\pi_j P_j^a$로부터 $q_{m_j}^* = Q_j - m_j/\pi_j P_j^a$가 된다. 그러므로 $\pi_j \leq \omega_j^a/(\omega_j^e - \omega_j^r)$인 경우에는

$$\begin{aligned} &C_j((m+1)_j, q_{(m+1)_j}^*) - C_j(m_j, q_{m_j}^*) \\ &= C_j((m+1)_j, 0) - C_j(m_j, 0) \\ &= \omega_j^m + \omega_j^f - \omega_j^e \leq 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

이 되며 $\omega_j^a/(\omega_j^e - \omega_j^r) < \pi_j \leq \omega_j^a/(\omega_j^m + \omega_j^f - \omega_j^r)$인 경우에는

$$\begin{aligned} &C_j((m+1)_j, q_{(m+1)_j}^*) - C_j(m_j, q_{m_j}^*) \\ &= C_j((m+1)_j, Q_j - (m+1)_j/\pi_j P_j^a) \\ &\quad - C_j(m_j, Q_j - m_j/\pi_j P_j^a) \\ &= \omega_j^m + \omega_j^f - (\omega_j^a/\pi_j + \omega_j^r) \leq 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

이 된다. 그러므로 $j \in J$에 속하는 모든 제품 j대하여 이의 비용함수 $C_j(m_j, q_{m_j}^*)$는 서비스능력 m_j에 대하여 감소하는 선형(linear)의 함수임을 알 수 있다.

그러므로 주어진 최적화문제의 최적해를 구하는 최적화 절차는 Fox(1966)의 한계배분(marginal allocation)알고리즘을 변형하여 다음과 같이 요약하여 적용할 수 있다.

단계 1 : $j \in J$에 대하여 $(m_j^*, q_{m^*_j}^*) = (Q_j P_j^a \pi_j, 0)$, $j \in J^c$에 대하여는 $(m_j^*, q_{m^*,j}^*) = (0, Q)$으로 놓는다. 만약 $\sum_{j \in J} m_j^* \leq M$이면 산정된 해는 최적해이며 알고리즘을 종료한다. 만약 그렇지 못한 경우에는 단계 2로 간다.

단계 2 : $j \in J$인 제품 j에 대하여 $\pi_j \leq \omega_j^a/(\omega_j^e - \omega_j^r)$인 경우에는 $\omega_j^m + \omega_j^f - \omega_j^e$를 산정하고 $\omega_j^a/(\omega_j^e - \omega_j^r) < \pi_j \leq \omega_j^a/(\omega_j^m + \omega_j^f - \omega_j^r)$인 경우에는 $\omega_j^m + \omega_j^f - (\omega_j^a/\pi_j + \omega_j^r)$를 산정한다. 이 중 가장 적은 값을 갖는 제품부터 서비스 능력을 순차적으로 할당해 간다. 즉 만약 가장 적은 값이 $\omega_j^m + \omega_j^f - \omega_j^e$인 경우에는 서비스 능력 m_j에 최적 서비스 능력인 $Q_j P_j^a \pi_j$을 할당하고 가장 적은 값이 $\omega_j^m + \omega_j^f - (\omega_j^a/\pi_j + \omega_j^r)$인 경우에는 서비스능력 m_j에 최적 서비스 능력 $Q_j P_j^a \pi_j (j \in J)$를 할당한다. 순차적인 할당과정 중 특정제품$j$에 도달하여 최적 서비스 능력 $Q_j P_j^a \pi_j$보다 적은 잔여 서비스 능력으로 총 서비스 능력 M이 고갈되면 남은 잔여분을 제품 j에 모두 할당하고 알고리즘을 종료한다.

4. $\pi_j^L \neq \pi_j^U$인 경우

이제 확률적인 불량률 $\pi_j \in [\pi_j^L, \pi_j^U]$를 직접 적용한 원 최적화문제 식 (1.1)의 최적화절차를 보기로 하자. 이를 위하여 불량률 π_j가 확정적인 전 장에서와 마찬가지로 먼저 총 서비스 능력에 대한 제약식을 고려하지 않고 각각의 제품을 독립적으로 보고 하나의 제품에 최적화문제를 고려한다. 편의를 도모하기 위해서 제품을 구별하는 아래첨자 j를 생략하면 주어진 최적화문제의 목적함수는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} &Min.\ \ E\{C(m, q)\} \\ &= \omega^a q + \omega^r q\mu + \omega^m m + \int_{\pi^L}^{\frac{m}{P^a(Q-q)}} \{\omega^a (Q-q)(1-P^a) \\ &\quad + \omega^r (Q-q)(1-P^a)\pi + \omega^f (Q-q) P^a \pi\} f(\pi) d\pi \\ &\quad + \int_{\frac{m}{P^a(Q-q)}}^{\pi^U} \{\omega^a (Q-q)(1-P^a) \end{aligned}$$

$$+\omega^r(Q-q)(1-P^a)\pi+\omega^f m$$
$$+\omega^e[(Q-q)P^a\pi-m]\}f(\pi)d\pi. \qquad (4.1)$$

