3-수준계 Foldover Resolution Ⅳ 부분실험법의 통계적 구조 및 추가분석방법에 관한 연구

김상익†

건국대학교 상경대학 응용통계학과

A Study on the Statistical Structure and Additional Analysis of the 3-level Foldover Resolution Ⅳ Fractional Factorial Designs

Sang Ik Kim†

Dept. of Applied Statistics, KonKuk University

Key Words : Fractional factorial designs,, Resolution-Ⅳ designs, Foldover designs, Confounding, Estimable Effects

Abstract

For the fractional factorial designs, the resolution-Ⅳ designs can be used when we want to estimate the main effects and to investigate the structure of the non-negligible two-factor interaction effects, when the three-factor and higher order interaction effects are all negligible. However we need to add the additional treatment combinations in order to identify the influential interactions for the resolution-Ⅳ fractional factorial designs. In this paper we investigate the statistical structure for 3-level resolution-Ⅳ designs constructed by fold-over scheme and introduce a method for analyzing the influential two-factor interactions.

1. 서 론

요인배치법(factorial design)에서 실험설계에 필요한 처리조합(treatment combination)의 수가 너무 많은 경우, 일부의 처리조합만을 선택하여 실험을 설계하는 부분실험법(fractional factorial design)이 사용된다. Box와 Hunter(1961)는 이러한 부분실험법을 분류하는 방법으로 해상도(resolution)의 개념을 제시하였다. Box와 Hunter(1961)의 분류방법에 의하면, 모든 교호작용이 무시될 수 있어서 주효과 만이 분석 가능한 부분실험법은 resolution Ⅲ 계획이 되고, 3-인자 이상의 교호작용이 모두 무시될 수 있는 경우 주효과와 2-인자 교호작용까지 분석 가능한 부분실험법은 resolution Ⅴ 계획이 된다.

Resolution Ⅳ 계획은 3-인자 이상의 교호작용은 모두 무시될 수 있는 경우, 주효과는 다른 효과와 교락(confounding)되어 있지 않지만 2-인자 교호작용은 서로 교락되어 있는 부분실험법을 의미하게 된다. 부분실험법을 설계하고자 할 때 해상도의 값이 증가함에 따라 실험설계에 필요한 처리조합의 수는 급속하게 증가하게 되므로, 주효과를 분석하면서 일부 인자들 사이에 어떠한 교호작용들이 존재하는지 탐색하고자 할 때 resolution Ⅳ 계획은 resolution Ⅴ계획 보다 실험의 크기인 처리조합의 수가 무척 작아지므로 보다 효과적으로 사용될 수 있다. 따라서 이러한 resolution Ⅳ 계획은 산업현장에서 인자들이 많은 경우 적은 비용으로 프로세스에 미치는 인자들의 영향력을 분석하고자 할 때 효율적으로 사용된다.

Resolution Ⅳ부분실험법을 설계하는 방법으로 Box

† 교신저자 sikim@konkuk.ac.kr

※ 이 논문은 2009년도 건국대학교 학술진흥연구비 지원에 의한 논문임.

와 Wilson(1951)은 실험설계에 기본이 되는 처리조합과, 기본 처리조합의 반사(foldover) 처리조합들을 합쳐서 실험을 설계하는 foldover 설계법을 제시하였으며, John(1962)과 Webb(1968)등에 의해 다양한 형태의 foldover 설계방법이 연구되었다. 그리고 Montgomery와 Runger(1996)는 foldover 방법에 의해 설계되는 resolution Ⅳ 부분실험법의 다양한 통계적 활용방법을 제시하였다. 특히 Anderson과 Thomas(1979, 19 80)는 모든 인자의 수준 수가 3인, 3-수준계 실험에서 foldover 기법을 이용하여 실험의 크기가 최소에 근접하는 효율적인 resolution Ⅳ 설계방법을 제시하였다.

그러나 resolution Ⅳ계획에서는 2-인자 교호작용효과들이 서로 교락되어 있으므로 개개의 교호작용효과들에 대한 분석은 불가능하고 단지 어떤 인자들 간에 교호작용효과들이 존재하는지에 대한 부분적인 정보를 파악할 수 있게 된다. 따라서 특정 인자에 대한 교호작용 효과를 분석하고자 하는 경우에는 분석에 필요한 처리조합들이 실험에 추가되어야 한다.

본 연구에서는 Anderson과 Thomas(1979)에 의해 제시된 foldover 기법에 의해 설계되는 3수준계 resolution Ⅳ 계획의 통계적 구조를 이론적으로 규명하여 특정 인자의 교호작용 효과의 존재 여부에 대한 분석 기법과 함께, 유의한 교호작용효과를 검출하고자 추가적인 분석을 실시하는 경우, 필요한 처리조합을 추가하는 방법을 제시하고자 한다.

2. 3-수준계 foldover resolution Ⅳ 부분실험법의 설계방법

인자의 수가 t개이고 각 인자들이 동일하게 3개의 수준을 갖는 3-수준계 요인실험법에서, 각 인자들의 수준은 0,1,2로 그리고 처리조합은 $(t \times 1)$ 백터인 $\underline{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_t)'$, $x_i = 0,1,2$ 로 표기하자. 그리고 n개의 처리조합으로 구성되는 부분실험법은 크기가 $(t \times n)$ 인 행렬 T로 나타내면, T의 각 열은 처리조합을 의미하게 된다.

그리고 차수(order)가 3인 갈루아체(Galois field)를 $GF(3)$로 표기할 때, $GF(3)$에서 원소들에 대한 가능한 치환(permutation)들의 집합 P는 식(2.1)과 같다.

$$P = \{e, (012), (021), (12), (02), (01)\} \qquad (2.1)$$

여기서 (012)는 $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 0$으로 변환하는 치환을 의미하고, (12)는 $0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$로 변환하는 치환이고, e는 같은 값으로 변환하는 항등치환(identity permutation)을 의미하고 다른 치환들도 이와 유사하게 정의되는 치환들이다.

처리조합 $\underline{x}$에 대한 반사(foldover) 처리조합은 $\underline{x}$의 원소들을 식(2.1)의 치환관계에 따라 변환된 처리조합을 의미한다. 예를 들어 인자의 수가 $t=4$인 경우, 처리조합 $\underline{x}=(0,1,2,1)'$의 (021)치환에 의해 생성되는 반사처리조합은 $\underline{x}(021)=(2,0,1,0)'$이다. 따라서 3-수준계 실험에서는 한 개의 처리조합에 대하여 서로 다른 반사처리조합은 5개가 생성될 수 있으며, 기본이 되는 처리조합들과 가능한 모든 반사처리조합들의 합으로 설계되는 부분실험법을 반사설계법(foldover design)이라 한다(Box와 Wilson(1951)).

