

지반의 동결조건을 고려한 열전도 구성방정식과 유한요소해석

Heat Transfer Equation and Finite Element Analysis Considering Frozen Ground Condition the Cyclic Loading

김 영 석¹ Kim, Young-Seok

강 재 모^{2*} Kang, Jae-Mo

홍 승 서³ Hong, Seung-Seo

김 광 진⁴ Kim, Kwang-Jin

ABSTRACT

When the ground temperature drops below 0°C, wet soils expand due to the ice formation in their porous space. This results in frost heave which causes structural stability problems. Frost heave is attributed by several factors such as physical soil properties and heat transfer including pore water phase change. Due to the complex physical phenomena, reliable and verified multi-dimensional numerical models for frost heave problems are still in a research stage.

This study presents an efficient and simple method of overcoming numerical problems associated with sudden jump of heat capacity due to the phase change from water to ice in the pore space. This paper proposes heat transfer equation and finite element method when the saturated soils or porous rocks are subjected to freezing. Numerical analyses using the proposed method agree well with the known closed form solution and the laboratory test results.

요 지

동결기 온도가 영하로 떨어짐에 따라서 지표면 부근의 수분을 포함한 흙은 공극속의 수분이 얼음으로 변하면서 부피가 팽창하고, 이렇게 팽창된 지반은 주변 구조물에 영향을 미쳐 지반 구조물의 안전에 위협한 영향을 초래할 수 있다. 동상현상은 토립자, 간극수, 공기로 구성된 다상(multi phase) 구조 속에서 동결이 형성됨에 따른 수분의 이동과 수분이 얼음으로의 상변화(phase change) 등 다변수의 복합적인 물리적 현상을 포함하고 있기 때문에 현재까지 다차원 수치해석에 구성방정식으로 사용할 수 있는 검증되고 신뢰성 있는 모델은 아직도 연구 단계에 있다.

본 논문에서는 간극수의 상변화에 따라 갑작스러운 열용량 증대로 발생하는 수치해석상의 문제를 극복할 수 있는 효율적인 간편식을 유도하고, 포화된 토사나 다공성 암반이 동결할 때의 거동을 재현할 수 있는 열전도 구성방정식과 해석법을 제안하였다. 제안된 식을 사용한 수치해석 결과는 알려진 이론해 및 실내 모형시험 결과와 잘 일치하였다.

Keywords : Frost heave, Heat transfer, Phase change, Finite element analysis, Ground freezing

1. 서 론

동결기 온도가 영하로 떨어짐에 따라서 지표면 부근의 수분을 포함한 흙은 공극속의 수분이 얼음으로 변하면서 부피가 팽창한다. 이와 같이 고정된 수분이 얼음으로 상이 변하면, 그림 1에서 보는 바와 같이 9%의 결빙팽창을 초

래한다. 동결면(freezing front)이 지하수와 접해있고 동결 속도가 서서히 진행되는 비교적 미립자로 구성된 동상성 흙(frost susceptible soil)일 경우에는 지하수가 동결면 속으로 흡입되어 그림 2에서 보는 바와 같은 빙정(ice lens)이 형성된다. 이와 같은 빙정은 시간이 경과됨에 따라 동결면을 따라 계속 발달되고, 이에 따른 흙의 부피 팽창을

1 정회원, 한국건설기술연구원 수석연구원 (Member, Senior Researcher, KICT)

2* 정회원, 한국건설기술연구원 전임연구원 (Member, Researcher, KICT, E-mail: jmkang@kict.re.kr)

3 정회원, 한국건설기술연구원 전임연구원 (Member, Researcher, KICT)

4 정회원, 컴텍리서치, 대표 (Member, President, Comtec Research)