목적함수 식 (4.1)의 표본 수 q에 대한 편도함수로부터 $\mu \le \omega^a/(\omega^e-\omega^r)$인 경우에는

$$\frac{\partial}{\partial q}E\{C(m,q)\} = P^a\{[\omega^a-(\omega^e-\omega^r)\mu] + (\omega^e-\omega^f)\int_{\pi^L}^{\frac{m}{P^a(Q-q)}}\pi f(\pi)d\pi\} \ge 0, \qquad (4.2)$$

$\mu > \omega^a/(\omega^f-\omega^r)$의 경우에는

$$\frac{\partial}{\partial q}E\{C(m,q)\} = P^a\{[\omega^a-(\omega^f-\omega^r)\mu] - (\omega^e-\omega^f)\int_{\frac{m}{P^a(Q-q)}}^{\pi^U}\pi f(\pi)d\pi\} < 0. \qquad (4.3)$$

위의 결과로부터 $\mu \le \omega^a/(\omega^e-\omega^r)$인 경우에는 $m^* = QP^a\{\pi^U-\omega^m(\pi^U-\pi^L)/(\omega^e-\omega^f)\}$, $q^*=0$이며 $\mu>\omega^a/(\omega^f-\omega^r)$의 경우에는 $m^*=0$, $q^*=Q$임을 쉽게 유도할 수 있다. 이제 $\omega^a/(\omega^e-\omega^r)<\mu\le\omega^a/(\omega^f-\omega^r)$인 경우에는 $m^*=QP^a\{\pi^U-\omega^m(\pi^U-\pi^L)/(\omega^e-\omega^f)\}$, $q^*=0$과 $m^*=0$, $q^*=Q$의 두 가지 경우에 대하여 비용함수 $E\{C(m,q)\}$를 비교하여 결정한다. 이는 비용함수 $E\{C(m,q)\}$의 도함수 값이 불량률의 기대치 μ에 대하여 $\omega^a/(\omega^e-\omega^r)$의 값 근방에서는 양수이나 그 값이 점점 감소하여 $\pi_j^L=\pi_j^U$인 경우와 마찬가지로 $\omega_j^a/(\omega_j^m+\omega_j^f-\omega_j^r)$ 값을 지나는 근방에서 음수로 되고 $\omega^a/\omega^a/(\omega^f-\omega^r)$에서 더 작은 음수 값을 가지기 때문이다.

이제 단일 제품에 대하여 유도된 지금까지의 결과를 각각의 제품에 대하여 아래첨자 j를 복원하고 원문제인 복수제품에 대한 최적화문제에 연장하여 집합 $J=\{j|m_j^*>0, q_{m^*j}^*=0\}$, 그리고 이의 여집합 $J^c=\{j|m_j^*=0,\ q_{m^*j}^*=Q\}$를 정의하자. 여기에서 $m_j^*>0$이란 $m_j^*=Q_jP_j^a\{\pi_j^U-\omega_j^m(\pi_j^U-\pi_j^L)/(\omega_j^e-\omega_j^f)\}$, 즉 최적 서비스능력을 의미한다. 만약 $\sum_{j\in J}m_j^*\le M$이면 주어진 결과는 최적화문제 식 (4.1)의 최적해가 된다. 그러나 만약 $\sum_{j\in J}m_j^*>M$이면 총 서비스 능력의 제약조건 M을 직접 고려하여 주어진 최적화문제의 최적해가 새로이 유도되어야 한다.

주어진 최적화문제에 있어서 만약 비용함수 $E\{C_j(m_j, q_{mj}^*)\}$가 서비스 능력 m_j에 대하여 볼록성(convexity) 등과 같은 이계모멘트의 특성을 만족시킨다면 주어진 최적화문제는 한계배분알고리즘을 적용하여 매우 효율적으로 해결될 수 있다. 그러므로 주어진 복수제품 최적화문제의 최적해를 구하기 위하여 서비스능력 m_j에서의 비용함수 $E\{C_j(m_j, q_{mj}^*)\}$의 이계특성에 대하여 살펴보기로 한다. $\mu_j\le\omega_j^a/(\omega_j^e-\omega_j^r)$인 경우에 $q_{mj}^*=0$, 그리고 $\omega_j^a/(\omega_j^e-\omega_j^r)<\mu_j\le\omega_j^a/(\omega_j^m+\omega_j^f-\omega_j^r)$인 경우에는 q_{mj}^*는 다음과 같다.