특히 2-수준 요인실험법에서는 가능한 치환은 e와 (01), 두 개가 존재하게 되므로 서로 다른 반사처리조합은 1개가 생성될 수 있으며, Box와 Wilson(1951)은 부분실험법 D가 resolution Ⅲ 계획이고 T가 D에 속하는 처리조합들과 처리조합들의 반사처리조합들로 구성되는 경우, T는 resolution Ⅳ 부분실험법이 됨을 입증하였다. 그러나 3-수준계 및 일반적인 요인실험법에서는 이와 같이 설계되는 resolution Ⅲ foldover 설계법은 resolution Ⅳ 계획이 되지 못한다.

Anderson과 Thomas(1979)는 3-수준 요인실험법에서 $D=[\underline{0}, I_t]$인 경우(여기서 $\underline{0}$은 모든 원소가 0인 벡터이고 I_t는 $(t \times t)$ 단위행렬(identity matrix)를 의미함), foldover 방법에 의해 설계되는 부분실험법은 resolution Ⅳ 계획이 됨을 입증하였다. 예를 들어 $t=4$인 경우, foldover 방법에 의해 설계되는 resolution Ⅳ 계획은 <표 1>의 T와 같이 된다. <표 1>에서는 예를 들어 $D(012)$는 $D=[\underline{0}, I_4]$에 속하는 처리조합(열)들을 (012) 치환 방법에 의해 생성되는 반사처리조합을 의미하며, $(0,0,0,0)', (1,1,1,1)' (2,2,2,2)'$과 같이 중복되는 처리조합들은 뒤에 출현하는 경우 생략하게 된다. 따라서 인자의 수가 t인 경우 실험의 크기인 처리조합의 수는 $n=6(t+1)-3=6t+3$이 되며, Margolin(1969)이 입증한 3-수준 resolution Ⅳ 부분실험법에서 이론적인 최소 실험크기는 $n \geq 6t-3$이므로, 최소실험에 비교적 가까운 계획이 됨을 알 수 있다.

Anderson과 Thomas(1979)에 따르면 위와 같이 foldover 방법에 의해 설계되는 resolution Ⅳ 부분실험법은 $GF(3)$에서 식(2.2)을 만족하는 $\underline{x}$를 처리조합으로 하는 실험설계와 동일하게 된다.

<표 1> 인자의 수가 4인 경우 resolution IV 부분실험법

$$T=\begin{bmatrix} 01000 & \vdots & 12111 & \vdots & 20222 & \vdots & 2000 & \vdots & 1222 & \vdots & 0111 \\ 00100 & \vdots & 11211 & \vdots & 22022 & \vdots & 0200 & \vdots & 2122 & \vdots & 1011 \\ 00010 & \vdots & 11121 & \vdots & 22202 & \vdots & 0020 & \vdots & 2212 & \vdots & 1101 \\ 00001 & \vdots & 11112 & \vdots & 22220 & \vdots & 0002 & \vdots & 2221 & \vdots & 1110 \end{bmatrix}$$

D 또는 D(e) D(012) D(021) D(12) D(02) D(01)

$$T=\bigcup_{i=1}^{t}\Psi_i$$

$$\text{단,}\quad \Psi_i=\{\underline{x}:A_i\,\underline{x}=\underline{0}\} \qquad (2.2)$$

여기서

(1) A_i는 $(t-2)\times t$ 행렬로서 i번째 열(column)은 $\underline{0}$이고

(2) A_1의 두 번째 열과 $A_i(i\neq 1)$의 첫 번째 열은 모두 $\underline{2}$이고 나머지 열들은 $(t-2)\times(t-2)$의 단위행렬과 동일하다.

식(2.2)에서 $A_i\underline{x}=\underline{0}$의 방정식을 만족하는 9개의 해 $\underline{x}$를 열(처리조합)로 하는 Ψ_i는 식(2.3)과 같이 되며, 각각의 Ψ_i에서 세 개의 처리조합 $\underline{0},\underline{1},\underline{2}$ 는 공통적으로 포함되게 되어 식(2.2)의 부분실험법 T에서 실험의 크기는 $n=6t+3$이 됨을 알 수 있다.

$$\Psi_i=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \underline{0\,1\,2\,0\,1\,2\,0\,1\,2} \\ 0\,0\,0\,1\,1\,1\,2\,2\,2 \\ \underline{0\,1\,2\,0\,1\,2\,0\,1\,2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{첫번째부터 } (i-1)\text{번째 인자의 수준} \\ i\text{번째 인자의 수준} \\ (i+1)\text{번째 부터 마지막 인자의 수준} \end{array} \qquad (2.3)$$

3-수준 요인실험법에서 전체 평균은 μ, 인자 혹은 인자의 주효과를 F_i , 2인자 교호작용은 $F_i\times F_j$ $i,j=1,2,\cdots t, i<j$ 로 나타내고, 3인자 이상의 교호작용들은 모두 무시될 수 있다고 하자. 그러면 주효과 F_i의 자유도는 2이고 2인자 교호작용 $F_i\times F_j$는 자유도가 4이므로, 교호작용은 각각 자유도 2를 갖는 제 1 교호작용요소(first interaction component) F_iF_j와 제 2 교호작용요소(second interaction component) $F_iF_j^2$로 구성된다. 그리고 자유도가 2인 주효과 및 각각의 교호작용요소들은 1차 효과(linear effect)와 2차 효과(quadratic effect)로 구성되므로, 주효과 및 교호작용요소 E의 1차효과와 2차효과를 각각 $(E)^1,(E)^2$라 할 때, E를 (2×1) 벡터로 나타낼 때는 $(E)=((E)^1,(E)^2)'$ 와 같이 표기할 수 있다. 예를 들어 주효과 F_i에 대해서는 $(F_i)=(F_i^1, F_i^2)'$과 같이 표현된다.

그리고 Anderson과 Thomas(1980)에서와 같이 식(1.1)식의 집합 P에 속하는 각 치환에 해당하는 (2×2) 행렬을 식(2.4)와 같이 정의하자.

$$G_e=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad G_{(012)}=\begin{bmatrix}-1/2&3/2\\-1/2&-1/2\end{bmatrix}$$

$$G_{(021)}=\begin{bmatrix}-1/2&-3/2\\1/2&-1/2\end{bmatrix}\quad G_{(02)}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

$$G_{(01)}=\begin{bmatrix}1/2&3/2\\1/2&-1/2\end{bmatrix}\quad G_{(12)}=\begin{bmatrix}1/2&-3/2\\-1/2&-1/2\end{bmatrix}$$

부분실험법에서는 주효과 및 교호작용요소들은 교락관계를 갖게 되며, 집합 C 에 속해 있는 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 요인들이 교락되어 있는 경우 E_1을 기준요인으로 하게 되면 다른 요인들의 수준과 E_1의 수준의 관계는 식(2.1)에 속하는 하나의 치환 p_i에 의해 결정되게 된다. 따라서 전체 모평균 μ를 포함하고 있지 않은 교락집합 C 에 대한 추정가능함수(estimable function) 벡터 (EC)는 식(2.5)와 같이 된다(Anderson and Thomas(1980)).

$$(EC)=G_e(E_1)+G_{p_2}(E_2)+G_{p_3}(E_3)+\cdots+D_{p_k}(E_k) \qquad (2.5)$$

여기서$(E_k)=[(E_k)^1\ (E_k)^2]'$로서 E_k의 1차 및 2차 요인으로 구성되는 (2×1)벡터이다.