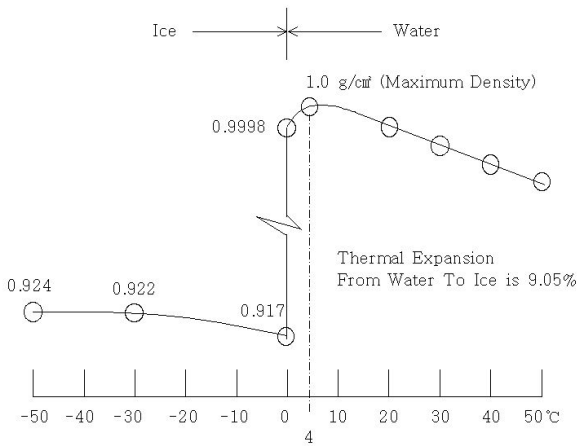


그림 1. 상변화에 의한 물의 밀도

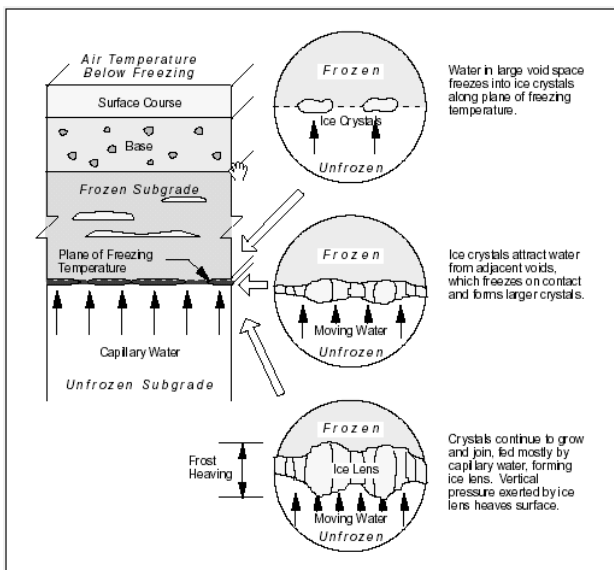


그림 2. 빙정(Ice Lens) 형성(WAPA, 2002)

동상(frost heave)이라 부른다. 지반의 동상이 토압이나 주변 구조물 등에 의해 구속을 받을 경우에 동상력(frost heaving force)이 발생하여, 도로 포장, 지하 매설관, 파이프 라인, culvert, 교각 등 인접 지반 구조물의 안전에 위협하는 영향을 주는 동결하중으로 작용된다. 따라서 동상력을 구현하는 신뢰성 있는 열역학적(thermomechanical) 해석은 동상에 위협받는 기존 구조물의 안전성 검토는 물론 향후 구조물 설계 시 반영되어 안정된 구조물 설계를 수행 하는데 도움이 된다.

국내에서는 동결 지반의 공학적 특성을 파악하기 위한 실험적 연구가 Christ et al.(2009)에 의해 이루어 졌고, 동토지역 흙 시료의 기본적인 동결 거동을 확인하기 위한 실험적 연구도 김영진 등(2008)에 의해 수행된 바 있지만, 기존의 실험결과를 바탕으로 신뢰성 있는 열해석을 통한

수치해석 기법에 대한 연구는 이루어 진 바가 없으며, Comini et al.(1974)가 제안한 엔탈피(enthalpy) 구배 변화를 바탕으로 한 열용량 평균화 방법도 실제 수치해석에 적용하여 효율적으로 활용하기에는 어려움이 있는 실정이다.

따라서 본 논문에서는 지반동결 시 수치해석을 위한 정확한 열전달 해석 방안으로 간극수의 상변화에 따라 갑작스러운 열용량 증대로 발생하는 수치해석상의 문제를 극복할 수 있는 효율적인 간편식을 유도하고, 실내 동상실험을 통한 실험결과와 동결 거동에 의한 열해석(thermal analysis) 결과를 비교 분석 하여 수치해석 모델의 신뢰도를 검증하였다.

2. 열전도 해석

2.1 열전도 유한요소 방정식

비정상(transient) 열전도는 유한요소의 형상함수를 이용하여 다음과 같이 선형 미분방정식으로 표현할 수 있다 (Zienkiewicz, 1971).

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{Q\} \quad (1)$$

여기서, $[C]$: 열용량 행렬(Heat capacity matrix)

$[K]$: 전도 행렬(Conductivity matrix)

$\{Q\}$: 열유량 벡터(Heat flux input vector)

$\{T\}$: 온도 벡터(Temperature vector)

$\{\dot{T}\}$: 온도경사 벡터(Temperature rate vector)

온도와 열흐름(heat flux)이 시간 t 와 $t+\Delta t$ 사이에서 선형으로 변화한다고 가정하고, 시간 $t+\Delta t$ 에서 에너지 평형방정식을 세우면 다음과 같은 2단계 점화식(two-time level recurrence formula)을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[C] + \theta[K]\right)\{T_{t+\Delta t}\} = \left(\frac{1}{\Delta t}[C] - (1-\theta)[K]\right)\{T_t\} + (1-\theta)\{Q_t\} + \theta\{Q_{t+\Delta t}\} \quad (2)$$

여기서, $\theta = 0$; Euler scheme

$= 1/2$; Crank-Nicolson scheme

$= 2/3$; Galerkin scheme

$= 1$; Backward difference scheme

θ 값에 따른 각 방법의 안정 및 정확성은 Zienkiewicz (1971)와 Donea(1974)에 의해 연구된 바 있다.