$$q_{mj}^* = Q_j - m_j \left\{\frac{\omega_j^e-\omega_j^f}{(P_j^a)^2[(\omega_j^e(\pi_j^U)^2-\omega_j^f(\pi_j^L)^2) - 2\omega_j^a(\pi_j^U-\pi_j^L)-\omega_j^r((\pi_j^U)^2-(\pi_j^L)^2)]}\right\}^{1/2}. \qquad (4.4)$$

여기에서 만약 $q_{mj}^*<0$이면 이는 $q_{mj}^*=0$임을 의미한다. 이는 서비스 능력 m_j가 0에서부터 점점 증가하면 최적 표본 수 q_{mj}^*가 0이 아닌 경우에는 점점 감소하여 결국은 0에 도달하게 됨을 의미한다.

비용함수 $E\{C_j(m_j, q_{mj}^*)\}$의 이계특성의 하나로서 볼록성은 다음의 부등식에 의하여 성립된다.

$$\{E[C_j((m+2)_j, q_{(m+2)j}^*)] - E[C_j((m+1)_j, q_{(m+1)j}^*)]\} - \{E[C_j((m+1)_j, q_{(m+1)j}^*)] - E[C_j(m_j, q_{mj}^*)]\} \ge 0. \qquad (4.5)$$

부등식 (4.5)의 증명은 다음의 경우들이 고려된다.

$$\{E[C_j((m+2)_j, 0)]-E[C_j((m+1)_j, 0)]\} - \{E[C_j((m+1)_j, 0)]-E[C_j(m_j, 0)]\} \qquad (4.6)$$
$$= 0,\ ((m_j+2)/(P_j^aQ_j)\le\pi_j^L),$$
$$(\omega^e-\omega^f)\{[2(m_j+1)+1]/2P_j^aQ_j]-\pi_j^L\}/(\pi_j^U-\pi_j^L),$$

$$((m_j+1)/(P_j^a Q_j)=\pi_j^L),$$
$$(\omega_j^e-\omega_j^f)/\{Q_j P_j^a(\pi_j^U-\pi_j^L)\}\ge 0,\ (m_j/(P_j^a Q_j)\ge \pi_j^L)$$
$$\{E[C_j((m+2)_j,0)]-E[[C_j((m+1)_j,0)]\} \quad (4.7)$$
$$-\{E[[C_j((m+1)_j,0)]-E[C_j(m_j,q_{mj}{}^*)]\}$$
$$=(Q_j-m_j\sqrt{\varepsilon_j})(m_j+Q_j/\sqrt{\varepsilon_j})+2\sqrt{\varepsilon_j}\ \ge\ 0,$$
$$\{E[C_j((m+2)_j,0)]-E[C_j((m+1)_j,q_{(m+1)j}{}^*)]\} \quad (4.8)$$
$$-\{E[C_j((m+1)_j,q_{(m+1)j}{}^*)]$$
$$-E[C_j(m_j q_{mj}{}^*)]\}$$
$$=\{(\omega_j^e-\omega_j^f)[Q_j-(m_j+2)\sqrt{\varepsilon_j}]^2\}/$$
$$\{2Q_j P_j^a\varepsilon_j(\pi_j^U-\pi_j^L)\}\ \ge\ 0,$$
$$\{E[C_j((m+2)_j,q_{(m+2)j}{}^*)] \quad (4.9)$$
$$-E[C_j((m+1)_j,q_{(m+1)j}{}^*)]\}$$
$$-\{E[C_j((m+1)_j,q_{(m+1)j}{}^*)]$$
$$-E[C_j(m_j,q_{mj}{}^*)]\}=0.$$

여기에서 표본수가 0과 대비하여 별도로 $q_{mj}{}^*$로 표시된 것은 표본수의 값이 0이 아니고 0보다 큰 양수, 즉 $q_{mj}{}^*>0$임을 의미하며 적용된 ε_j는 다음과 같다.

$$\varepsilon_j=\frac{\omega_j^e-\omega_j^f}{(P_j^a)^2[(\omega_j^e(\pi_j^U)^2-\omega_j^f(\pi_j^L)^2)-2\omega_j^a(\pi_j^U-\pi_j^L)-\omega_j^r((\pi_j^U)^2-(\pi_j^L)^2)]}. \quad (4.10)$$

