

응력특이를 갖는 축방향 부재의 웨이블렛 급수해석

Wavelet Series Analysis of Axial Members with Stress Singularities

우 광 성† 장 영 민* 이 동 우** 이 상 윤**
Woo, Kwang-Sung Jang, Young-Min Lee, Dong-Woo Lee, Sang-Yun

요 지

푸리에 급수는 사인 곡선처럼 일정한 진폭으로 진동하는 정규파(wave)를 사용한다. 그래서 푸리에 급수에서 사용하는 함수는 진동수의 크기가 시간에 따라 변하지 않기 때문에 국부적인 영역에서 급작스런 진동이나 불연속성을 갖는 신호를 표현하기에는 한계가 있다. 그러나 이러한 푸리에 해석의 단점을 여러개의 적절한 웨이블렛의 선형조합에 의해 보완할 수 있는 것이 웨이블렛 급수해석이다. 시간에 집중되어진 웨이블렛의 작은 잔파(wavelet)를 사용함으로써 시간과 주기의 폭을 변화시킬 수 있기 때문에 유동적이고, 특이(singular)형상을 지닌 신호들을 보다 효율적으로 표현할 수 있다. 이 연구의 주요 목적은 웨이블렛 급수해석이라고 불리는 방법을 2계 편미분방정식으로 표현되는 1차원 축방향 부재에 웨이블렛 이론을 적용함과 동시에 유한요소법과 같은 수치해석법과의 비교를 통해 성능평가를 위해 제안되었다. 여러 형태의 웨이블렛 함수의 검토 후에 HAT 함수가 웨이블렛 및 스케일링 함수로 채택되었다. 등분포하중을 받는 경우의 축방향 부재해석에서 제안된 방법은 유한요소법과 같이 효율적임을 보이며, 특히 응력특이점에서는 더 정확한 값을 보였으며, 계산시간도 절약되는 장점을 얻을 수 있었다.

핵심용어 : 웨이블렛 급수해석, 웨이블렛 함수, 스케일링 함수, 응력특이점

Abstract

The Fourier series uses a vibrating wave that possesses an amplitude that is like the one of the sine curve. Therefore, the functions used in the Fourier series do not change due to the value of the frequency and that set a limit to express irregular signals with rapid oscillations or with discontinuities in localized regions. However, the wavelet series analysis(WSA) method supplements these limits of the Fourier series by a linear combination of a suitable number of wavelets. By using the wavelet that is focused on time, it is able to give changes to the range in the cycle. Also, this enables to express a signal more efficiently that has singular configuration and that is flowing. The main objective of this study is to propose a scheme called wavelet series analysis for the application of wavelet theory to one-dimensional problems represented by the second-order elliptic equation and to evaluate the performance of proposed scheme comparing with the finite element analysis. After a through evaluation of different types of wavelets, the HAT wavelet system is chosen as a wavelet function as well as a scaling function. It can be stated that the WSA method is as efficient as the FEA method in the case of axial bars with distributed loads, but the WSA method is more accurate than the FEA method at the singular points and its computation time is less.

Keywords : wavelet series analysis, wavelet function, scaling function, singular point

1. 서 론

웨이블렛 해석은 크게 웨이블렛 급수(wavelet series)와 웨이블렛 변환(wavelet transform)으로 나눌 수 있다. 웨이블렛 변환은 구조물의 동적응답에 의한 손상도를 예측하는 등의

연구사례가 있으나 웨이블렛 급수전개에 관한 구조공학 관련 연구들은 찾아보기 힘들다. 본 논문은 웨이블렛 급수와 관련된 논문이다. 웨이블렛 급수해석(WSA; wavelet series analysis)은 푸리에(Fourier)해석과 많이 닮아있다. 푸리에 해석은 어떠한 함수 $f(x)$ 를 분석할 때 sine wave나, cosine wave와 같은

† 책임저자, 종신회원 · 영남대학교 건설시스템공학과 교수
Tel: 053-810-2593 ; Fax: 053-810-4622
E-mail: kswoo@yu.ac.kr

* 한국농어촌공사 사업기획팀

** 영남대학교 건설시스템공학과 석사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2010년 4월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2010년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

단순한 정규과를 사용하기 때문에 복잡한 신호 분석에서는 적합하지 못하다. 다시 말하면, 국부적인 영역에서 급작스런 진동이나 불연속성을 갖는 신호를 표현하기에는 한계가 있다. 그러나, 웨이블릿 해석은 '시간'이라는 요소를 첨가한 웨이블릿 함수를 사용함으로써 푸리에 해석의 한계를 극복하고 다양한 스케일의 함수 분석이 가능하다. 즉, 웨이블릿 함수의 선형조합으로 복잡한 형상의 함수들을 수학적으로 보다 효율적으로 나타낼 수 있는 것이다. 또한 함수의 크기를 확대 또는 축소할 수 있는 기능인 스케일링과 웨이블릿의 공간 또는 시간상의 위치를 전이시킬 수 있는 변환 기능을 갖고 있어서 임의 불규칙과를 근사화할 수 있다. 예를 들면, 건물에 의한 도시의 스카이라인을 하나의 함수로 표현하기는 쉬운 일이 아니다. 그러나 웨이블릿 함수의 선형조합을 사용하면 가능하게 된다(강현배 등, 2001; 김충락 등, 1998; 이승훈 등, 2000; Sidney Burrus 등, 1998).