식(2.2)에서와 같이 9개의 처리조합으로 구성되어 있는 Ψ_i에서 각 효과들의 교락관계는 부분실험법의 교락이론에 의해 식(2.6)과 같이 5개의 집합으로 분류되며, 같은 집합에 속해있는 요소들은 서로 교락되게 된다(Raghavarao (1971)).

$$C_{0i}=\{\mu,\ F_jF_k^2, j<k,\ j\neq i, k\neq i\},$$

$$C_{1i}=\{F_i\}$$

$$C_{2i}=\{F_j,\ j\neq i,\ F_jF_k,\ j<k,\ j\neq i,\ k\neq i\}$$

$$C_{3i}=\{F_iF_j,\ j\neq i\},$$

$$C_{4i}=\{F_iF_j^2,\ j\neq i\} \qquad (2.6)$$

식(2.6)에서 자유도가 1인 C_{0i}를 제외한 나머지 교락집합들에 대한 추정가능함수 벡터는 식(2.5)에 따라 식(2.7)과 같이 된다(Anderson과 Thomas(1980)).

$$(EC)_{1i}=\begin{pmatrix}(F_i)^1\\(F_i)^2\end{pmatrix},$$

$$(EC)_{2i}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{t}\begin{pmatrix}(F_j)^1\\(F_j)^2\end{pmatrix}+\sum_{\substack{j=1\\ j<k,}}^{t}\sum_{\substack{k=1\\ j,k\neq i}}^{t}\begin{bmatrix}1/2 & -3/2\\ -1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(F_jF_k)^1\\(F_jF_k)^2\end{bmatrix}$$

$$(EC)_{3i}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{t}\begin{pmatrix}(F_iF_j)^1\\(F_iF_j)^2\end{pmatrix}$$

$$(EC)_{4i}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{t}\begin{pmatrix}(F_iF_j^2)^1\\(F_iF_j^2)^2\end{pmatrix} \qquad (2.7)$$

식(2.2)와 같이 설계되는 foldover resolution-Ⅳ 부분실험법에서는 주효과 F_i들은 다른 효과들과 교락되지 않으므로 일반적인 분산분석법에 의해 분석이 가능하며, 나아가 2인자 교호작용들의 교락관계도 파악할 수 있어 resolution Ⅲ 설계방법에 비해 보다 많은 정보를 제공해 줄 수 있다. 그리고 주효과 분석 이외에 어떤 인자의 교호작용들이 존재하는가에 대한 분석방법은 다음과 같이 수행될 수 있다.

먼저 식(2.7)에서 $(EC)_{3i}=\underline{0}$인 경우,$(EC)_{3i}$를 구성하고 있는 $(F_iF_j)^1$, $(F_iF_j)^2$들이 모두 0이 된다. 따라서 식(2.2)의 Ψ_i에 속하는 9개의 처리조합을 이용하여 다음과 같은 식(2.8)의 가설을 검정하여 귀무가설이 채택되면,$(F_iF_j)^1$, $(F_iF_j)^2$, $j\neq i$, $j=1,2\cdots,t$ 가 모두 0이 되므로 인자 F_i의 제 1 교호작용요소는 유의하지 않다고 판단할 수 있게 된다.

$$H_1:(ES)_{3i}=\underline{0} \qquad (2.8)$$

또한 같은 원리에 의해 다음과 같은 식(2.9)의 가설검정을 통해 인자 F_i의 제 2 교호작용요소의 유의성을 판단할 수 있게 된다.

$$H_2:(EC)_{4i}=\underline{0} \qquad (2.9)$$

따라서 식(2.8), 식(2.9)의 두 개의 가설을 검정한 결과 모두 유의하지 않은 경우 인자 F_i의 교호작용이 존재한다는 근거가 없다고 할 수 있다. 이러한 경우 일반적으로F_i의 교호작용이 없다고 판단할 수 있으며, 그렇지 않은 경우 인자 F_i는 다른 인자와 교호작용효과를 갖는다고 할 수 있다(Anderson and Thomas(1980)).

식(2.8)의 가설을 검정하기 위한 검정통계량은 다음과 같이 유도될 수 있다. Ψ_i에 속해 있는 9개의 처리조합에 해당하는 관측값들의 벡터를 $\underline{y}_{3i}$라 하고,$\underline{y}_{3i}$에 상응하는 선형모형의 계획행렬(design matrix)을 X_3라 하면, $(EC)_{3i}$의 변동 $SS((EC)_{3i})$는 선형모형의 이론에 의해 식(2.10)과 같이 구할 수 있다(Searle (1971)). 그리고 식(2.11)의 변동은 오차항에 대한 일반적인 가정 하에서 식(2.9)의 가설이 사실인 경우 자유도가 2인 카이제곱분포에 따르게 되므로 $MS((EC)_{3i})=SS((EC)_{3i})/2$는 통상적인 F-검정법에서 F-통계량의 분자로 사용될 수 있다.

$$SS((EC)_{3i})=\underline{y_{3i}}'X_3(X_3'X_3)^{-1}X_3'\underline{y_{3i}} \qquad (2.10)$$

식(2.10)에서(9×2)행렬 X_3를 구축하는 방법은 Kim(2000)에 의해 제시된 바와 같이 다음과 같이 구축될 수 있다. 먼저 식(2.7)의 C_{3i} 집합에 속해 있는 하나의 효과 F_iF_j를 선택하면, 처리조합 $(x_1,x_2,\cdots,x_t)$의 F_iF_j의 수준은 x_i+x_j (mod(3))가 된다. 그리고 C_{3i}의 추정가능 함수식 $(EC)_{3i}$는 1차 효과(linear effect), 2차 효과(quadratic effect)로 구성되어 있으므로 식(2.11)의 Helmert 직교다항식 계수행렬 H를 이용하여, F_iF_j수준이 0인 처리조합은 $(1,1)$로, 1인 처리조합은 $(0,-2)$로, 2인 처리조합은 $(-1,1)$로 변환하여 (9×2)인 행렬을 구성하면 된다.

$$H=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{array}{l}:0\text{ 수준}\\ :1\text{ 수준}\\ :2\text{ 수준}\end{array} \qquad (2.11)$$

그리고 식(2.8)과 식(2.9)의 가설에 대한 분석도 Kim(2000)이 제시한 방법과 유사하게 수행될 수 있다. 따라서 각각의 Ψ_i에 대하여 분석을 수행하게 되면 어떤 인자들의 교호작용이 존재하는지에 대한 정보를 부분적으로나마 파악할 수 있게 된다. 그리고 더 나아가 유의한 교호작용들을 검출하고자 하는 경우, 분석에 필요한 처리조합을 추가하여야 하며 본 연구에서는 계속하여 처리조합을 추가하고 분석하는 방법을 제시하고자 한다.