또한 식 (4.6)부터 식 (4.10)에 적용된 일계특성은 다음과 같다.

$$E\{C_j((m+1)_j,0)\}-E\{C_j(m_j,0)\} \quad (4.11)$$
$$=\ \omega_j^m+\omega_j^f-\omega_j^e,\ ((m_j+1)/(P_j^a Q_j)\le\pi_j^L),$$
$$\omega_j^m-\{(\omega_j^e-\omega_j^f)[\pi_j^U-(2m_j+1)/2Q_jP_j^a]\}$$
$$/(\pi_j^U-\pi_j^L),\ (m_j/(P_j^aQ_j)\ge\pi_j^L),$$
$$E\{C_j((m+1)_j,0)\}-E\{C_j(m_j,q_{mj}{}^*)\} \quad (4.12)$$
$$=\ -\omega_j^aP_j^a(Q_j-m_j\sqrt{\varepsilon_j})$$
$$-\{(\omega_j^e-\omega_j^f)\pi_j^U\}/(\pi_j^L+\pi_j^U)$$
$$-\{\omega_j^rP_j^a(Q_j-m_j\sqrt{\varepsilon_j})(\pi_j^L+\pi_j^U)\}/2$$
$$+\{P_j^a(Q_j-m_j\sqrt{\varepsilon_j})[\omega_j^e(\pi_j^U)^2-\omega_j^f(\pi_j^L)^2]\}$$
$$/2(\pi_j^L+\pi_j^U)+\omega_j^m$$
$$+\{(\omega_j^e-\omega_j^f)[(m_j+1)^2/Q_j-m_j/\sqrt{\varepsilon_j}]$$
$$/[2P_j^a(\pi_j^U-\pi_j^L)]\},$$
$$E\{C_j((m+1)_j,q_{(m+1)j}{}^*)\}-E\{C_j(m_j,q_{mj}{}^*)\} \quad (4.13)$$
$$=\ -\omega_j^aP_j^a\sqrt{\varepsilon_j}-[\omega_j^rP_j^a\sqrt{\varepsilon_j}(\pi_j^L+\pi_j^U)]$$
$$/2-[(\omega_j^e-\omega_j^f)\pi_j^U]/(\pi_j^U-\pi_j^L)+\omega_j^m$$
$$+(\omega_j^e-\omega_j^f)/[2P_j^a\sqrt{\varepsilon_j}(\pi_j^U-\pi_j^L)]$$
$$+[P_j^a\sqrt{\varepsilon_j}(\omega_j^e(\pi_j^U)^2-\omega_j^f(\pi_j^L)^2)]$$
$$/[2(\pi_j^U-\pi_j^L)]\}.$$

그러므로 식 (4.5)가 성립되며 주어진 비용함수 $E\{C_j(m_j,q_{mj}{}^*)\}$는 서비스 능력 m_j에 대하여 선형의 조각난(piecewise linear) 볼록성을 만족시키며 만약 주어진 제품별 최적 품질시스템이 총 서비스 능력의 제약을 만족시키지 못하는 경우에는 다음에 제시되는 한계배분알고리즘을 적용하며 매우 용이하게 주어진 최적화문제를 해결할 수 있다.

단계 1 : $j\in J$에 대하여 $(m_j{}^*,0)$, $j\in J^c$에 대하여는 $(0,Q_j)$로 놓는다. 만약 $\sum_{j\in J}m_j{}^*\le M$이면 알고리즘을 종료한다. 만약 그렇지 않으면 단계 2로 간다.

단계 2 : $n=0$. 초기 서비스 능력벡터(vector) $M^0=(0,\cdots,0)$을 설정한다.

단계 3 : 서비스능력벡터 M^n에 대하여 $\forall j\in J$에 대하여 $\nabla_j(m_j,q_{mj}{}^*)=E\{C_j((m+1)_j,q_{(m+1)j}{}^*)\}-E\{C_j(m_j,q_{mj}{}^*)\}$를 산정하고 $\beta=\text{argmin}\{\nabla_j(m_j,q_{mj}{}^*)\}$를 구한다. $m_\beta^{n+1}=m_\beta^n+1$, $m_j^{n+1}=m_j^n\ (j\ne\beta)$으로 놓고 새로운 서비스 능력벡터 M^{n+1}을 얻는다.

단계 4 : 만약 $\sum_{j\in J}m_j=M$에 도달하면 알고리즘을 종료한다. 만약 그렇지 않으면 $n=n+1$로 놓고 단계 3으로 간다.

5. 수치 예

본 절에서는 지금까지 다루어진 내용들에 대한

수치 예를 제시하고자 한다. 이를 위하여 <표 1>에서 제시된 바와 같은 자료를 갖는 다섯 종류의 제품을 고려하기로 한다.