유한요소법은 수치해석의 한 분야로서 보간함수의 형태에 따라 결과값이 다를 수 있다. 본 논문은 그 보간함수에 웨이블릿 이론을 적용하여 웨이블릿 해석의 장점을 보이려고 한다. 예상되는 첫번째 장점은 웨이블릿 함수가 시간정보와 주파수정보를 동시에 가지고 있기 때문에 응력특이(stress singularity)문제에 대해 더 정확한 근사값을 제공할 것이라 생각한다. 왜냐하면 응력특이점 부근에서의 응력함수의 변화가 심하기 때문에 기존의 정규과로 응력장을 정의하기 보다는 잔파(wavelet)라고 불리는 웨이블릿 함수의 선형조합으로 표현하게 되면 보다 적은 수의 급수전개로 표현할 수 있게 된다. 또한 유한요소법은 컴퓨터에 의존한 계산법이라 할 수 있다. 요소가 많아질수록 행렬식의 크기가 커지기 때문에 컴퓨터 연산시간이 길어진다. 하지만 웨이블릿 이론을 사용함으로써 그 행렬식의 크기를 줄일 수 있는 것을 두번째 장점으로 꼽을 수 있다. 독특하고 합리적인 WSA는 수치해석 분야에 많은 장점을 가져올 것이라 본다. 본 논문에서는 2계 편미분방정식으로 표현되는 1차원 축방향 부재에 웨이블릿 이론을 적용함과 동시에 유한요소법과 같은 수치해석법과의 비교를 통해 WSA의 성능을 평가할 것이다. 여러 형태의 웨이블릿 함수의 검토 후에 HAT 함수가 채택되었으며 행렬식 계산은 MATH-CAD를 사용했다. 등분포하중을 받는 경우의 축방향 부재해석에서 제안된 방법은 유한요소법과 같이 효율적임을 보이고 있으며, 특히 응력특이점에서는 더 정확한 값을 보였으며 계산시간도 절약되는 장점을 얻을 수 있었다.

2. 웨이블릿 해석에 대한 수학적 기초

2.1 일반

웨이블릿 해석이나 푸리에 해석은 파(wave, wavelet)를 사용해 어떠한 신호나 함수를 표현하는 점에서는 닮아 있고 차이점으로는 푸리에 해석은 진동수의 양이 시간에 따라 변하지 않는 파(wave)를 사용하고 있고, 웨이블릿 해석은 보완된 잔파(wavelet)를 사용한다는 점이다. 다시 말하면 푸리에 해석은 사인 곡선처럼 같은 진폭으로 진동하는 파를 사용한다. 그래서 푸리에 해석에서 사용하는 함수는 진동수의 양이 시간에 따라 변하지 않기 때문에 신호들이 고정적이라는 것이다. 유동적인 신호를 파악하기 위해서는 진동수 양과 한정된 시간에 대한 지식이 필요하다. 이와 같은 단점들을 WSA가 해결 해 준다. 시간에 집중되어진 궤적의 작은 잔파를 사용하기 때문에 시간과 주기의 폭이 진폭의 고저에 따라 자유롭게 표현할 수 있다.

2.2 웨이블릿 급수

$L^2(R)$ 에 속하는 함수 ψ 가 있을 때, $\{\psi_{j,k}(x)\} = \{2^{j/2}\psi(2^jx - k), j, k \in Z\}$ 가 $L^2(R)$ 의 직교단위기저(orthogonal basis)가 되면 ψ 는 '직교단위 웨이블릿'이라 불린다. 즉, $\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{jl}\delta_{km}$ 이고, 모든 $f \in L^2(R)$ 일 때 2개의 매개변수(two-parameter system)를 갖는 웨이블릿 급수의 전개는 다음과 같다(강현배 등, 2001; 김충락 등, 1998; 이승훈 등, 2000; Sidney Burrus 등, 1998).

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(x) \tag{1}$$

여기서, 웨이블릿 계수(wavelet coefficient)는 식 (2)와 같이 정의된다.

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tag{2}$$

고주기 스펙트럼 정보를 얻기 위해서는 상대적으로 시간간격이 작아야 하며, 저주기 스펙트럼 정보를 얻기 위해서는 상대적으로 시간간격이 커야한다. 시간과 주기의 폭이 주기의 고저에 따라 자유롭게 움직일 수 있는 것이 중요하다. 웨이블릿 급수는 푸리에 급수와 많이 비슷하나 여기서 차이가 나는 것이다. 두 개의 매개변수를 가지고 있기 때문에 이러한 함수의 확장 또는 축소 기능(zoom-in and zoom-out)이 가능하다.

2.3 웨이블릿 함수에 의한 변위장

변위장에 대한 기초 근사식은 식 (3)과 같은 식으로 정의

되어질 수 있다.

$$u = \sum c_{j_0}(k) \phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(j,k) \psi_{j,k}(x) \quad (3)$$

$$\phi_{j_0,k}(x) = 2^{j_0/2} \phi(2^{j_0/2} x - k), \quad \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad (4)$$

여기서,

$\phi(x)$: 스케일링 함수(scaling function)로 신호를 압축 또는 확대시키는데 사용됨.

