

신뢰성 해석을 이용한 구조최적화

박재용*, 임민규⁺, 오영규⁺, 박재용⁺, 한석영⁺⁺
(논문접수일 2009. 11. 30, 심사완료일 2010. 2. 17)

Structural Optimization using Reliability Analysis

Jae-Yong Park*, Min-Kyu Lim⁺, Young-Kyu Oh⁺, Jae-Yong Park⁺, Seog-Young Han⁺⁺

Abstract

This paper presents a reliability-based topology optimization (RBTO) using bi-directional evolutionary structural optimization (BESO). An actual design involves uncertain conditions such as material property, operational load and dimensional variation. Deterministic topology optimization (DTO) is obtained without considering of uncertainties related to the uncertainty parameters. However, the RBTO can consider the uncertainty variables because it has the probabilistic constraints. In this paper, the reliability index approach (RIA) is adopted to evaluate the probabilistic constraint. RBTO based on BESO starting from various design domains produces a similar optimal topology each other. Numerical examples are presented to compare the DTO with the RBTO.

Key Words : Reliability-Base Topology Optimization(신뢰성기반 위상최적화), Reliability Index Approach(신뢰성지수), Bi-directional Evolutionary Structural Optimization(양방향 진화적 구조최적화)

1. 서론

실제 설계과정에서 재료의 물성치, 하중, 치수공차 등의 각종 설계변수들은 불확실성(uncertainty)을 갖게 되는데 기존의 방법은 설계변수나 설계파라미터들을 불변의 값으로 고려하여 최적설계를 수행하게 된다. 그 결과 설계변수들의 불확실성이 목적함수나 제약조건에 미치는 영향이 무시되어 최

적설계 결과가 제약조건을 만족시킬 확률을 떨어뜨리게 된다. 신뢰성 기반 최적설계(reliability-based design optimization)는 체계적이고 논리적인 확률, 통계 이론을 이용하여 구조물의 안정성을 확률적으로 평가하는 방법이다. 즉, 설계상의 불확실성을 고려하여 설계자가 요구하는 파괴확률을 만족시키며, 목적함수를 최소화 하는 해를 구할 수 있는 방법으로 많은 연구가 진행되어 왔다.⁽¹⁻⁴⁾

* 한양대학교 기계공학과

+ 한양대학교 대학원 기계공학과

++ 교신저자, 한양대학교 기계공학부 (syhan@hanyang.ac.kr)

주소: 서울시 성동구 행당동 17 한양대학교 공업센터 M202-1

위상 최적설계(topology optimization)는 초기 설계 단계에서 널리 사용되는 최적화 기법 중 하나로 초기 형상이 결정되지 않은 구조물의 대략적인 형상을 결정한다. 진화적 구조 최적화 기법(ESO, evolutionary structural optimization)^(5,6)은 Xie와 Steven이 1990년대 초에 제안한 방법으로 비효율적인 요소를 제거하여 점차적으로 최적의 위상을 찾는 방법이다. 1990년대 말에는 요소를 동시에 더하고 제거하여 초기 체적이 달라도 최적의 위상을 찾을 수 있는 양방향 진화적 구조 최적화 기법(BESO, bi-directional evolutionary structural optimization method)⁽⁷⁾이 제안되었고, 최근에는 복잡한 알고리즘을 개선한 양방향 진화적 구조 최적화 기법⁽⁸⁾이 소개되었다.

결정론적 최적설계와 신뢰성 최적설계의 가장 큰 차이점은 구조물의 파괴확률 고려 유무이다. 신뢰성 기반 최적설계는 확률 제약조건을 갖기 때문에 설계자가 요구하는 강성을 만족시키고 주어진 신뢰성 지수에 대한 파괴확률을 갖는 구조물을 설계할 수 있다는 것이 가장 큰 장점이며, 신뢰도지수(reliability index)를 구하는 대표적인 방법으로는 신뢰도지수 기반 접근법(RIA, reliability index approach)이 있다.

이전의 신뢰성 기반 위상 최적화(RBTO, reliability-based topology optimization)⁽¹⁻³⁾는 초기 요소가 모두 존재할 때 수행되었지만, 본 연구에서는 개선된 BESO 기법과 신뢰도지수 기반 접근법인 RIA를 이용하여 초기체적이 다를 때의 신뢰성 기반 위상 최적화를 수행하여 그 결과를 결정론적 위상 최적화(DTO, deterministic topology optimization)의 결과와 비교하였다. RBTO의 적용을 위해서 유한요소해석에는 ANSYS를 이용하였고 신뢰성 해석과 BESO 기법의 적용은 MATLAB을 사용하였다.