주어진 복수제품의 최적화 문제를 검토하기 이 전에 각 제품을 독립적인 제품으로 보고 주어진 독립적인 제품에 대하여 품질시스템의 최적화 및 이와 관련된 특성들에 대하여 살펴보고자 한다. 모든 제품과 경우에 대하여 합격확률 $P_j^a=0.9,\ \forall j$,가 적용되었다.

<표 2>는 제품 1, <표 3>은 제품 2에 있어서 주어진 불량률 π_j에 대한 최적 품질시스템이 제시되고 있다. 각 제품에 대하여 처음 세 결과는 $\mu_j=\pi_j^L=\pi_j^U$인 경우, 다음의 세 결과는 $\pi_j^L=\mu_j-0.2$, $\pi_j^U=\mu_j+0.2$인 경우에 대한 결과가 제시되어 있다.

주어진 결과는 불량률 π_j(또는 μ_j)$\le \omega^a/(\omega^f+\omega^m-\omega^r)$인 경우에는 최적 표본 수 $q^*=0$, 그렇지 않은 경우에는 $q^*=Q$인 제 3장과 제 4장의 결과를 수치 예로 제시하고 있다. 이 중 표본수가 0에 근접하나 0이 아닌 결과는 서비스 능력이 정수임에 의한 오차를 의미한다.

그러나 제품 3의 <표 4>와 제품 4의 <표 5>의 결과는 제 4장에 제시된 바와 같이 최적 품질시스템이 비율 $\omega^a/(\omega^f+\omega^m-\omega^r)$을 기준으로 확연히 구분되지 않음을 예로서 제시하고 있다.

먼저 제품 3에 있어서 $\pi_3^L=\pi_3^U$인 경우에는 $\pi_3=0.11<\omega_3^a/(\omega_3^f+\omega_3^m-\omega_3^r)=0.111$이므로 최적 표본 수 $q^*=9$, 즉 0이나 $\pi_3^L\neq\pi_3^U$인 경우에는 $\mu_3=0.11<\omega_3^a/(\omega_3^f+\omega_3^m-\omega_3^r)=0.111$임에도 불구하고 전수검사가 최적임을 알 수 있다. 제품 4의 경우에도 $\pi_4^L=\pi_4^U$인 경우에는 $\pi_4=0.09<\omega_4^a/(\omega_4^f+\omega_4^m-\omega_4^r)=0.91$로서 최적 표본 수 $q^*=3$, 즉 0을 만족시키고 있으나 $\pi_4^L\neq\pi_4^U$인 경우에는 $\mu_4=0.09<\omega_4^a/(\omega_4^f+\omega_4^m-\omega_4^r)=0.91$임에도 불구하고 전수검사가 최적임을 알 수 있다. 그러므로 불량률 π_j가 확률적인 경우에는 확정적인 경우와는 달리 최적 품질시스템과 관련하여 정확한 경

〈표 1〉 제품별 자료

	Q	ω^a	ω^r	ω^m	ω^f	ω^e	$\omega^a/(\omega^e-\omega^r)$	$\omega^a/(\omega^f+\omega^m-\omega^r)$
제품 1	100	1	6	2	10	14	0.125	0.167
제품 2	100	1	5	1	12	14	0.111	0.125
제품 3	150	1	8	2	15	20	0.083	0.111
제품 4	200	2	20	6	36	50	0.067	0.091
제품 5	250	1	10	3	18	25	0.067	0.091

〈표 2〉 제품 1에 대한 최적 품질시스템

(π_1^L, π_1^U)	(0.12, 0.12)	(0.16, 0.16)	(0.17, 0.17)	(0.10, 0.14)	(0.14, 0.18)	(0.15, 0.19)
서비스 능력	11	14	0	11	14	0
표본 수	0	3	100	0	2	100
총 품질비용	147.2	192.572	202	148.622	194.243	202

〈표 3〉 제품 2에 대한 최적 품질시스템

(π_2^L, π_2^U)	(0.09, 0.09)	(0.12, 0.12)	(0.13, 0.13)	(0.07, 0.11)	(0.10, 0.14)	(0.11, 0.15)
서비스 능력	8	11	0	8	11	0
표본 수	0	0	100	0	0	100
총 품질비용	119.9	156.6	165	120.703	157.311	165

〈표 4〉 제품 3의 최적 품질시스템

(π_3^L, π_3^U)	(0.08, 0.08)	(0.11, 0.11)	(0.12, 0.12)	(0.06, 0.1)	(0.09, 0.13)	(0.1, 0.14)
서비스 능력	11	14	0	11	0	0
표본 수	0	9	150	0	150	150
총 품질비용	208.6	280.813	294	211.494	282	294