$\psi(x)$: 웨이블릿 함수(wavelet function)

$c(x), d(j,k)$: 계수(coefficients)

$j \in Z$: 스케일링 매개변수(scaling parameter)

$k \in Z$: 변환지수(translation index-controls spatial location)

j_0 : 초기 스케일링 매개변수(starting scale parameter)

$\phi_{j_0,k}(x)$ 의 표현에서 $2^{j_0/2}$ 는 스케일 j_0 에 무관하게 일정한 놈(norm)을 유지하게 도와준다. 일반적으로 $\phi_k(x)$ 로 이루어진 공간에 대한 스케일은 j_0 에 의존한다. 처음의 공간에서 $j_0 = 0$ 고, 이것을 스케일링 함수에 대입하면 $\phi_{j_0,k}(x) = \phi(x - k)$ 로 되며, 식 (3)에 대입하면 식 (5)와 같은 결과를 얻는다(강현배 등, 2001; 김충락 등, 1998; 이승훈 등, 2000; Sidney Burrus 등, 1998).

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) \phi(x - k) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(j,k) \psi_{j,k}(x) \quad (5)$$

스케일링 함수 $\phi_k(x) = \phi(x - k)$ 에 의해 이루어진 $L^2(R)$ 의 부분공간(subspace)은 $v_0 = \overline{\text{span}\{\phi_k(x)\}}$ 이고, ω_0 가 스케일링 함수 $\phi(x - k)$ 의해 구성되어진 첫번째 부분공간 v_0 의 웨이블릿을 대표한다면 $v_1 = v_0 + \omega_0$ 이다. 여기서 수학적 표현 $\overline{\text{span}}$ 은 웨이블릿 함수의 확장을 의미한다. 마찬가지로, $v_2 = v_0 + \omega_0 + \omega_1$ 로 확장이 가능하다. 그러므로 $j+1$ 번째 공간에 대한 일반적인 관계는 식 (6)과 같다.

$$v_{j+1} = v_0 + \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_j \quad (6)$$

3. 웨이블릿 급수에 의한 구조해석

3.1 Galerkin법에 의한 정식화

웨이블릿 이론은 신호나 이미지 처리분야에 많은 영향을 주었다. 그러나 이것이 연속체 역학에서 미분방정식의 수치

해석과 비슷한 기능을 가졌는지 가지지 않았는지에 대해서는 아직 명확하지 않다. 이 절에서는 웨이블릿 이론의 적합성을 판별하기 위하여 간단한 일차원 문제의 미분방정식 식 (7)을 고려하겠다(Basu 등, 2003; Reddy, 1993; Xiang 등, 2007).

$$\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + f(x) = 0 \quad \text{for } 0 \leq x \leq L \quad (7)$$

Galerkin법을 사용하여 식 (7)의 미분방정식에 대한 약형(weak form)을 유도할 수 있다. 즉, 근사함수의 연속 필요조건들을 약화시킬 수 있기 때문이다. 식 (7)에서 함수 $u(x)$ 는 C^2 -연속이 되어야 하지만 Galerkin법을 사용함으로써 함수 $u(x)$ 에 대한 연속 요구조건이 C^1 -연속으로 감소되었다는 것을 알 수 있다. 여기서, w 는 가중함수이다.

$$\int_0^L a \left(\frac{dw}{dx} \right) \left(\frac{du}{dx} \right) dx = \int_0^L w f dx + w \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^L \quad (8)$$

여기서, 유한요소법과 다른 점은 변위장을 정의할 때 사용되는 변위함수가 웨이블릿 함수를 사용하여 식 (9)와 같이 표현할 수 있다.

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c(j) \phi_j(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(j,k) \psi_{j,k}(x) \quad (9)$$

주어진 문제의 약형(weak form)과 웨이블릿 기본식이 정해졌으면 기본식의 함수에 사용할 적합한 스케일링 함수 $\phi_k(x)$, 웨이블릿 함수 $\psi_{j,k}(x)$ 를 선택해야 한다. 이 함수들을 결정할 때는 다음의 조건을 만족해야 한다.

- ① $\phi_k(x)$ 와 $\psi_{j,k}(x)$ 은 미분 가능이어야 한다.
- ② $\phi_k(x)$ 와 $\psi_{j,k}(x)$ 은 문제의 경계조건을 만족해야 한다.
- ③ $\phi_k(x)$ 와 $\psi_{j,k}(x)$ 은 완전성(completeness)을 확보해야 한다.