Lees(1966)는 식 (3)과 같이 3단계 점화식(three-time level recurrence formula)을 제안하였고, Comini et al. (1974)와 Hsu & Pizey(1981)는 이 방법을 상전이(phase change) 열전도 유한요소식에 적용하여 만족스런 해를 구하였다.

$$\left(\frac{1}{2\Delta t} [C] + \frac{1}{3} [K] \right) \{ T_{t+\Delta t} \} = -\frac{1}{3} [K] \{ T_t \} + \left(\frac{1}{2\Delta t} [C] - \frac{1}{3} [K] \right) \{ T_{t-\Delta t} \} + \{ Q_t \} \quad (3)$$

3단계 점화식(three-time level recurrence formula) 3의 장점은 시간 $t-\Delta t$ 와 $t+\Delta t$ 의 중간인 t 에서 평형방정식을 세우므로 비선형 열전도 문제에서 반복계산(iteration)을 할 필요가 없으며, 처음 계산이 시작할 때 추가로 필요한 온도벡터 $\{T_t\}$ 는 식 (1)의 2단계 점화식(two-time level recurrence formula)을 사용하여 구할 수 있다.

2.2 상전이와 동결관 모델링

물 또는 포화된 토사가 동결할 때 상전이(phase change)에 필요한 잠열(latent heat)은 동결온도에서 열용량(heat capacity)의 갑작스런 증가로 나타낼 수 있다. 이와 같은 상전이에 따른 수치해석 모델의 갑작스런 열용량 증가를 극복하기 위하여 Comini et al.(1974)는 식 (4)와 같이 온도구배 변화에 대한 엔탈피(enthalpy) 구배변화를 바탕으로 한 열용량 평균화 방법을 제안하였다. 2차원 문제에서 상전이 시 평균 열용량은 다음과 같이 구해진다.

$$\langle \rho C \rangle_{x,y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial x} / \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} / \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4)$$

여기서, 엔탈피 H 는 열용량을 온도에 관해 적분한 것이다.

식 (4)의 열용량 평균화 방법은 시간에 대한 이력이 직접 고려되지 않고 온도와 엔탈피 구배를 평균화하기 때문에 해석 시 시간 간격(time step)이 클 경우에는 만족할만한 해석결과를 구하기 어렵다. 따라서, 온도 변화에 대한 엔탈피 변화의 이력을 바탕으로 보다 단순하고 효율적인

열용량 평균화 방법인 식 (5)를 제안하고자 한다.

$$\langle \rho C \rangle = \frac{H_t - H_{t-\Delta t}}{T_t - T_{t-\Delta t}} \quad (5)$$

여기서, H_t 와 T_t 는 시간 t 에서 엔탈피와 온도이고 $H_{t-\Delta t}$ 와 $T_{t-\Delta t}$ 는 시간 $t-\Delta t$ 에서 엔탈피와 온도를 나타낸다. 식 (4)와 (5)를 비교하면 식 (4)에서는 평균화를 위하여 별도로 온도와 엔탈피 구배를 계산하지만 제안된 식 (5)에서는 이미 계산된 온도와 엔탈피를 이용하여 평균화하므로 계산시간을 단축할 수 있다.

다음으로 포화된 지반의 동결 시 사용되는 동결관 모델링의 실용적인 적용을 위해 아래 그림 3에서 보는바와 같은 포화된 주변 지반으로부터 동결관으로 전달되는 열흐름은 식 (6)과 같이 근사화 시킬 수 있다.

$$Q = Ah(T_o - T) \quad (6)$$

여기서, A = 접촉부 단면적(Area of surface of contact)

h = 열전달 계수(Heat transfer coefficient)

$T = (T_l + T_k) / 2$

$T_o = (T_i + T_j) / 2$

식 (6)의 동결관으로 열흐름 메커니즘을 고려하기 위해서는 전도 행렬(conductivity matrix) $[C]$ 와 열유량 벡터(heat flux vector) $\{Q\}$ 를 수정해야 하며 동결관 내의 물질의 온도는 식 (7)과 같이 근사화 할 수 있다.

$$T_j = [(1 - \gamma)T_i + \gamma(T_l + T_k)] / (1 + \gamma) \quad (7)$$

여기서, $\gamma = Ah / 2 \cdot \rho V c$

ρ = 유체의 밀도(Mass density of the fluid)

c = 유체의 비열(Specific heat of the fluid)

V = 유체 흐름(Flow of the fluid(volume/time))

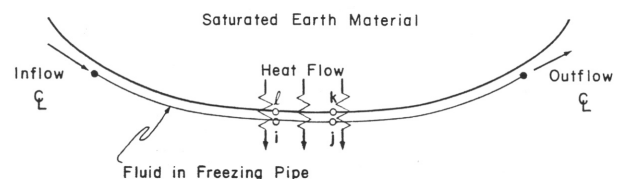


그림 3. 포화된 주변 지반에서 동결관으로 전달되는 열흐름 모식도

3. 동상시험 열전도 수치해석

3.1 상전이(phase change) 수치해석모델 검증

앞의 2장 열전도 해석에서 상전이에 대한 잠열의 수치 해석 모델로 단순하고 효율적인 열용량 평균화 방법인 식 (5)를 제안하였다. 여기서는 제안된 식 (5)를 사용한 수치 해석 결과를 이론해와 비교하여 정확성을 검증하고자 한다.