〈표 5〉 제품 4의 최적 품질시스템

(π_2^L, π_2^U)	(0.06, 0.06)	(0.09, 0.09)	(0.1, 0.1)	(0.04, 0.08)	(0.07, 0.11)	(0.08, 0.12)
서비스 능력	11	16	0	11	0	0
표본 수	0	3	200	0	200	200
총 품질비용	518.8	756.712	800	530.039	760	800

〈표 6〉 제품 5의 최적 품질시스템

(π_5^L, π_5^U)	(0.07, 0.07)	(0.06, 0.08)	(0.05, 0.09)	(0.04, 0.10)	(0.03, 0.11)
서비스 능력	16	16	16	17	17
표본 수	0	0	0	0	0
총 품질비용	374	377.111	381.024	384.84	388.679

〈표 7〉 각 제품별 최적 품질시스템

	제품 1	제품 2	제품 3	제품 4	제품 5
불량률	0.12	0.09	0.12	0.1	0.07
서비스 능력	11	8	0	0	16
표본 수	0	0	150	200	0
총 품질비용	147.2	119.9	294	800	374

계를 설정할 수 없음을 알 수 있으며 더불어서 식 (4.3) 다음에 제시되는 범위 $\omega^a/(\omega^e-\omega^r)<\mu\leq\omega^a/(\omega^f-\omega^r)$은 $\omega^a/(\omega^e-\omega^r)<\mu\leq\omega^a/(\omega^f+\omega^m-\omega^r)$로 좀 더 제한적으로 설정될 수 있음을 제시하고 있다.

다음으로 고려하는 문제는 불량률 π_j의 분산과 총 품질비용과의 관계이다. 즉 불량률 π_j의 분산이 증가할수록 요구되는 서비스 능력이 증가하며 결과적으로 총 품질비용이 증가함을 알 수 있으며 제품 5를 적용한 <표 7>의 결과가 이를 수치적으로 제시하고 있다.

이제 원문제인 복수제품의 최적화문제로 돌아가기로 한다. 지금까지 다루어진 다섯 종류의 제품에 대한 최적화문제를 다룬다. 먼저 $\pi_j^L=\pi_j^U=\pi_j$, $\forall j$,인 확정적인 경우 복수제품 최적 품질시스템을 설계하기로 한다. 불량률은 $\pi_1=0.12$, $\pi_2=0.09$, $\pi_3=0.12$, $\pi_4=0.1$, $\pi_5=0.07$을 적용한다. 각 제품별로 주어진 불량률에서 제품별 최적 품질시스템을 재정리하면 <표 7>과 같다.

만약 주어진 총 서비스 능력 $M\geq 35$이면 각각 독립적인 제품별 최적 품질시스템인 $m_1^*=11$, $q_1^*=0$, $m_2^*=8$, $q_2^*=0$, $m_3^*=0$, $q_3^*=150$, $m_4^*=0$, $q_4^*=200$, $m_5^*=16$, $q_5^*=0$이 마찬가지로 최적 품질시스템이 되며 총비용은 1735.1이 된다. 그러나 만약 총 서비스 능력 $M<35$인 경우에는 복수제품에 대한 최적화절차가 수행되어야 한다. 이제 총 서비스 능력 $M=30$이라고 하자. 총 서비스 능력에 제약이 존재하는 경우

에는 먼저 초기해로 $m_j=0,\ \forall j$,로 놓는다. 이제 $\pi_1 = 0.12 < \omega_1^a/(\omega_1^e-\omega_1^r) = 0.125$, $\pi_2 = 0.09 < \omega_2^a/(\omega_2^e-\omega_2^r) = 0.1$, 그리고 $\omega_5^a/(\omega_5^e - \omega_5^r) = 0.067 < \pi_5 = 0.07 < \omega_5^a/(\omega_5^f + \omega_5^m - \omega_5^r) = 0.091$이므로 서비스 능력에 관계없이 $\omega_1^m + \omega_1^f - \omega_1^e = -2$, $\omega_2^m + \omega_2^f - \omega_2^e = -1$, 그리고 $\omega_5^m + \omega_5^f - (\omega_5^a/\pi_5 + \omega_5^r)$ = -3.286을 산정한다. 그러므로 제품 5의 -3.286이 적은 값이므로 제품 5에 최적 서비스 능력 16배분, 다음으로 제품 1의 -2가 적은 값이므로 제품 1에 서비스 능력 11배분, 그리고 제품 2에 잔여 서비스능력 3를 배분한다. 그러므로 최적 품질시스템은 $m_1^*=11$, $q_1^*=0$, $m_2^*=3$, $q_2^*=0$, $m_3^*=0$, $q_3^*=150$, $m_4^*=0$, $q_4^*=200$, $m_5^*=16$, $q_5^*=0$이 되며 주어진 총 서비스 능력의 조건 하에서 제품 2의 품질비용이 124.9로 증가하여 총 품질비용은 1740.1이 된다.