3.2 스케일링, 웨이블릿 함수의 선택

스케일링, 웨이블릿 함수는 Daubechies, Trigonometric, Hermite Cubic, Haar 함수들, 그리고 본 연구에서 사용하고 자 하는 Hat 함수처럼 다양한 종류가 있다. 이 함수들 중에서 Hat 함수가 다른 함수들에 비해 위의 3가지 경계 및 연속조건을 만족하며, 일차원 연속문제에 대해 사용하기가 간편하고 쉽

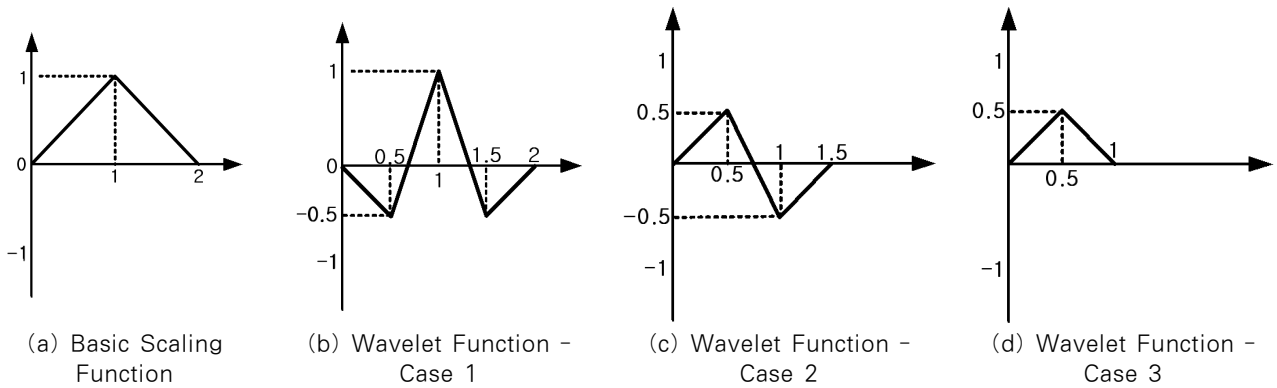


그림 1 Hat 스케일링 함수와 웨이블릿 함수의 일반형

기 때문에 채택되었다. Hat 웨이블릿 함수의 특징은 다음과 같다(Sidney Burrus 등, 1998; Xiang 등, 2007).

- v_0 단계에서의 기초 스케일링 함수(그림 1(a))

$$\phi_0(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ 2-x & x \in [1, 2] \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

- ψ_0 단계에서의 웨이블릿 함수 - case 1(그림 1(b))

$$\psi_0(x) = \begin{cases} -x & x \in [0, 0.5] \\ 3x-2 & x \in [0.5, 1] \\ -3x+4 & x \in [1, 1.5] \\ x-2 & x \in [1.5, 2] \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

- ψ_0 단계에서의 웨이블릿 함수 - case 2(그림 1(c))

$$\psi_0(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 0.5] \\ -2x+3/2 & x \in [0.5, 1] \\ x-3/2 & x \in [1, 1.5] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- ψ_0 단계에서의 웨이블릿 함수 - case 3(그림 1(d))

$$\psi_0(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 0.5] \\ 1-x & x \in [0.5, 1] \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

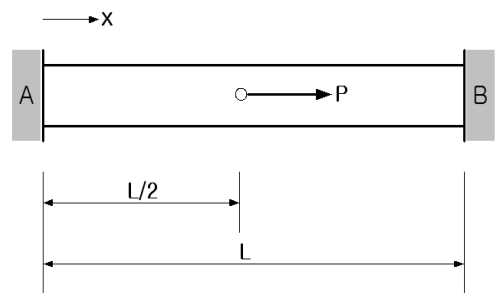


그림 2 중앙에 축방향 하중을 받는 양단 고정보

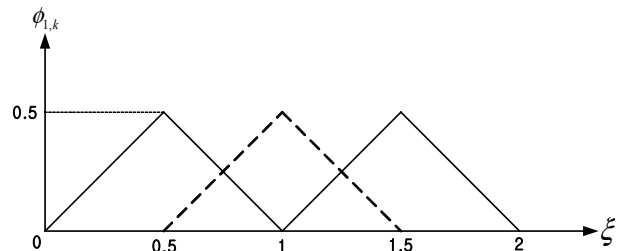


그림 3 v_1 -공간에서의 Hat 스케일링 함수의 확장

$2=1$ 이라 가정한다.

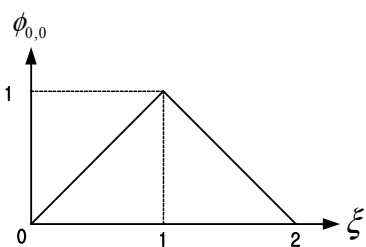
이 문제의 미분방정식을 약형은 식 (8)과 같다. 주어진 문제의 길이는 L 이고, 전체 길이를 2(Hat 함수의 주기가 2이므로)로 변환시키기 위해서는 $\alpha=2a/L$, $\beta=fL/2$ 로 두고 이것을 식 (8)에 대입하면 식 (10)이 유도 된다.

$$\sum_0^2 a \left(\frac{dw}{d\xi} \right) \left(\frac{du}{d\xi} \right) d\xi = \int_0^2 w \beta d\xi + w \left(a \frac{du}{d\xi} \right)_0^2 \quad (10)$$