3. foldover resolution-Ⅳ 부분실험법의 통계적 구조와 추가 분석 방법

교호작용에 대한 추가분석 방법을 고찰하기 위해 필요한 foldover 부분실험법의 통계적 구조를 분석하기

위하여, 다음과 같이 3개의 처리조합으로 구성되는 부분실험법을 $\Delta_{i,\underline{c}}$를 생각하여 보자

$$\Delta_{i,\underline{c}} = \{\underline{x} \mid B_i \underline{x} = \underline{c}\} \tag{3.1}$$

단, B_i는 $(t \times t)$ 단위행렬에서 i번째 행(row)을 제외한 $((t-1) \times t)$행렬이며, $\underline{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_{i-1}, c_{i+1}, \cdots, c_t)'$인 $((t-1) \times 1)$ 벡터이다.

그러면 다음과 같은 [정리 3.1]이 입증된다.

[정리 3.1] 식(3.1)에서 $\underline{c} = \underline{0}$, $\underline{1}$ 혹은 $\underline{2}$인 경우, 각각 생성되는 3개의 처리조합을 합하여 9개의 처리조합으로 구성되는 부분실험법을 Δ_i라 하면, Δ_i는 식(2.3)의 Ψ_i와 같게 된다.

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \{\underline{x} \mid B_i \underline{x} = \underline{0}\} \cup \{\underline{x} \mid B_i \underline{x} = \underline{1}\} \cup \{\underline{x} \mid B_i \underline{x} = \underline{2}\} \\ &= \Psi_i \end{aligned} \tag{3.2}$$

위의 [정리 3.1]를 입증하기 위해서 먼저 Δ_i를 구성하는 9개의 처리조합 $\underline{x}$들에 대한 식을 행렬로 표현하면 식(3.3)과 같이 되고,

$$B_i \underline{x} = [\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}] \tag{3.3}$$

식(3.3)의 B_i와 $[\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}]$ 행렬의 두 번째부터 행(row)들을 첫 번째 행의 원소별로 빼고 나면 식(3.4)와 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \underline{B}_{i1}' \\ A_i \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

여기서 $\underline{B}_{i1}'$는 B_i의 첫 번째 행이고, A_i는 식(2.3)에서 정의된 행렬이다.

따라서 $GF(3)$에서 식(3.4)를 만족하는 방정식의 해는 $A_i \underline{x} = \underline{0}$를 만족하는 해와 일치하게 되어 [정리 3.1]이 증명된다.

한편, 식(2.2)의 foldover 부분실험법은 식(3.2)에 의해서도 설계될 수 있다. 그리고 식(3.1)의 부분실험법의 교락구조는 식(3.5)와 같이 되며,

$$Z_{0i} = \{\mu,\ F_j, F_jF_k, F_jF_k^2,\ j,k = 1,2 \cdots t,\ k \neq i\}$$

$$Z_{1i} = \{F_i, F_iF_j, F_iF_j^2, j = 1, \cdots t, j \neq i\} \tag{3.5}$$

자유도 2를 갖는 Z_{1i}에 대한 추정가능식 $(EZ)_{1i}$는 식(2.5)에 따라 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} (EZ)_{1i,\underline{c}} = &\ G_e(F_i) + D_{p_{11},\underline{c}}(F_iF_1) + \cdots + D_{p_{1t},\underline{c}}(F_iF_t) \\ &+ D_{p_{21},\underline{c}}(F_iF_1^2) + \cdots + D_{p_{2t},\underline{c}}(F_iF_t^2) \end{aligned} \tag{3.6}$$

단, 여기서 $(F_i), (F_iF_j), (F_iF_j^2)$들은 각 요인들의 1차 효과와 2차효과로 구성되는(2×1)벡터들이고, $G_{p_{1i},\underline{c}}$, $G_{p_{2i},\underline{c}}$는 식(2.5)에서 정의된 치환 p_{1i}, p_{2i}에 해당하는 계수행렬들로서 $\underline{c}$에 의해 결정된다.

여기서 $GF(3)$에서 식(3.7)과 같이 설계되는 다음의 두 개의 부분실험법 $\Delta_{i,\underline{a}}$, $\Delta_{i,\underline{d}}$을 생각해 보자.

$$\Delta_{i,\underline{a}} = \{\underline{x} \mid B_i \underline{x} = \underline{a}\},\ \Delta_{i,\underline{d}} = \{\underline{x} \mid B_i \underline{x} = \underline{d}\} \tag{3.7}$$

단,$\underline{a} = (a_1, \cdots a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_t)'$이고

$\underline{d} = (d_1, \cdots d_{i-1}, d_{i+1}, \cdots, d_t)'$ 이다.

식(3.7)의 $\underline{a}$와 $\underline{d}$에서 $k \neq j$ 인 경우에만 $a_k = d_k$이고, 나머지 원소에서는 $a_j \neq d_j$ 인 경우. 각각의 부분실험법에 대한 식(3.6)의 추정가능함수 행렬 $(EZ)_{1i,\underline{a}}$ 와 $(EZ)_{1i,\underline{d}}$를 비교하여 보자. $k \neq j$인 경우 $a_k = d_k$이고 $a_j \neq d_j$이므로, 식(3.6)에서 계수행렬 $D_{p_{1j}}$ 에 해당하는 행렬들인 $D_{p_{1j},\underline{a}}$, $D_{p_{1j},\underline{d}}$가 다르고, $D_{p_{2j}}$에 해당하는 행렬들인 $D_{p_{2j},\underline{a}}$, $D_{p_{2j},\underline{d}}$만 다를 뿐 다른 계수행렬들은 동일하게 된다 (Anderson and Thomas(1980)). 따라서 다음의 식(3.8)이 성립하게 된다.

$$\begin{aligned} (EZ)_{1i,\underline{a}} - (EZ)_{1i,\underline{d}} = &\ [D_{p_{1j},\underline{a}} - D_{p_{1j},\underline{d}}](F_iF_j) \\ &+ [D_{p_{2j},\underline{a}} - D_{p_{2j},\underline{d}}](F_iF_j^2) \end{aligned} \tag{3.8}$$

따라서 식(3.8)에서 $(EZ)_{1i,\underline{a}} - (EZ)_{1i,\underline{d}} = \underline{0}$인 경우, $(F_iF_j) = (F_iF_j^2) = \underline{0}$이 되므로 인자 F_i와 F_j 사이에는 교호작용이 없는 것으로 판단할 수 있다. 따라서 식(3.7)에서 $\underline{a}$와 $\underline{d}$에서 $k \neq j$ 인 경우에만 $a_k = d_k$이고, 나머지 원소에서는 $a_j \neq d_j$ 로 부분실험법을 설계하면. 다음의 식(3.9)의 가설 H_3을 검정하여 인자 F_i와 F_j 사이에는 교호작용이 존재하는지를 검정할 수 있게 된다.

$$H_3 : (F_iF_j) = (F_iF_j^2) = \underline{0} \tag{3.9}$$

(인자 F_i와 F_j는 교호작용이 없다.)