이제 불량률 π_j가 확률적인 경우로서 수치 예에서와 같이 $\pi_j^L=\mu_j-0.2$, $\pi_j^U=\mu_j+0.2$인 경우를 보기로 한다. 각 제품별로 주어진 불량률에서 제품별 최적 품질시스템을 재정리하면 <표 8>과 같으며 총 품질비용은 1,744.369가 된다.

배정된 최적 서비스 능력 M이 마찬가지로 35이나 이제 만약 총 서비스 능력 M이 35에 미달하여 제약으로 존재하는 경우에는 제시된 한계배분알고리즘에 의한 절차가 요구되며 이를 위하여 먼저 초기해로 $m_j=0,\ \forall j$,로 놓는다. 한계배분알고리즘은 $j \in J$에 대하여 순차적으로 일계특성을 적용하면 다음과 같은 결과를 얻는다. 먼저 제품 5에 순차적으로 12배분(각 -3.05), 제품 5에 1배분(-2.94), 제품 5에 1배분(-2.25), 제품 1에 순차적으로 9배분(-2), 제품 5에 1배분(-1.47), 제품 1에 1배분(-1.44), 제품 2에 순차적으로 6배분(-1), 제품 2에 1배분(-0.86), 제품 5에 1배분(-0.7), 그리고 제품 1 또는 제품 2에 1배분(-0.34)이 순서로 전개된다. 그러므로 주어진 총 서비스 능력의 규모에 따라 다음의 결과를 얻는다.

6. 결 론

본 논문은 선별검사가 실시되는 복수제품의 품질 확보를 위한 품질검사와 제품실패에 따른 서비스시스템을 동시에 설계하는 복수제품의 통합적 품질시스템을 설계하는 문제를 다루었다. 각 제품은 로트로 공급되고 품질검사가 실시되며 로트가 불합격되

〈표 8〉 각 제품별 최적 품질시스템

	제품 1	제품 2	제품 3	제품 4	제품 5
불량률	(0.10, 0.14)	(0.07, 0.11)	(0.10, 0.14)	(0.08, 0.12)	(0.05, 0.09)
서비스 능력	11	8	0	0	16
표본 수	0	0	150	200	0
총 품질비용	148.622	120.723	294	800	381.024

〈표 9〉 최적 품질시스템

M	총 비용	제품 1		제품 2		제품 3		제품 4		제품 5	
		m_1^*	q_{m1}^*	m_2^*	q_{m2}^*	m_3^*	q_{m3}^*	m_4^*	q_{m4}^*	m_5^*	q_{m5}^*
10	1784.8	0	0	0	0	0	150	0	200	10	49
15	1771.5	1	0	0	0	0	150	0	200	14	0
20	1761.5	6	0	0	0	0	150	0	200	14	0
25	1752.6	10	0	0	0	0	150	0	200	15	0
30	1747.6	10	0	5	0	0	150	0	200	15	0
35	1744.4	11	0	8	0	0	150	0	200	16	0

는 경우에는 전수검사를 실시하여 로트에는 불량품이 하나도 없이 공급된다. 공급된 제품은 품질이 확인되며 공급된 제품이 불량품인 경우에는 제품실패에 대한 절차를 갖는다. 한정된 능력을 과도한 평가활동에 투입하는 것이나 과소하거나 과도한 서비스능력의 확보는 더 높은 품질비용을 초래할 뿐만 아니라 고객의 신뢰성을 상실시키는 중요한 요인이 되므로 품질검사와 서비스시스템을 동시에 최적화시키는 서비스시스템을 확보하는 것은 매우 중요한 의사결정문제가 된다.

제품의 불량률이 확정적인 경우에는 품질비용의 일계특성과 이계특성을 도출하고 단일제품에 대하여는 품질비용의 일계특성을 이용하여 최적 표본수가 0이 되거나 전수검사를 실시함이 최적임을 보였다. 주어진 결과는 평가비용과 내적실패비용, 서비스능력 확보비용과 외적실패비용의 상호관계에 의하여 결정되며 설명될 수 있음을 보였다. 복수제품의 경우에는 도출된 품질비용의 한계비용이 선형이거나 조각난 선형의 볼록함수임을 이용하여 한계배분알고리즘을 변형하여 적용함으로써 매우 용이하게 최적 품질시스템이 설계되었다.