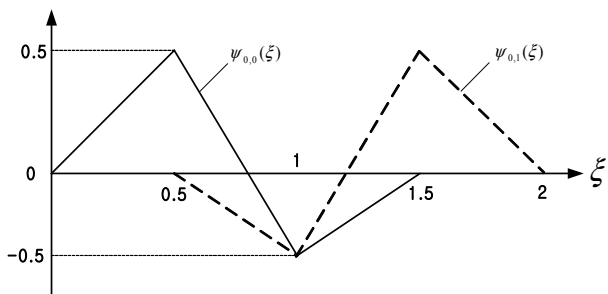
3.3 Level v_1 에 의한 구조해석 방법

Galerkin법에 의한 정식화 과정과 스케일링 및 웨이블릿 함수가 결정된 후 실제 1차원 축방향문제에 적용하여 구조계산을 수행하는 과정을 소개하고자 한다. 양단 고정이고 길이 L 이며 부재의 중앙에 축방향력 P 가 작용되고 있는 양단 고정보 AB를 고려한다. 재료의 특성을 나타내는 a 는 $\alpha=2a/L$ 이고 $PL/$

스케일링 함수와 웨이블릿 함수를 구성하는 근사 전개식을 유도할 때 근사 u 는 v_1 단계에서 고려되어야 한다. v_1 단계에서 만약 v_0 가 $u(x)=0$ 와 $u(L)=0$ 의 경계조건을 가지고 기초 단계로 쓰여 진다면 구간(이승훈 등, 2000)에 있는 스케일링 함수의 완전한 함수 세트(set)는 그림 3과 같이 level



(a) Scaling Function $\phi_{0,0}(\xi)$



(b) Wavelet Function $\psi_{0,0}(\xi)$ and $\psi_{0,1}(\xi)$

그림 4 v_0 -공간에서의 Hat 스케일링과 웨이블릿 함수

v_1 에서의 세 개의 스케일링 함수로 구성되며 식 (11)과 같이 정의된다.

$$\phi_{1,k}(x) = \frac{1}{2^1} \phi_0\left(x - \frac{k}{2^1}\right) \text{ with } k=0, 1, 2 \quad (11)$$

$v_1 = v_0 + w_0$ 로 나타낼 수 있다. 그러므로 위의 3개의 스케일링 함수는 v_1 단계에서 하나의 스케일링 함수 $\phi_{0,0}$ 와 두 개의 웨이블릿 함수 $\psi_{0,0}$ 와 $\psi_{0,1}$ 으로 나누어질 수 있다. 여기에 두 개의 웨이블릿 함수는 구간(이승훈 등, 2000)에서 완전하게 경계조건을 만족한다. 그러므로 변위장 u 에 대한 근사는 식 (12)과 같다.

$$u(\xi) = c_1\phi_{0,0}(\xi) + d_1\psi_{0,0}(\xi) + d_2\psi_{0,1}(\xi) \quad (12)$$

그리고 그림 4에 식 (12)에 대응하는 스케일링 함수와 웨이블릿 함수가 나타나 있다.

식 (12)의 편의성을 위해 $c_1, d_1, d_2, \phi_{0,0}(\xi), \psi_{0,0}(\xi), \psi_{0,1}(\xi)$ 을 $c_1, c_2, c_3, u_1(\xi), u_2(\xi), u_3(\xi)$ 으로 대응시키고자 한다. 즉, 유한요소법에서 변위장의 정의가 절점변위에 대한 보간으로 표현하듯이 식 (13)과 같이 표현할 수 있다.

$$u(\xi) = c_1u_1(\xi) + c_2u_2(\xi) + c_3u_3(\xi) = \sum_{i=1}^3 c_iu_i(\xi) \quad (13)$$

식 (13)을 식 (10)에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\int_0^2 \left(\frac{dw}{d\xi} \right) \left(\frac{d \sum_i c_i u_i(\xi)}{d\xi} \right) d\xi = \int_0^2 w \delta(\xi - 1) d\xi + \left(\frac{d \sum_i c_i u_i(\xi)}{d\xi} \right) \Big|_0^2 \quad (14)$$

미분 방정식으로부터 합산 기호를 빼고 경계조건 $u(0) = 0, u(2) = 0$ 을 대입하면 식 (15)를 얻을 수 있다.

$$\sum_i c_i \int_0^2 \frac{dw}{d\xi} \frac{du_i}{d\xi} d\xi = w \Big|_{\xi=1} \quad (15)$$

위 식들은 다음 행렬과 같이 나타내어 질 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

그리고 계산을 하면 미지상수 c_1, c_2, c_3 를 결정할 수 있기 때문에 최종적으로 변위장을 결정할 수 있게 된다. level v_2 (v_2 공간)에서 v_3, v_4, \dots 로 확장됨에 따라 사용되는 스케일링함수와 웨이블릿 함수의 갯수는 급수전개에 따라 $(2^{m+1} - 1)$ 로 증가하게 되고, 정해에 보다 정확히 수렴하게 된다. 즉, m 은 level 수를 말하며, 만약에 v_2 공간의 경우 $m=2$ 이므로 사용될 총 함수의 갯수, 즉 미지수의 갯수는 7이 되며 v_3, v_4 의 경우 미지수의 갯수는 각각 15, 31로 증가하게 된다. 그러므로 이 절에서는 v_1 공간을 사용하므로 $m=1$ 이기 때문에 식 (17)과 같이 3개의 미지수만 결정하면 된다. 이 미지수는 유한요소법에서 사용되는 자유도와 같은 의미로 생각하면 된다.