식(3.9)의 가설을 검정하는 방법으로는, 먼저 식(3.7)에서 주어진 $\underline{a}$와 $\underline{d}$에 따라 설계되는 부분실험법에 $\Delta_{i,\underline{a}}$와 $\Delta_{i,\underline{d}}$에 해당하는 3개의 처리조합에 대한 관측값 벡터를 y_a, y_d라 하면, 가설 H_3에 대한 제곱합 SS_{H_3}는 선형모형의 이론에 의해 식(2.11)의 행렬 H를 사용하여 다음과 같이 구해진다(Searle(1971)).

$$SS_{H_3} = (y_a - y_d)' H(H'H)^{-1} H'(y_a - y_d) \qquad (3.10)$$

그리고 오차항이 정규분포를 한다는 일반적인 선형모형의 가정하에서 SS_{H_3}는 자유도가 2인 카이제곱 분포에 따르게 되므로 가설 H_3가 사실인 경우 $MS_{H_3} = SS_{H_3}/2$는 통상적인 F-통계량의 분자로 사용될 수 있다(Searle(1971)).

한편 $GF(3)$에서 j-번째 원소는 v이고, 나머지 모든 원소들이 모두 b인(단, $b \neq v$), $((t-1)\times t)$ 벡터를 $\underline{b}_j$라 할 때, 식(3.1)에서 $B_i\underline{x} = \underline{b}_j$를 만족하는 3개의 처리조합들을 열벡터로 하는 행렬은 식(3.11)과 같다.

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} \underline{b}\ \underline{b}\ \underline{b} \\ 0\ 1\ 2 \\ \underline{b}\ \underline{b}\ \underline{b} \\ v\ v\ v \\ \underline{b}\ \underline{b}\ \underline{b} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} :\ \text{첫번째 부터}(i-1)\text{번째 인자의 수준} \\ :\ i\ \text{번째인자의수준} \\ :\ (i+1)\text{부터}(j-1)\text{번째까지인자수준} \\ :\ j\text{번째인자수준} \\ :\ (j+1)\text{번째부터}t\text{번째인자수준} \end{array} \end{array} \qquad (3.11)$$

그리고 식(3.11)과 식(2.4)를 비교하여 보면, b와 v 값에 관계없이 동일한 열(처리조합)은 한 개가 존재하게 되어 다음의 [정리 3.2]가 입증된다.

[정리3.2] 부분실험법 $\Delta_{i,\underline{b}_j}$ 와 식(2.4)의 부분실험법 Ψ_i에는 동일한 처리조합이 하나 존재한다.

여기서 $\underline{1}_j(10)$를 모든 원소가 1인 벡터 $\underline{1}$에서 j번째 원소를 식(2.1)에서 (10)의 치환관계로 변환한 벡터를 의미할 때, 식(3.7)에서 $\underline{a}=\underline{1}$, $\underline{d}=\underline{1}_j(10)$인 경우 [정리 3.1]에 의하면 $\underline{a}=\underline{1}$인 경우의 3개 처리조합은 Ψ_i에 있고, [정리 3.2]에 따라 $\underline{d}=\underline{1}_j(10)$인 경우의 3개 처리조합 중 하나는 Ψ_i에 있게 되므로 식(3.9)의 가설 H_3를 검정하는 데는 나머지 2개의 처리조합을 추가하면 된다.

가설 H_3가 채택되는 경우, 인자 F_i는 F_j와 교호작용을 갖지 않는다고 결론지을 수 있으므로 , 필요한 경우 인자 F_i와 다른 인자와의 분석을 수행하게 된다.

한편 가설 H_3가 기각된 경우 인자 F_i는 F_j와 교호작용을 갖는다고 할 수 있으며, 계속하여 인자 F_i는 F_j 이외의 다른 인자와도 교호작용효과를 갖고 있는지에 대한 분석은 다음과 같이 수행할 수 있다.

식(3.7)에서 벡터 $\underline{a}$와 $\underline{d}$의 원소들 중, j번째 원소 만 같고$(a_j = d_j)$ 다른 원소들은 다른 경우, 식(3.6)의 추정가능함수 행렬 $(EZ)_{1i,\underline{a}}$ 와 $(EZ)_{1i,\underline{d}}$를 비교하면 효과 벡터 (F_iF_j) 와 $(F_iF_j^2)$에 대한 계수행렬들 만 같게 되고 다른 효과벡터들의 계수행렬들은 다르게 된다. 따라서 식(3.8)의 $(EZ)_{1i,\underline{a}} - (EZ)_{1i,\underline{d}}$는 (F_iF_k), $(F_iF_k^2)$ (단 $k \neq j$) 들의 선형결합형태이고, $(EZ)_{1i,\underline{a}} - (EZ)_{1i,\underline{d}} = \underline{0}$ 인 경우 모든 (F_iF_k), $(F_iF_k^2)$, $k=1,\cdots t, k\neq j$ 들은 $\underline{0}$이 되므로 인자 F_i는 F_j하고만 교호작용을 갖는다고 판단할 수 있다.

따라서 인자 F_i에 대하여 식(3.9)의 가설 H_3가 기각된 경우 계속하여 다음의 식(3.12)의 가설 H_4을 검정하여 H_4가 채택되면, 인자 F_i는 F_j하고만 교호작용을 갖는다고 할 수 있다.

$$H_4 : (F_iF_k) = (F_iF_k^2) = \underline{0}, \quad \forall k, k \neq j$$
(인자 F_i의 교호작용이 존재하는 경우, F_j하고만 교호작용을 갖는다.) (3.12)

식(3.12)의 가설 H_4를 검정하기 위한 효과적인 방법을 제시하면 다음과 같다. 먼저 식(3.7)에서 $\underline{a}=\underline{0}$으로 하고 $\underline{d}=\underline{1}_j(10)$으로 하여 각각 3개의 처리조합을 갖는 부분실험법을 설계하면, $\underline{a}=\underline{0}$인 경우의 처리조합들은 [정리 3.1]에 의해 Ψ_i에 포함되어 있고, $\underline{d}=\underline{1}_j(10)$인 경우의 처리조합들은 가설 H_3를 검정하는 과정에서 추가된 처리조합과 동일하므로 새로운 처리조합을 추가할 필요가 없게 된다. 따라서 가설 H_3를 검정하는데 추가된 2개의 처리조합에 의해 두 개의 가설 H_3와 H_4를 모두 검정할 수 있게 된다.