본 검증에서는 초기온도 10°C인 무한대의 길이를 가진 일차원 물기둥이 그 표면에서 갑자기 -20°C로 온도가 떨어졌을 때 물기둥에 따라 진행되는 동결면과 온도분포를 수치해석하여 그 결과를 확인하였다.

수치해석 프로그램은 2차원 비선형 열전도 유한요소 프로그램인 SMAP-T2를 사용하여 수행하였다. SMAP-T2의 주요기능은 2차원 평면 또는 축대칭 문제를 모델링할 수 있고, Phase Change에 의한 잠열이 고려된 비선형 열전도율과 열용량을 사용하여 포화 또는 불포화된 토사 및 다공질 암반의 열전도 해석이 가능하고, 경계조건으로 Prescribed Temperature, Prescribed Heat Flow, 그리고 Force Convection을 사용할 수 있다. 본 상전이 검증해석을 위하여 SMAP-T2에 식 (3)의 3단계 점화식 방법을 적용하였고 유한요소의 길이는 0.0125m 그리고 시간 간격은 200초를 사용하였다. 사용된 재료의 물성값은 다음과 같다.

$$\text{동결(Frozen)} : k = 2.22 \text{ W/m}^\circ\text{C}$$

$$\rho c = 1.762 \times 10^6 \text{ J/m}^3\text{-}^\circ\text{C}$$

$$\text{비동결(Unfrozen)} : k = 0.556 \text{ W/m}^\circ\text{C}$$

$$\rho c = 4.226 \times 10^6 \text{ J/m}^3\text{-}^\circ\text{C}$$

$$\text{잠열(Latent Heat)} : \lambda = 338 \times 10^6 \text{ J/m}^3$$

상변화 시간 간격 가정치(Assumed Width of Phase-Change Interval) : $2\Delta T = 0.5^\circ\text{C}$

그림 4는 5, 20, 40 그리고 80시간 경과 후 물기둥의 온도분포를 나타낸 것으로 Luikov(1968)의 이론해와 비교하였다. 그림 4에서 보는 바와 같이 제안된 식 (5)를 사용한 수치해석 결과는 이론해와 잘 일치하고 있다.