2. 양방향 진화적 구조 최적화

2.1 민감도 수(Sensitivity numbers)

BESO 방법에서는 구조물에 요소를 동시에 더하고 제거함으로써 구조물의 강성을 최대화한다. 그러므로 체적 구속 조건을 가진 강성을 최대화하는 위상 최적화 문제는 다음과 같이 컴플라이언스(compliance)를 최소화 하는 문제로 정식화 될 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{Subject to :} \quad & V^* - \sum_{i=1}^N V_i x_i = 0 \\ & x_i \in \{0,1\} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 \mathbf{f} 와 \mathbf{u} 는 적용하중과 변위 벡터이다. C 는 평균 컴플라이언스(mean compliance)를 의미한다. V^* 는 미리 정의된 목표 체적을 의미하고 N 은 구조물의 총 요소수이다. 그리고 이진수는 요소의 있고(1) 없음(0)을 결정하는 수이다.

i 번째 요소가 구조물에서 제거될 때 탄성변형 에너지 변화량은 다음과 같다.

$$\alpha_i^e = \Delta C_i = \frac{1}{2} \{u_i\}^T [K_i] \{u_i\} \quad (2)$$

여기서 $\{u_i\}$ 는 노드 i 번째 요소의 변위 벡터이고 $[K_i]$ 는 요소의 강성 행렬이다. $\alpha_i^e = 0$ 는 빈(void) 요소이기 때문에 유한요소 해석에서 제외된다.

유한요소로 나뉘어진 연속체 구조물에서 위의 민감도 수는 체커보드패턴(checkerboard pattern)을 갖는 구조물을 만들 수 있다. 이러한 문제점을 극복하기 위해서 유한요소 해석에서는 쓰이지 않는 각 노드의 민감도 수를 노드와 연결된 요소의 민감도 수를 평균함으로써 구한다.

$$\alpha_j^n = \frac{\sum_{i=1}^M V_i \alpha_i^e}{\sum_{i=1}^M V_i} \quad (3)$$

여기서 M 은 j 번째 노드와 연결된 총 요소수를 의미한다.

2.2 필터 알고리즘(Filter scheme)

위에서 구한 각 노드의 민감도 수(sensitivity numbers)는 위상을 결정하기 전에 다시 요소 민감도 수로 변환된다. 필터 알고리즘을 적용할 때 r_{min} 이라는 값을 사용한다. 필터 알고리즘에서 r_{min} 의 기본적인 역할은 i 번째 요소의 민감도에 영향을 주는 노드를 정의하는 것이다. 이것은 i 번째 요소의 중심에서 반지름 r_{min} 으로 하여 원을 그리면 앞서 정의한 노드의 의미를 확실하게 알 수 있다. 개선된 i 번째 요소의 민감도 수는 다음과 같다.

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^M w(r_{ij}) \alpha_j^n}{\sum_{j=1}^M w(r_{ij})} \quad (4)$$

여기서 M 은 총 요소수이다. $w(r_{ij})$ 는 가중치 요소이면서 다음과 같이 정의된다.

$$w(r_{ij}) = r_{\min} - r_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (5)$$

여기서 r_{ij} 는 i 번째 요소의 중심에서 j 번째 노드까지의 거리이다.

필터 알고리즘을 적용함에도 불구하고 위상이 수렴되지 않을 수 있다. 이것은 유한 요소해석에 관여하지 않는(비어 있는) 더하는 요소의 민감도 수를 구하는 과정에서 부정확한 계산에 기인한다. 이러한 문제를 극복하는 간단한 방법은 각 요소의 전 해석 정보를 고려하는 것이다.

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i^k + \alpha_i^{k-1}}{2} \quad (6)$$

여기서 k 는 반복(iteration)수이다. 업데이트된 민감도 수는 이전 반복해석의 모든 민감도 수 정보를 포함한다.

2.3 알고리즘

BESO방법의 절차는 다음과 같다.