그리고 가설 H_4가 기각되지 않은 경우, 인자 F_i는 F_j하고만 교호작용을 갖는다고 결론지을 수 있으므로, 인자 F_i의 교호작용에 대한 분석을 마치고 필요한 경우 다른 인자에 대해서도 가설들을 축차적으로 분석하며 수행하게 된다.

한편 인자 F_i에 대하여 가설 H_3와 H_4 가 축차적으로

기각된 경우, 우리는 계속하여 인자 F_i가 F_j 이외의 다른 인자(예를 들어 F_l)와 교호작용을 갖고 있는지에 대한 다음의 가설 H_5도 유사한 방법으로 수행할 수 있다.

H_5: 인자 F_i의 교호작용이 존재하는 경우, F_j, F_l하고만 교호작용을 갖는다. (3.13)

식(3.13)의 가설 H_5를 검정하기 위해서는 가설 H_4를 검정하는 방법과 유사하게 식(3.7)에서 벡터 $\underline{a}$와 $\underline{d}$의 원소들 중, j번째 원소와 l번째 원소 만 같고($a_j = d_j$, $a_l = d_l$) 다른 원소들은 같지 않게 하여 부분실험법을 설계하면 된다. 이런 경우 식(3.6)의 추정가능함수 행렬 $(EZ)_{1i,\underline{a}}$ 와 $(EZ)_{1i,\underline{d}}$를 비교하면 효과 벡터 (F_iF_j)와 $(F_iF_j^2)$ 그리고 (F_iF_l) 와 $(F_iF_l^2)$에 대한 계수행렬들 만 같게 되고 다른 효과벡터들의 계수행렬들은 다르게 된다. 따라서 식(3.8)의$(EZ)_{1i,\underline{a}} - (EZ)_{1i,\underline{d}} = \underline{0}$인 경우, (F_iF_j)와 $(F_iF_j^2)$ 그리고 (F_iF_l) 와 $(F_iF_l^2)$ 를 제외한 나머지 교호작용요소 효과 벡터들이 모두 $\underline{0}$ 이 되므로, 인자 F_i는 F_j, F_l하고만 교호작용을 갖는다고 할 수 있다. 따라서 식(3.13)의 가설은 H_5: $(EZ)_{1i,\underline{a}} - (EZ)_{1i,\underline{d}} = \underline{0}$ 와 동일한 가설이 된다.

식(3.13)의 가설 H_5를 검정하기 위해 필요한 처리조합을 결정하는 데는, 벡터 $\underline{a}$와 $\underline{d}$의 원소들 중, j번째 원소와 l번째 원소 만 같고 다른 원소들은 같지 않게 하면 되므로 여러 가지 방법이 가능하게 된다. 예를 들어 $\underline{a} = \underline{0}$인 경우, $\underline{d} = \underline{1}_{jl}(10)$로 하여(여기서 $\underline{1}_{jl}(10)$은 벡터 $\underline{1}$에서 j번째 원소와 l번째 원소 만 1에서 0으로 변환한 벡터를 의미한다) 식(3.7)에 의해 부분실험을 설계하여 필요한 처리조합을 결정하게 된다.

이런 경우 $\underline{a} = \underline{0}$ 인 경우의 처리조합들은 [정리 3.1]에 의해 이미 Ψ_i에 포함되어 있게 된다. 그리고 [정리 3.2]에 의해 $\underline{d} = \underline{1}_{jl}(10)$로 설계되는 3개의 처리조합 중 하나의 처리조합은 이미 Ψ_i에 있으므로, 최대 2개의 처리조합이 필요하게 된다. 그러나 어떤 처리조합이 이미 전 단계에서 추가 되었다면, 필요한 처리조합은 2개 이하가 될 수도 있다. 그리고 이렇게 결정된 처리조합을 추가하여 식(3.10)과 유사한 방법으로 가설에 대한 제곱합을 계산하여 검정통계량을 유도할 수 있게 된다.

인자 F_i에 대하여 식(3.13)의 가설 H_5가 기각되고 계속하여 인자 F_i가 F_j, F_l 이외의 다른 인자(예를 들어 F_m) 하고만 교호작용을 갖는지에 대한 가설도 식(3.7)에서 $\underline{a} = \underline{0}$, $\underline{d} = \underline{1}_{jlm}(10)$로 하여 추가할 처리조합을 결정하면, 위와 유사한 방법으로 처리조합을 추가하여 가설검정을 수행할 수 있게 된다.

이렇게 인자 F_i에 대하여 유의한 교호작용을 모두 파악할 때 까지 축차적으로 필요한 처리조합을 추가하면서 분석한 후, 다른 인자에 대해서도 계속하여 유의한 교호작용을 검출할 때 추가적으로 필요한 처리조합을 결정할 수 있게 된다.

4. 예제

예를 들어 인자의 수가 $t = 4$인 경우, <표 1>에서와 같이 resolution Ⅳ foldover 부분실험법을 설계한 후, 각 처리조합에서 관측된 자료를 이용하여 각각의 인자에 대하여 식(2.9)와 식(2.10)의 가설을 분석한 결과, 교호작용들은 세 개의 인자 F_1, F_2, F_4 사이에 존재할 수 있는 것으로 파악되었다고 하여보자. 그리고 계속하여 유의한 교호작용을 검출하고자 할 때 추가적으로 필요한 처리조합을 결정하는 방법을 예시하면 다음과 같다.

먼저 인자 F_1이 F_2와 교호작용을 갖고 있는지에 대하여 먼저 식(3.9)와 같은 가설 H_3를 검정하기 위하여 추가하여할 처리조합을 결정하기 위해서는, 식(3.7)에서 $\underline{a} = \underline{1} = (1,1,1)'$, $\underline{d} = \underline{1}_2(10) = (0,1,1)'$로 설정하게 된다. 그러면 $B_1\underline{x} = \underline{1}$을 만족하는 세 개의 처리조합 $\underline{x} = (0,1,1,1)', (1,1,1,1)', (2,1,1,1)'$은 이미 설계한 <표 1>의 resolution Ⅳ부분실험법에 포함되어 있고, $B_1\underline{x} = (0,1,1)'$을 만족하는 세 개의 처리조합 $\underline{x} = (0,0,1,1)', (1,0,1,1)', (2,0,1,1)'$ 중 $(1,0,1,1)'$은 이미 <표 1>의 부분실험법에 포함되어 있으므로 이를 제외한 나머지 두 개의 처리조합을 추가하면 된다.