3.2 지하수가 공급되는 지반에 매설된 매설관의 열전도 수치해석

그림 5는 지하수가 공급되는 지반 내에 매설된 매설관

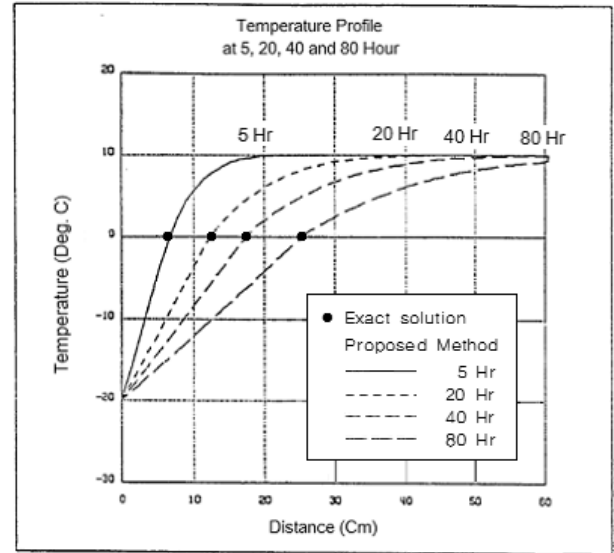


그림 4. 상전이(Phase change) 검증예제

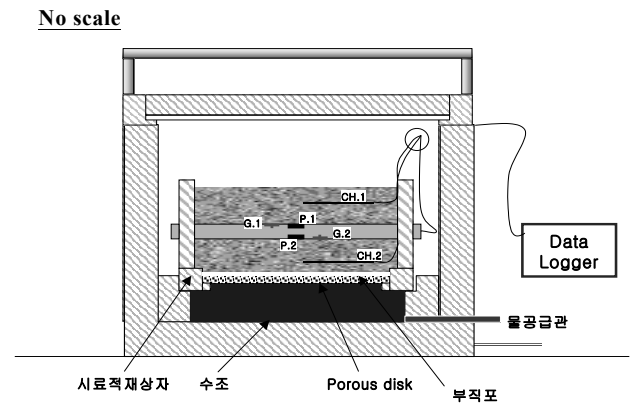


그림 5. 지하수 공급지반의 매설관 거동 시험장치

표 1. 대상시료의 시험 조건

조건	대상시료	건조단위중량(kN/m ³)	함수비(%)	비고
개방형	화강토	15.97	20	완전포화

의 개략도로 시험에 사용된 시료적재상자의 크기는 500 mm × 500 mm × 300 mm이고 강관은 직경이 60 mm로 시료의 중간 높이에 있고, 온도센서는 적재상자 중앙의 상·하부에서 5 cm 떨어진 위치에 고정되어 있다. 시료의 초기온도는 13°C, 시험기내 대기의 설정온도는 -17°C, 수조부의 물 온도는 4°C로 유지하며 시험이 수행되었으며, 대상 시료의 시험조건은 표 1과 같다.

실내실험의 결과는 그림 6과 같이 나타났다. 그림 6에서 CH.1과 CH.2는 각각 모형토조 상부와 하부에 위치한 thermistor의 시간에 따른 온도변화를 나타낸 것이고, water는 동상시험기에 공급되는 물의 온도 변화를 표시한 것이다. 또한 P.1과 P.2는 관 상하부에 작용하는 동상력을

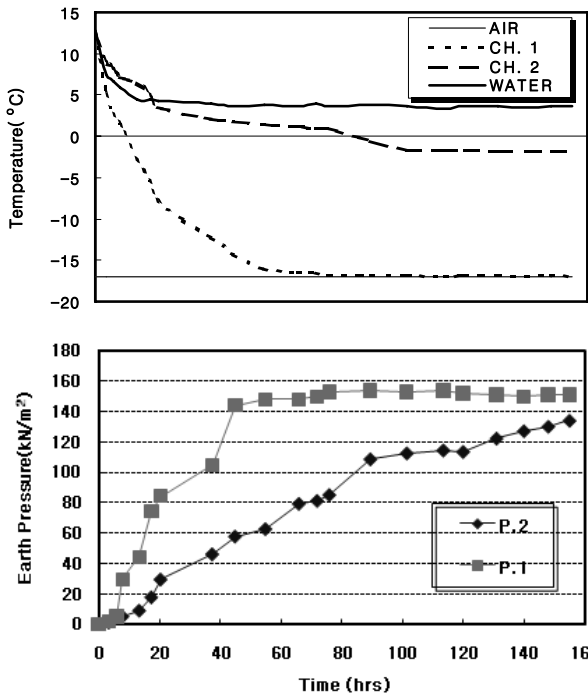


그림 6. 온도와 시간변화에 따른 토압 분포

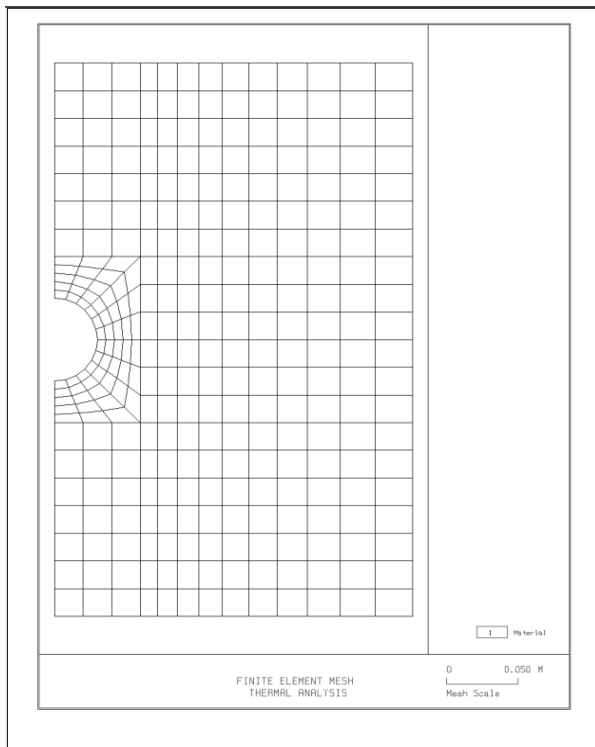


그림 7. 열해석(Thermal analysis)에 사용한 유한요소망

측정한 값이다.