- 1) 주어진 경계 조건과 하중 조건에 대해서 설계 영역을 유한요소 메쉬를 사용하여 분해한다. 초기 디자인 영역에 초기값(0 혹은 1)을 부여한다.
- 2) 요소와 노드의 민감도 수를 얻기 위해 유한요소 해석을 수행한다.
- 3) 위의 식 (3),(4),(5)을 사용하여 필터 알고리즘을 거친 민감도 수를 구한다.
- 4) 식 (6)을 사용하여 전 해석 정보를 포함하는 요소의 민감도 수를 구한다.
- 5) 다음 위상을 위한 목표 체적을 결정한다.
- 6) 지울 요소와 더할 요소를 결정하고 더할 요소에는 1, 지울 요소에는 0의 값을 부여한다.
- 7) 1값을 가진 요소로 다음 유한요소 해석을 위한 새로운 위상을 만든다.
- 8) 새로운 설계영역에 대한 경계 조건과 하중 조건을 체크하고 유한요소 해석을 위한 준비를 마친다.
- 9) 최종 위상이 목표 체적에 도달하고 수렴 조건이 만족할 때까지 2-8 단계를 반복한다.

3. 신뢰성 기반 최적설계

신뢰성 기반 최적설계는 결정론적 최적설계에서 결정론적 제약조건을 사용하여 문제를 정의하는 것과 달리 설계변수와 함께 불확실성을 고려하기 위하여 다음과 같은 확률론적 제약조건을 이용하여 정의하게 된다.

$$\begin{aligned} \text{Min.} & \quad F(d) \\ \text{S.t.} & \quad P[G(d, X) \leq 0] \leq P_f \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 G 는 한계상태식(limit state function), d 는 설계변수 이고 X 는 확률변수이다. 확률제약조건은 시스템의 실패확률이 목표실패 확률 P_f 보다 작아야 함을 의미한다.

신뢰성 기반 위상최적화를 위하여 구조물의 체적을 목적함수로 고려하고, 최대 허용변위에 대한 제약을 한계상태식으로 정의하면 신뢰성 기반 위상 최적화 문제는 다음과 같이 정식화 된다.

$$\begin{aligned} \text{Min.} & \quad \text{Volume} \\ \text{S.t.} & \quad P[G \leq 0] \leq P_f \\ & \quad G = \delta_{\text{allow}} - \delta \end{aligned} \quad (8)$$

신뢰도지수와 실패확률의 관계 $\beta_i = -\Phi^{-1}(P_f)$ 로부터 RIA를 사용할 경우 최적화 문제는 다음과 같이 정의되며

$$\begin{aligned} \text{Min.} & \quad \text{Volume} \\ \text{S.t.} & \quad \beta_{\text{target}} \leq \beta \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 β 는 현 설계점에서의 신뢰도지수를 의미하고 β_{target} 은 목표 신뢰도지수를 나타낸다. RIA의 경우 확률제약조건을 만족여부 판별을 위하여 신뢰도지수를 계산하기 위한 내부최적화가 필요하다.

3.1 신뢰도지수 기반 접근법

신뢰도지수의 산정에 최적화 과정을 이용한 방법으로 확률변수들이 정규분포이며 서로 확률적으로 독립이라는 가정을 필요로 한다. 이 방법에서 신뢰도지수는 표준정규분포 공간에서 선형 근사화된 한계상태식과 원점 사이의 최단거리로 정의된다. 신뢰도지수의 정의에 의해 신뢰도지수 산정을 위한 내부최적화 문제는 다음과 같이 정식화 된다.

$$\begin{aligned} \text{Min. } & \beta = \|u\| = \sqrt{u^T u} \\ \text{S. t. } & G(u) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

신뢰도지수는 다음과 같이 정의된다.

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{G(\mu_g)}{\sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2}} \quad (11)$$

이 값은 SLP(sequential linear programming)이나 SQP(sequential quadratic programming) 등의 최적화 문제를 푸는 방법으로 구해질 수 있다. 여기서는 AFOSM(advanced first order second moment)⁽⁴⁾을 사용하였다.

4. 수치 예제

4.1 초기 100% 설계영역의 외팔보

Fig. 1과 같은 외팔보에 대하여 확률제한 조건을 고려한 위상 최적화를 수행하고, DTO의 결과와 RBTO의 결과를 비교해 보았다. 외팔보의 치수는 $L = 80mm$, $h = 50mm$ 그리고 $t = 1mm$ 이다. 재료의 물성치는 $E = 100GPa$, 포아송비는 $\nu = 0.3$ 이며 자유단에 작용하는 하중은 $P = 100N$ 이다. 설계영역은 총 80×50 의 사각형 요소로 나누어 위상 최적화를 위하여 BESO기법을 적용하였으며, 신뢰성 해석을 위해서 RIA를 이용하였다. 변위 제약조건은 $\delta_{allow} = 0.06mm$ 로 설정하였다.