이렇게 새로 추가된 두개의 처리조합을 이용하여 가설 H_3를 검정한 결과, H_3가 채택되면 인자 F_1은 F_2와 교호작용이 없는 것으로 판단하고, 인자F_1은 F_4와 교호작용을 갖는지에 대한 가설 H_3를 설정하고 이를 분석하는데 필요한 처리조합을 유사한 방법으로 결정하게 된다.

한편 인자 F_1과 F_2에 대한 가설 H_3가 기각된 경우에는, 계속하여 인자 F_1은 F_2하고만 교호작용을 갖는지에 대하여 식(3.12)와 같은 가설 H_4를 설정하여 분석하게 된다. 가설 H_4를 분석하는데 필요한 처리조합을 결정하기 위해서는 앞에서 고찰한 바와 같이 식(3.7)에서 $\underline{a} = \underline{0}$으로 하고 $\underline{d}$는 가설 H_3를 검정할 때와 같이 $\underline{d} = \underline{1}_2(10) = (0,1,1)'$

으로 설정하면 된다. 이런 경우, $B_1\underline{x}=\underline{0}$을 만족하는 세 개의 처리조합 $\underline{x}=(0,0,0,0)'$, $(1,0,0,0)'$, $(2,0,0,0)'$은 이미 설계한 <표 1>의 부분실험법에 포함되어 있으므로, 가설 H_4를 분석하는 데는 처리조합을 새롭게 추가할 필요가 없게 된다.

인자 F_1과 F_2에 대하여 가설 H_4가 기각된 경우, 계속하여 인자 F_1이 F_2 뿐만 아니라 더 나아가 F_4하고만 교호작용을 갖는지에 대하여 식(3.13)과 같이 H_5를 설정하여 분석하고자 하는 경우에는, 식(3.7)에서 $\underline{a}=\underline{0}$으로 하고 $\underline{d}=\underline{1}_{24}(10)=(0,1,0)'$으로 설정하면 된다. 이런 경우 $B_1\underline{x}=\underline{0}$을 만족하는 세 개의 처리조합은 이미 <표 1>의 부분실험법에 포함되어 있고, $B_1\underline{x}=\underline{d}=(0,1,0)'$을 만족하는 세 개의 처리조합 $\underline{x}=(0,0,1,0)',(1,0,1,0)'$, $(2,0,1,0)'$ 중 $(0,0,1,0)'$은 이미 <표 1>의 부분실험법에 포함되어 있으므로 나머지 두 개의 처리조합만 추가하면 H_5를 분석할 수 있게 된다.

이와 같이 인자 F_1에 대하여 축차적으로 가설을 설정하여 검정에 필요한 처리조합을 추가하면 인자 F_1을 포함하고 있는 유의한 교호작용을 검출할 수 있게 된다. 그리고 더 나아가 인자 F_2 및 다른 인자에 대해서도 분석이 필요한 경우, 이와 유사한 방법으로 필요한 가설을 설정하고 처리조합을 추가하면서 분석하면, 유의한 주효과 뿐만 아니라 유의한 교호작용을 효과적으로 검출할 수 있게 된다. 위와 같이 각 인자에 대하여 어떤 교호작용이 존재하는지에 대한 필요한 가설 검정을 축차적으로 수행하고자 할 때 추가하여야할 처리조합을 정리 예시하면 <표 2>와 같다.

참고로 위와 같이 교호작용효과에 대하여 여러 가지 가설검정에 추가하여야할 처리조합을 결정하고자 할 때, 다양한 방법이 사용될 수도 있다. 예를 들어 식(3.9)과 같은 가설 H_3를 검정하여 인자 F_1이 F_2와 교호작용을 갖고 있는지를 분석하는데 필요한 처리조합을 결정하고자 할 때, 우리는 식(3.7)에서 $\underline{a}=\underline{1}=(1,1,1)'$, $\underline{d}=\underline{1}_2(10)=(0,1,1)'$로 설정하였다. 그러나 식(3.7)에서 정의된 바와 같이, $\underline{a}$와 $\underline{d}$에서 $a_j \neq d_j$ 이고 $a_k = d_k$ ($k \neq j$ 인 경우)의 성질을 만족하면 되므로, $\underline{a}=\underline{0}=(0,0,0)'$, $\underline{d}=\underline{0}_2(01)=(1,0,0)'$과 같이 설정할 수도 있다. 이런 경우 $B_1\underline{x}=\underline{d}=(1,0,0)'$을 만족하는 3개의 처리조합 $\underline{x}=(0,1,0,0)'$, $(1,1,0,0)'$, $(2,1,0,0)'$중에서 $(0,1,0,0)'$은 처음 설계된 부분실험법에 이미 포함되어 있으므로 역시 2개의 처리조합만 추가하면 된다.

이렇게 $\underline{a}$와 $\underline{d}$를 설정한 경우 인자 F_1과 F_2에 대한 가설 H_4를 검정하고자 할 때는, 식(3.7)에서 $\underline{a}=\underline{1}$, $\underline{d}$는

<표 2> 인자의 수가 4개이고, F_1, F_2, F_4 인자의 교호작용 분석에 추가할 처리조합의 예

분석대상 인자	축차적으로 분석하고자 하는 가설	식(3.7)의 $\underline{a}$ 와 $\underline{d}$		추가할 처리 조합	새롭게 추가할 지 여부
		$\underline{a}$	$\underline{d}$		
F_1	(1)H_3 :인자 F_1과 F_2는 교호작용이 없다	$(1,1,1)'$	$(0,1,1)'$	$(0,0,1,1)'$ $(2,0,1,1)'$	2개 모두 새롭게 추가
	(2)H_4 : F_1의 교호작용이 있는 경우, F_2하고만 교호작용을 갖는다	$(0,0,0)'$	$(0,1,1)'$	$(0,0,1,1)'$ $(2,0,1,1)'$	(1)의 가설을 검정할 때 추가하는 처리조합과 동일
	(3)H_5 :F_1의 교호작용이 있는 경우, F_2, F_4하고만 교호작용을 갖는다	$(0,0,0)'$	$(0,1,0)'$	$(1,0,1,0)'$ $(2,0,1,0)'$	2개 모두 새롭게 추가
	(4)H_3 :인자 F_1과 F_4는 교호작용이 없다	$(1,1,1)'$	$(1,1,0)'$	$(0,1,1,0)'$ $(2,1,1,0)'$	2개 모두 새롭게 추가
	(5)H_4 :F_1의 교호작용이 있는 경우, F_4하고만 교호작용을 갖는다	$(0,0,0)'$	$(1,1,0)'$	$(0,1,1,0)'$ $(2,1,1,0)'$	(4)의 가설을 검정할 때 추가하는 처리조합과 동일
F_2	(6)H_3 :인자 F_2와 F_4는 교호작용이 없다	$(1,1,1)'$	$(1,1,0)'$	$(1,0,1,0)'$ $(1,2,1,0)'$	$(1,0,1,0)'$은 (3)의 가설을 검정할 때 이미 추가되었음
	(7)H_3 : F_2의 교호작용이 있는 경우, F_4하고만 교호작용을 갖는다.	$(0,0,0)'$	$(1,1,0)'$	$(1,0,1,0)'$ $(1,2,1,0)'$	(6)의 가설을 검정할 때 추가하는 처리조합과 동일

H_3를 검정할 때와 같이 $\underline{d}=\underline{0}_2(01)=(1,0,0)'$로 설정하면 처리조합을 추가할 필요가 없게 된다.