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

4. 웨이블릿 해석과 유한요소 해석의 비교

4.1 계단식 단면에 분포하중이 작용하는 응력특이 문제

그림 5와 같이 양단고정 부재 AB에 $L=0.5$ 위치에 집중하중 P 와 분포하중 β_1, β_2 가 작용하는 응력특이 부재가 있다. 집중하중 $P=5$ 이고 등분포하중 $\beta_1=1, \beta_2=2$ 이며 단면 계수 $\alpha_1=2, \alpha_2=1$ 이라 할 때 변위장 u 값을 산정해 보겠다.

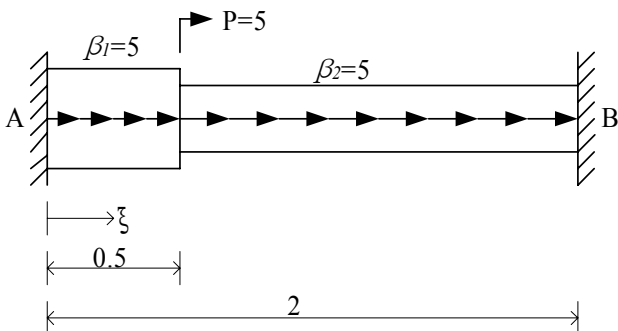


그림 5 계단식 단면에 분포하중이 작용하는 응력특이 문제

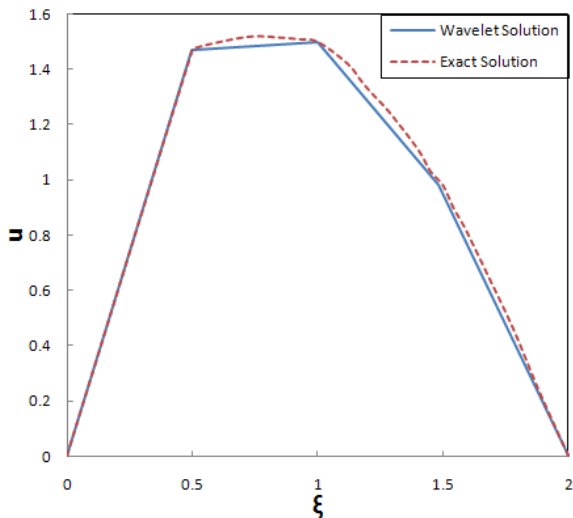


그림 6 v₁공간에서의 WSA와 정해의 비교

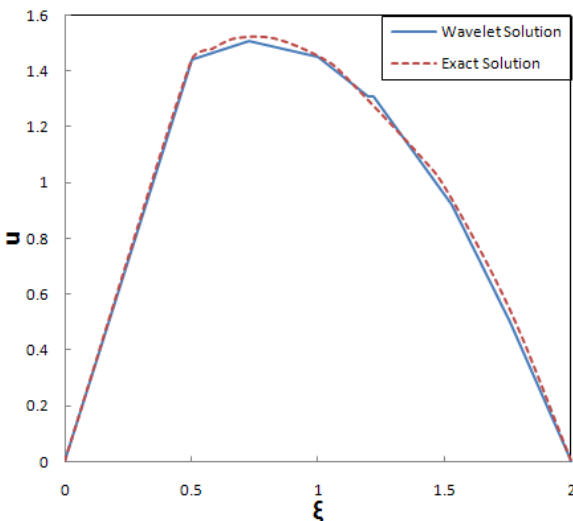


그림 7 v₂공간에서의 WSA와 정해의 비교

미분방정식은 식 (7)과 동일하며 부재 길이가 2이므로 $0 \leq \xi \left(= \frac{2x}{L} \right) \leq 2$, $\alpha = \frac{2a}{L}$, $\beta = \frac{fL}{2}$ 이라 정규화하면 식 (17)과 같이 길이가 2인 형태로 바꿀 수 있다.

표 1 WSA와 유한요소법의 비교

수치해석	최대오차와 위치			
	v ₁ 공간(3 functions)		v ₂ 공간(7 functions)	
Wavelet	오차(%)	2.37	오차(%)	0.69
	위치(ξ)	0.748	위치(ξ)	0.624
FEM	20 liner elements		32 liner elements	
	오차(%)	2.24	오차(%)	1.39
	위치(ξ)	0.9	위치(ξ)	0.938

$$\frac{d}{d\xi} \left(\alpha(\xi) \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) + \beta(\xi) = 0, 0 \leq \xi \leq 2 \quad (18)$$

식 (18)로부터 Galerkin법을 취해 가중함수를 곱해 약형 (weak form)을 유도하면 식 (19)와 같다.

$$2 \int_0^{0.5} \frac{dw}{d\xi} \frac{du}{d\xi} d\xi + \int_{0.5}^2 \frac{dw}{d\xi} \frac{du}{d\xi} d\xi = \int_0^{0.5} w d\xi + 2 \int_{0.5}^2 w d\xi + 5w \Big|_{\xi=0.5} \quad (19)$$

위의 약형에 앞의 예제와 같은 방법으로 계산을 수행하면 다음과 같은 결과를 얻게 된다. 그림 6과 그림 7에서 보는 바와 같이 v₁공간에서 v₂공간으로 확장됨에 따라 정해와 거의 일치되는 값을 얻을 수 있다.