재료의 물성치, 두께, 하중이 불확실성을 포함하는 확률변수인 경우에 대해 신뢰성 해석을 하였고, 확률변수는 정규분포특성을 갖고 확률적으로 서로 독립이며 평균값에 대하여 10%의 분산을 갖는다고 가정하였다. 목표 신뢰도지수를 3으로 정의하여 신뢰성 기반 위상 최적화 문제를 정식화 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Min. } & \text{Volume} \\ \text{S. t. } & P[G(d, X) \leq 0] \leq P_t = 0.135\% \\ & G = 0.06 - \delta \end{aligned} \quad (12)$$

확률제한조건에서 $P_f = 0.135\%$ 는 신뢰도지수 3에 해당하는 실패확률을 나타낸다.

DTO 수행결과를 Fig. 2, RBTO 수행결과를 Fig. 3에 나타내었고 그 결과 값들을 DTO의 결과와 비교하여 Table 1에 정리하였다. RBTO의 경우 DTO보다 재료를 더 사용한

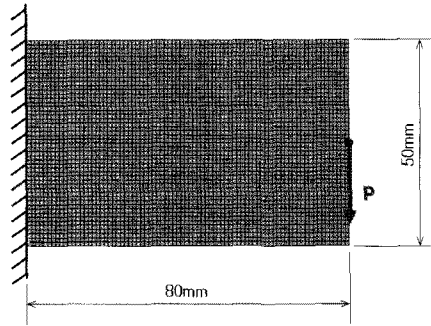


Fig. 1 Initial 100% design of a cantilever beam

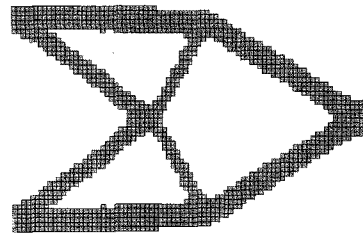


Fig. 2 Optimal topology of DTO obtained from an initial 100% design domain

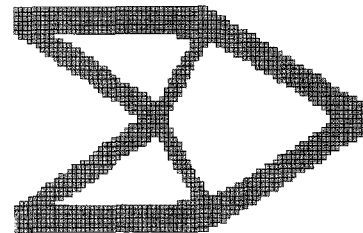


Fig. 3 Optimal topology of RBTO obtained from an initial 100% design domain

Table 1 Comparison between DTO and RBTO obtained from an initial 100% design domain

	DTO	RBTO
Volume	30.9%	36.6%
Deflection	0.0599	0.0508
Mean Compliance	2.995	2.541
Reliability Index	0.028	2.999

결과를 볼 수 있지만 신뢰도지수는 2.999로 목표하는 신뢰도지수 3에 가까운 위상임을 알 수 있다.

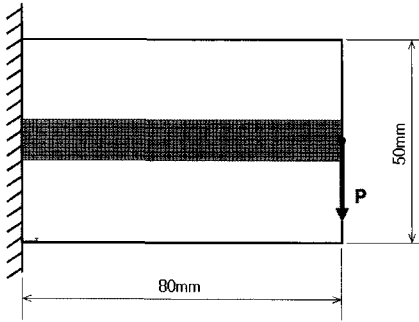


Fig. 4 Initial 20% design of a cantilever beam

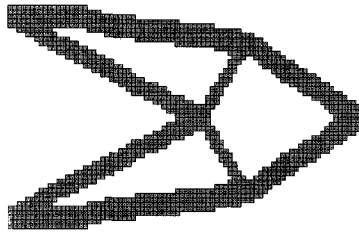


Fig. 5 Optimal topology of DTO obtained from an initial 20% design domain

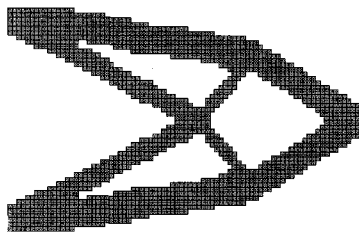


Fig. 6 Optimal topology of RBTO obtained from an initial 20% design domain

4.2 초기 20% 설계영역의 외팔보

외팔보의 치수, 재료물성치, 변위 제약조건은 예제 1과 같고 Fig. 4와 같이 초기영역에 대해 20%의 추측영역에 대하여 확률제한 조건을 고려한 위상 최적화를 수행하고, DTO 수행결과를 Fig. 5, RBTO 수행결과를 Fig. 6에 나타내었고 그 결과 값들을 비교하여 Table 2에 정리하였다.