제품의 불량률이 확률적인 경우에도 마찬가지로 품질비용의 일계특성과 이계특성이 도출되었으며 이를 활용하여 최적 표본수가 0이 되거나 전수검사를 실시함이 최적임을 보였으며 이에 따른 최적 서비스능력을 제시하였다. 복수제품의 경우에도 품질비용이 조각난 선형의 볼록함수임을 이용하여 한계배분알고리즘이 적용되고 최적 품질시스템이 매우 용이하게 설계될 수 있음을 제시하였다. 제품의 불량률이 확률적인 경우에는 제품의 불량률이 확정적인 경우와는 달리 비용구조에 의한 최적 품질시스템의 경계가 명확하게 제시되지 않음을 알 수 있으며 분산이 증대될수록 품질비용 또한 증대됨을 수치적 결과에 의하여 제시하였다.

주어진 결과는 선별검사가 실시되는 복수제품의 최적 품질검사와 최적 서비스능력을 동시에 설계하는 최적화 문제에 매우 유용하게 적용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] Bebbington, M.S. and K. Govindaraju, "On Pesotechinsky's scheme for very low fraction nonconforming," *Journal of Quality Technology*, Vol.30(1998), pp.248-253.

[2] Chen, J., D.D. Yao, and S. Zheng, "Quality Control for Products Supplied with Warranty," *Operations Research*, Vol.46(1998), pp.107-115.

[3] Crosby, P.B., Quality is Free, New American Library, New York, 1980.

[4] Derman, C. and S.M. Ross, Statistical Aspects of Quality Control, Academic Press, 1997.

[5] Dimitrov, B., S. Chukova, and Z. Khalil, "Warranty Costs : An Age-Dependent Failure/Repair Model," *Naval Research Logistics*, Vol.51(2004), pp.959-976.

[6] Duncan, A.J., Quality Control and Industrial Statistics, 5th Edition, R.D. Irwin, Homewood, IL, 1986.

[7] Ebneshahrashoob, M. and T. Gao, and M. Sobel, "Double Window Acceptance Sampling," *Naval research Logistics*, Vol.51(2004), pp.297-306.

[8] Fox, B., "Discrete Optimization via Marginal Analysis," *Management Science*, Vol.13(1966), pp.210-216.

[9] Grant, E.L. and R.S. Leavenworth, Statistical Quality Control, McGraw Hill, New York, 1980.

[10] Juran, J.M. and F.M. Gryna, Jr., Quality Planning and Analysis, McGraw Hill, New York, 1980.

[11] Kleijnen, J.P.C., J. Kriens, and M.C.H.M. Lafleur, and J.H.F. Pardoel, "Sampling for Quality Inspection and Correction : AOQL Performance Criteria," *European Journal of*

Operational Research, Vol.62(1992), pp.372-379.

[12] Richken, P.H., J. Chandramohan, and C.S. Tapiero, "Servicing, Quality Design and Control," *IEEE Transactions*, Vol.21(1989), pp. 213-219.

[13] Shimp, T.A. and W.O. Bearden, "Warranty and Other Extrinsic Cue Effects on Consumer's Risk Perceptions," *Journal of Consumer Research*, Vol.19(1982), pp.38-46.

[14] Tapiero, C.S. and H.L. Lee, "Quality Control and Product Servicing : A Decision Framework," *European Journal of Operational research*, Vol.39(1989), pp.261-273.

[15] Thompson, J.R. and J. Koronacki, Statistical Process Control for Quality Improvement, Chapman and Hill, New York, 1993.

[16] Wald, A. Sequential Analysis, Wiley, New York, 1947.

[17] Wang, C.H. and S.H. Sheu, "Simultaneous Determination of the Optimal Production-Inventory and Product Inspection Policies for a Deteriorating Production Systems," *Computers and Operations Research*, Vol.28(2001), pp.1093-1110.

[18] Wu, Z., M. Xie, and Z. Wang, "Optimal Rectifying Inspection Plans," *International Journal of Production Research*, Vol.39(2001), pp. 1575-1588.

[19] Yeh, R.H., M.Y. Chen, and C.Y. Lin, "Optimal Periodic Replacement Policy for repairable Products under Free-Repair Warranty," *European Journal of Operational Research*, Vol.176(2007), pp.1678-1686.

[20] Yeh, R.H. and T.H. Chen, "Optimal Lot Size and Inspection Policy for Products Sold with Warranty," *European Journal of Operational Research*, Vol.174(2006), pp.766-776.