한편, WSA와 유한요소법의 최대 오차의 비교표는 표 1과 같다. WSA의 경우 level v₁(v₁공간)에서는 1개의 스케일링 함수와 2개의 웨이블릿 함수로 총 3개의 함수가 필요하게 되며 미지수가 3이 되므로 3×3 매트릭스를 풀면 된다. 다시 말하면 자유도가 3이 되는 셈이다. 또한 level v₂(v₂공간)의 경우 7개의 함수가 필요하게 되며 자유도는 7이라 할 수 있다. 유한요소해석과 비교할 때 32 linear elements(순자유도 29)를 사용하였을 경우 WSA의 level v₂에 비해 자유도수는 훨씬 큰데 비해 오히려 오차는 1.39%로 WSA의 0.69%에 비해 크을 알 수 있다.

4.2 변단면에 집중하중이 작용하는 응력특이 문제

집중하중을 받는 변단면(tapered member)이 그림 8에 도시되어 있다. 이 경우 단면계수 α는 ξ와 같다. 그러므로,

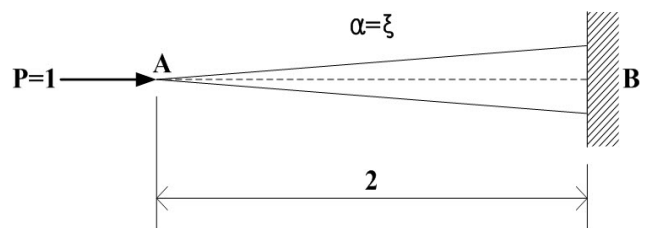
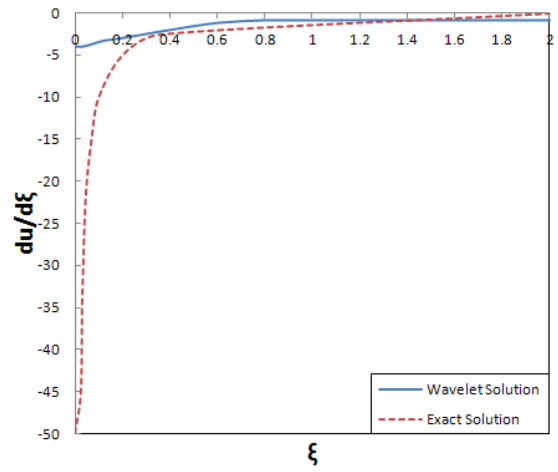
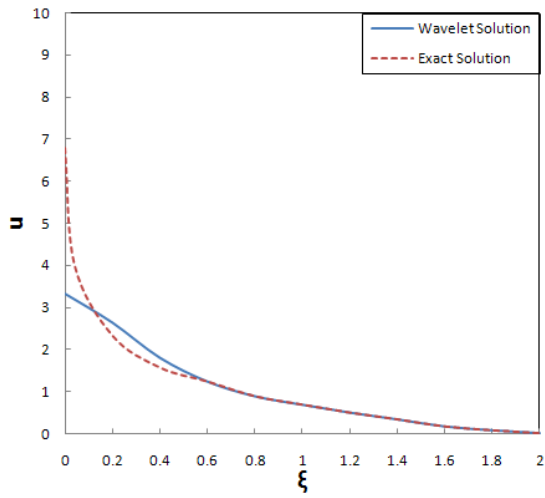
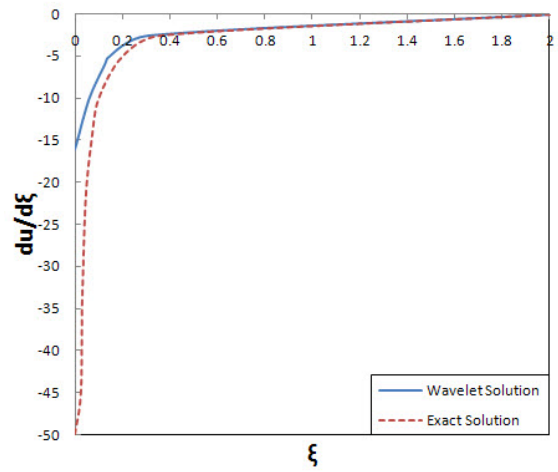
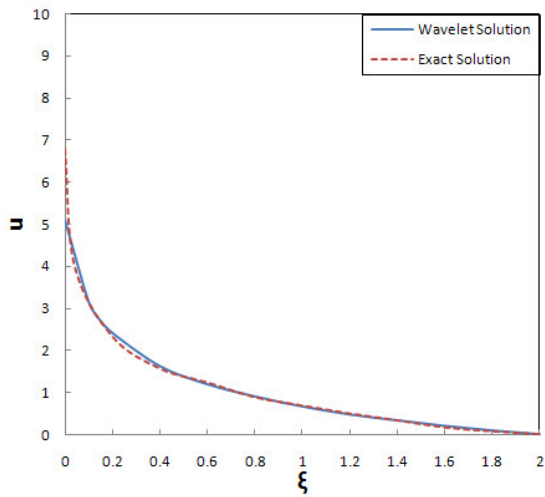