4.3 초기 40% 설계영역의 외팔보

초기 40%의 영역에 대해서도 확률제한 조건을 고려한 위상 최적화를 수행하였다. 그 결과 위상은 각각 Fig. 5, Fig. 6

Table 2 Comparison between DTO and RBTO obtained from an initial 20% design domain

	DTO	RBTO
Volume	31.25%	37.1%
Deflection	0.0593	0.0508
Mean Compliance	2.965	2.541
Reliability Index	0.117	2.997

Table 3 Comparison between DTO and RBTO obtained from an initial 40% design domain

	DTO	RBTO
Volume	30.8%	36.4%
Deflection	0.0596	0.0508
Mean Compliance	2.982	2.541
Reliability Index	0.107	2.998

과 유사한 위상을 얻을 수 있었고 그 결과 값들을 Table 3에 정리하였다.

앞서 수행한 결과와 마찬가지로 RBTO의 경우가 DTO보다 재료를 더 사용했지만 목표하는 신뢰도 값을 만족함을 알 수 있다. 초기체적이 다를 경우 최적위상은 유사하고 평균 컴플라이언스 값을 비교했을 때 두 값이 거의 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 초기체적이 100% 일 때와 20%, 40% 일 때의 위상이 약간의 차이를 보이지만 평균컴플라이언스, 즉 BESO의 목적함수 값은 DTO, RBTO에서 거의 같은 값을 나타내었다. 이는 Hung와 Xie의 개선된 양방향 진화적 구조 최적화 기법⁽⁸⁾에서 소개된 예제와 비슷한 양상을 보인다.

5. 결론

초기 체적을 달리하여 위상 최적화를 수행하고 신뢰성 해석을 한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) BESO기법을 이용하여 목표 신뢰도지수를 만족하는 결과를 얻었다. RBTO의 경우 DTO에 비하여 좋지 못한 목적함수 값을 갖게 됨을 확인하였는데, 이는 요구하는 신뢰도지수를 만족시키기 위한 것임을 알 수 있다.
- (2) 초기체적에 관계없이 BESO기법은 신뢰성 기반 위상 최적화에 효율적으로 적용 가능함을 확인하였다.

- (3) 초기체적이 다를 경우 최적 위상이 약간의 차이를 보였지만 평균 컴플라이언스 값에 있어서는 유사한 결과를 얻을 수 있었다.

참 고 문 헌

- (1) Kim, C. I., Wang, S. M., Bae, K. R., and Moon, H. G., 2006, "Reliability-Based Topology Optimization with Uncertainties," *Int. J. KSME*, Vol. 20, No. 4, pp. 494~504.
- (2) Bang, S. H. and Min, S. J., 2006, "Reliability-Based Topology Optimization Using Single-Loop Single-Vector Approach," *J. of KSME*, Vol. 30, No. 8, pp. 889~896.
- (3) Kim, S. R., Park, J. Y., Lee, W. G., Yu, J. S., and Han, S. Y., 2008, "Reliability-Based Topology Optimization of a Cantilever Beam using ESO," *Annual Spring Conference, Proceeding of KSMTE*, pp. 280~285.
- (4) Haldar, A. and Mahadevan, S., 2000, *Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (5) Chu, D. N., Xie, Y. M., Hira, A., and Steven, G. P., 1996, "Evolutionary Structural Optimization for problems with stiffness constraints," *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 21, pp. 239~251.
- (6) Xie, Y. M. and Steven, G. P., 1997, *Evolutionary Structural Optimization*, Springer-Verlog, London.
- (7) Yang, X. Y., Xie, Y. M., Steven, G. P., and Querin, O. M., 1999, "Bi-directional Evolutionary Method for Stiffness Optimization," *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 11, pp. 1483~1488.
- (8) Hung, X. and Xie, Y. M., 2007, "Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 43, pp. 1039~1049.