실험결과 모형토조의 상부는 50시간 정도 경과 후 설정 온도까지 떨어짐을 알 수 있었고, 하부의 경우 수조부에서 공급되는 물의 영향으로 온도저하가 더디게 나타났다. 온도 변화와 연계하여 매설관 상하부에 작용하는 토압도 하

표 2. 해석에 사용된 흙 시료의 열적 특성

	동결 전	동결 후
열전도율(Thermal Conductivity, W/m-°C)	1,52	2,78
열체적용량(Volumetric Heat Capacity, J/m ³ -°C)	2,73 × 10 ⁶	1,90 × 10 ⁶
체적잠열(Volumetric Latent Heat, J/°C)		1,17 × 10 ⁸

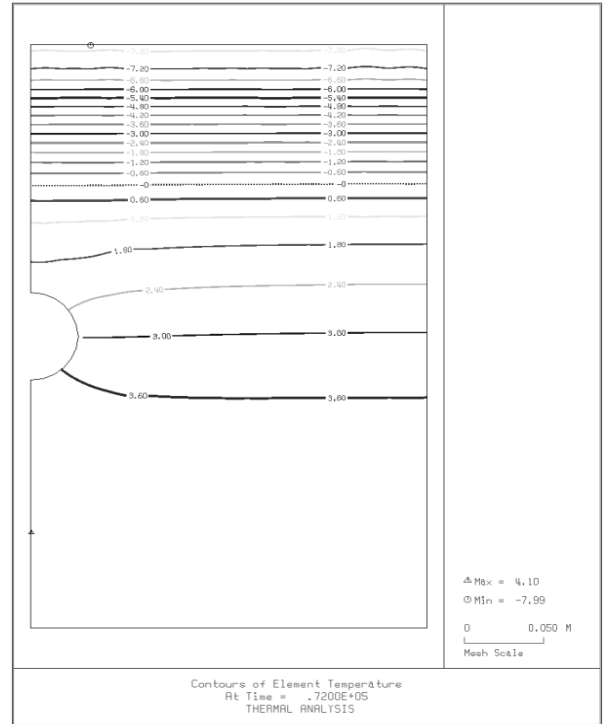


그림 8. 20시간 경과 후 온도분포도

부의 경우 토압증가가 완만하고 더디게 진행되는 것을 알 수 있었다.

본 실험과 비교를 위하여 수치해석을 실시하였으며, 열 전달 해석은 상용프로그램 SMAP-T2를 사용하여 수행하였다. 그림 7은 본 해석에 사용된 유한요소망으로 해석에 사용된 절점과 요소의 수는 각각 344, 302개 이다. 해석 모델은 대칭성을 고려하여 반 단면만 모델링하였다. 경계 조건으로 좌측 대칭면과 우측면은 단열면(Adiabatic Surface)으로 하였고, 대기에 접해 있는 상부 표면은 -17 °C 그리고 수조에 접해있는 하부는 4 °C를 유지하도록 하였다. 우측면은 강관 반경의 9배 만큼 떨어져 경계에 의한 영향을 미미하게 하였다.

본 해석에 사용된 흙시료의 열적 특성(Thermal Property)은 표 2와 같다.