다른 방법으로는 인자 F_1과 F_2에 대하여 식(3.9)의 H_3를 검정하고자 할 때는

$\underline{a}=\underline{2}=(2,2,2)'$, $\underline{d}=\underline{2}_2(20)=(0,2,2)'$와 같이 설정할 수도 있으며, 식(3.10)의 H_4에 대해서는$\underline{a}=\underline{0}$, $\underline{d}=(0,2,2)'$로 설정하면 된다.

이와 같이 다양한 가설을 검정하는데 추가하여야할 처리조합을 결정할 때는, 처리조합들에 대한 실험비용이나 실험의 편리성 등을 비교하면서 식(3.7)에서 $\underline{a}$와 $\underline{d}$를 적절하게 결정할 수도 있다.

5. 결론

일반적인 요인 배치법에서 해상도인 resolution 값이 커짐에 따라 부분실험법을 설계하는데 필요한 처리조합의 수인 실험크기는 현실적으로 수용할 수 없을 정도로 커지게 된다. 특히 resolution Ⅳ 부분실험법은 인자의 수가 비교적 많은 경우 주효과를 분석하면서 2-인자 교호작용효과가 존재할 수 있는 인자들을 파악하는데 효과적으로 사용될 수 있으며, 주효과와 교호작용이 존재할 수 있는 인자들을 선별하는 screening 설계법이나 반응표면 분석과 같은 모형에서 흔히 응용된다.

그러나 resolution Ⅳ 부분실험법에서 유의적인 2-인자 교호작용들을 검출하기 위해서는 처리조합을 추가하여야 하며, 본 논문에서는 3-수준계 실험에서 Anderson과 Thomas(1979)에 의해 제시된 foldover기법을 사용하여 설계되는 resolution-Ⅳ 부분실험법의 통계적 구조를 이론적으로 고찰하여 유의한 교호작용을 검출하고자 할 때 추가하여야 할 처리조합을 결정하는 효과적인 방법과 가설검정을 비롯한 분석방법을 제시하였다.

본 연구에서는 제시한 방법은 축차적으로 가설을 설정하면서 처리조합을 추가하는 방법이므로, 여러 가설들을 검정하는데 따른 1종 오류의 관리 문제뿐만 아니라 처리조합을 추가하는데 수반되는 실험실시의 문제와 비용문제 등을 고려하면, 인자의 수에 비해 유의한 교호작용의 수가 작은 경우 효과적으로 사용될 수 있다. 특히 본 연구에서는 교호작용이 존재할 수 있는 인자를 선별하는 과정과 그리고 유의한 교호작용을 검출하는데 필요한 다양한 가설에 검정방법을 제시하고 있으며, 본 연구에서 제시한 방법이 효과적으로 응용되기 위해서는 몇 가지 문제점에 대한 연구를 언급하고자 한다.

먼저 본 연구에서 제안한 다양한 가설에 대한 검정통계량을 도출하는데 있어서 일반적인 F-통계량의 분모로 사용될 수 있는 실험오차의 분산에 대한 변동을 산출하는 통계적인 방법도 계속 연구되어야할 과제이며, 이에 대해서는 resolution Ⅳ 부분실험법을 분석하는 방법으로 Kim(2000)이 제시한 방법이 사용될 수도 있을 것이다.

그리고 resolution Ⅳ 부분실험법을 일차적으로 분석한 결과, 교호작용이 존재할 수 있는 인자들의 수가 많은 경우, 그 다음 단계인 축차분석에서 본 연구에서 제시한 방법을 적용하여 추가하여야할 처리조합을 결정하고자 할 때, 처리조합의 수를 최소화 할 수 있는 체계적인 분석 방법에 대한 연구도 또한 필요하다고 하겠다. 그리고 축차 분석단계에서 본 논문에서 제시한 다양한 가설을 연속적으로 검정하는데 있어서 오류율을 관리하는 방법과, 그에 따른 유의수준의 결정 방법 등 세부적인 가설검정 방법에 대한 연구도 앞으로의 연구과제로 제안하고자 한다.

참고문헌

[1] Anderson, D. A., and Thomas, A. M.(1979), "Near Minimal Resolution Ⅳ Designs for the s^n Factorial Experiment", *Technometrics*, vol. 21, pp 331-336.

[2] Anderson, D. A., and Thomas, A. M.(1980), "Weakly Resolvable Ⅳ.3 Search Designs for the p^n Factorial Experiment", *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 4, pp. 299-312.

[3] Box, G. E. P., and Hunter, J. S. (1961), "The 2^{k-p} Fractional Factorial Designs Ⅰ", *Technometrics*, vol. 3, pp. 311-351.

[4] Box, G. E. P., and Wilson, K. B. (1951), "On the Experimental Attainment of Optimum Conditions", *Journal of Royal Statistical Society, Ser. B* vol.13, pp. 1-45.

[5] John, P. W. M.(1962), "Three-quarter Replicate of 2^n Designs", *Biometrics*, Vol. 18, pp.172-184.

[6] Kim, S. I.(2000), "Testing on the Existence of Interaction Effects in 3^t Resolution Ⅳ Factorial Experiments", *Journal of the Korean Society for Quality Management*, Vol. 28, pp.59-68.

[7] Margolin, B, H.(1969), "Resolution Ⅳ Fractional

Factorial Designs", *Journal of Royal Statistical Society, Ser. B* vol.31, pp.514-523.

[8] Montgomery, D. C., and Runger, G. C. (1996), "Fold overs of 2^{k-p} Resolution IV Experimental Designs", *Journal of Quality Technology*, Vol.28, pp.446-450.

[9] Raghavarao, D. (1971), *Construction and Combinatorial Problems in Design of Experiments*, Wiley, New York.

[10] Searle, S. R. (1971), *Linear Models*, Wiley, New York.

[11] Webb, S. R.(1968), "Non-orthogonal Designs of Even Resolution", *Technometrics*, vol. 10, pp 291-300

2009년 11월 25일 접수, 2009년 12월 18일 수정, 2009년 12월 22일 채택