그림 8~11은 해석결과 20, 40, 80, 160 시간 경과 후 온도 분포도를 나타내며 온도 분포는 강관에서 조금 떨어

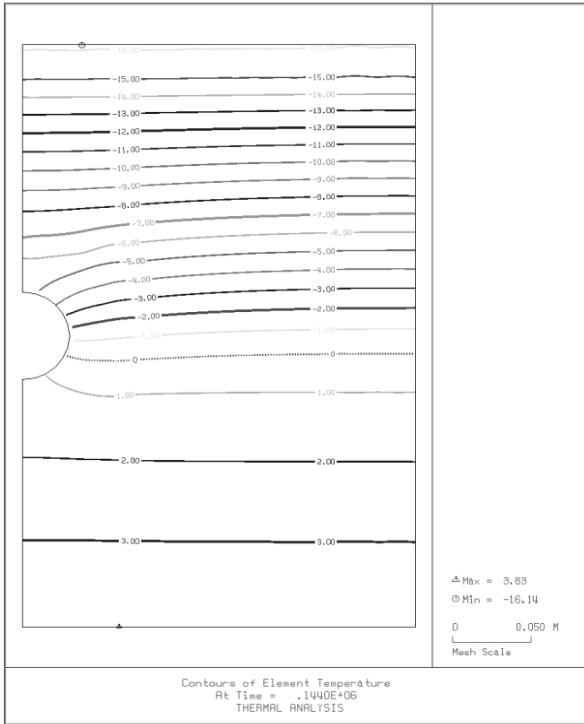


그림 9. 40시간 경과 후 온도분포도

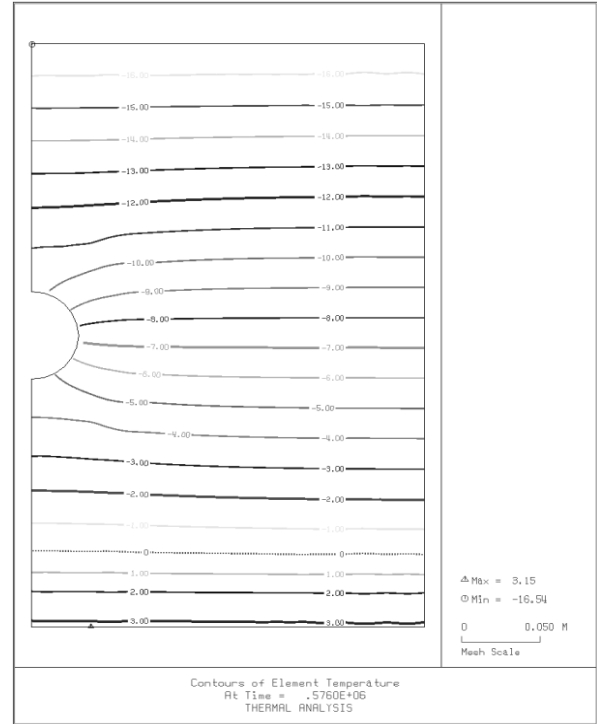


그림 11. 160시간 경과 후 온도분포도

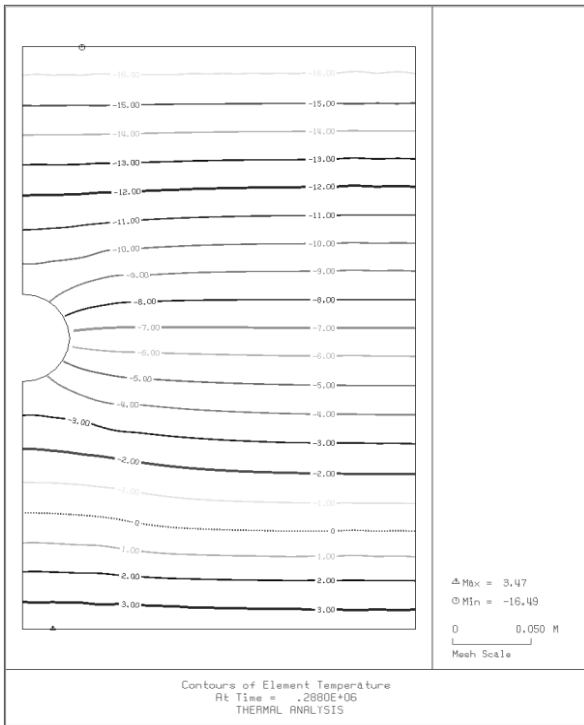


그림 10. 80시간 경과 후 온도분포도

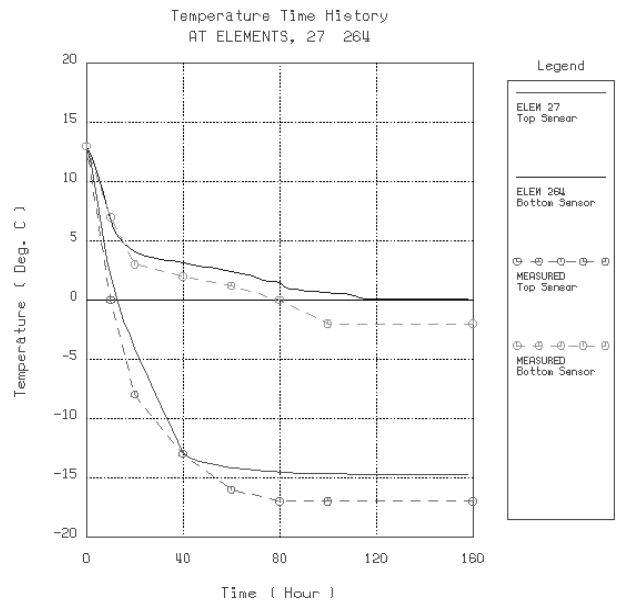


그림 12. 온도센서 위치에서 온도의 Time history 비교

저서는 거의 1차원에 가까운 분포상태를 나타내며 동결면의 하강은 처음 80시간까지는 현저하게 진행되지만 이후로는 매우 느린 속도로 이동됨을 보여준다.

그림 12는 온도 센서가 설치된 위치에서의 수치해석 결과와 측정치를 비교한 그래프로 대체적으로 같은 경향을

보여주고 있으며, 온도가 수렴된 상태에서는 측정값이 해석결과보다 약 2°C 정도 낮은 온도를 보여준다.

그림 13은 측벽에서의 수직으로 분포된 온도 변화로 대략 80시간 경과 후 온도 분포는 수렴된 상태이고 동결면을 기준으로 동결된 상부 흡과 비 동결된 하부 흡의 온도구배가 현저하게 상이함을 알 수 있다.

감사의 글

본 연구는 2008년 국토해양부의 R&D 연구과제인 “시베리아 동토지역 진출을 위한 미래건설 기술개발”과제와 2010년 한국건설기술연구원의 주요연구개발사업인 “극한지 하부구조 급속시공 플랫폼 기술 개발” 과제의 지원을 받았습니다.

참고문헌

1. 김영진, 신재원, 김현기 (2008), “남극 및 시베리아 흙의 동토공학적 분석”, 2008 한국지반공학회 학술발표회, pp. 894-904.
2. Christ, M., Kim, Y.C. and Park, J.B. (2009), “The Influence of Temperature and Cycles on Acoustic and Mechanical Properties of Frozen Soils”, *Journal of Civil Engineering, KSCE*, Vol.13, No.3, pp.153-159.
3. Comini, G., Del Giudice, S., Lewis, R.W. and Zienkiewicz, O.C. (1974), “Finite Element Solution of Non-Linear Heat Conduction Problems with Special Reference of Phase Change,” *International Journal of Numerical Methods for Engineering*, Vol.8, pp.613-624.
4. Donea, J. (1974), “On the Accuracy of Finite Element Solutions to the Transient Heat-Conduction Equation,” *International Journal of Numerical Methods for Engineering*, Vol.8, pp.103-110.
5. Hsu, T.R. and Pizey, G. (1981), “On the Prediction of the Fusion Rate of Ice by Finite Element Analysis,” *Journal of Heat Transfer*, Vol.103, pp.727-732.
6. Lees, M. (1966), “A Linear Three-Level Difference Scheme for Quasilinear Parabolic Equations,” *Maths. Comp.*, Vol.20, pp.516-522.
7. Luikov, A.V. (1968), *Analytical Heat Diffusion Theory*, Academic Press, New York.
8. Washington Asphalt Pavement Association (2002), *WAPA asphalt pavement guide*, WAPA, Washington.
9. Zienkiewicz, O.C. (1971), *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, London.

(논문접수일 2010. 8. 25, 심사완료일 2010. 9. 24)

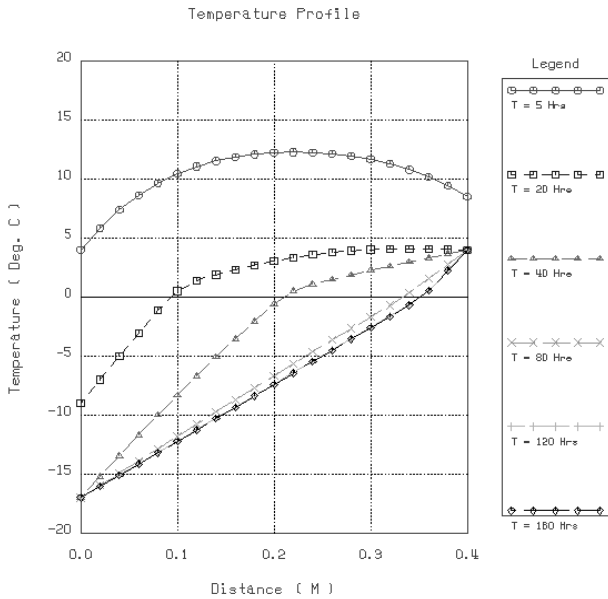


그림 13. 측벽을 따라 수직으로 분포되는 온도 Profile

4. 결론

본 논문에서는 포화된 토사나 다공성 암반이 동결할 때 열전도의 구성방정식과 유한요소 수치해석기법을 제안하였고 매설관 모형시험에서 열전달 부분인 thermal analysis 를 수행하여 시험결과와 비교하였으며, 그 결과는 다음과 같다.

- (1) 간극수의 상변화에 따라 갑작스러운 열용량 증대로 발생하는 수치해석상의 문제를 극복할 수 있는 새로운 모델을 제안하였다.
- (2) 동결에 따른 상전이(phase change) 수치해석 모델은 단순하고 효율적인 열용량 평균화 방법으로, 이론해와 비교하여 정확성을 검증하였으며, 상전이 현상을 재현할 수 있는 모델로 사용할 수 있을 것으로 판단된다.
- (3) 매설관 모형시험 결과와 수치해석결과의 비교 분석을 통해 유사한 결과를 도출함으로써, 본 모델을 이용해 실제 지반 거동에 대한 유사한 열적 해석 결과를 얻을 수 있을 것으로 판단된다.