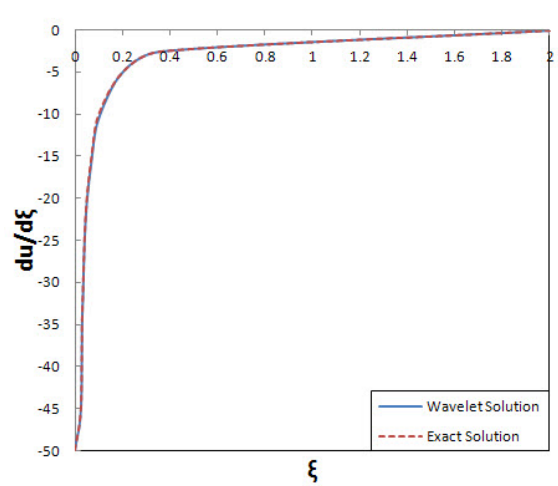
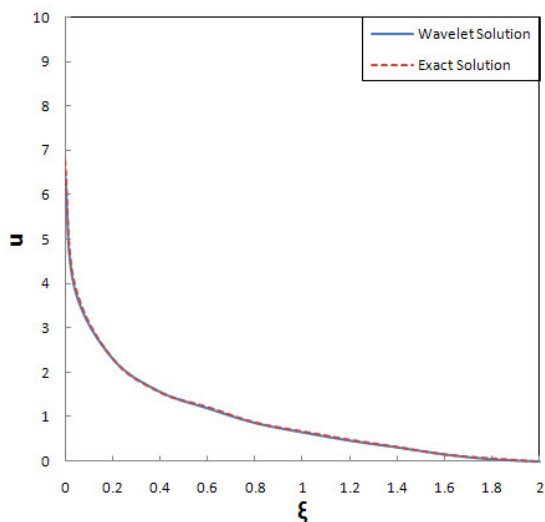
그림 8 집중하중이 작용하는 변단면 부재



(a) v_1 공간에서의 $u(\xi)$ 와 $\frac{du(\xi)}{d\xi}$ 의 근사해



(b) v_3 공간에서의 $u(\xi)$ 와 $\frac{du(\xi)}{d\xi}$ 의 근사해



(c) v_5 공간에서의 $u(\xi)$ 와 $\frac{du(\xi)}{d\xi}$ 의 근사해

그림 9 공간(level) 확장에 따른 WSA의 근사해와 정해의 비교

표 2 WSA와 유한요소법의 비교

수치해석	최대오차와 위치($\xi=0.002$)		
	Wavelet	v_1 공간 (4 functions)	v_2 공간 (8 functions)
51.59		41.70	31.90
v_4 공간 (32 functions)		v_5 공간 (64 functions)	v_6 공간 (128 functions)
22.33		13.22	5.04
FEM	10 linear elements	20 linear elements	32 linear elements
	81.60	71.57	64.77

지배미분 방정식은 아래와 같이 정의된다.

$$-\frac{d}{d\xi}[\xi \frac{du}{d\xi}] = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 2 \quad (20)$$

$$\text{경계조건 : } -\xi \frac{du}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = p = 1 \text{ and } u \Big|_{\xi=2} = 0$$

이 문제의 정해는 식 (2)으로부터 다음과 같이 유도할 수 있다. 즉,

$$u(\xi) = \ln(2) - \ln(\xi) \text{ and } \frac{du(\xi)}{d\xi} = -\frac{1}{\xi} \text{ for } 0 \leq \xi \leq 2 \quad (21)$$

식 (21)에 보는 바와 같이 $\xi=0$ 일 때 응력특이가 발생되므로 $u(0)$ 과 $du(0)/d\xi$ 는 무한대가 됨을 알 수 있다. 이 문제의 약형은 다음과 같이 정의된다. 즉,

$$\int_0^2 \xi \frac{du}{d\xi} \frac{dw}{d\xi} d\xi = w \Big|_{\xi=0}, \quad 0 \leq \xi \leq 2 \quad (22)$$

각각 다른 공간(level)에 따라 식 (9)에 정의된 스케일링 함수와 웨이블릿 함수를 식 (22)에 대입하여 해석을 하면 된다. 그림 9에는 level v_1 (v_1 공간)에서 level v_3 , level v_5 로 웨이블릿 공간이 점점 확장됨에 따라 WSA 근사해가 식 (21)의 정해에 접근되는 것을 알 수 있다.

마지막으로 WSA와 유한요소법의 최대 오차의 비교가 표 2에 정리되었다. 응력특이점의 위치 $\xi=0$ 에서의 정해는 식 (21)로부터 $u(0)$ 과 $du(0)/d\xi$ 는 무한대가 됨을 알 수 있으므로, 응력특이점에 가까운 $\xi=0.002$ 에서의 변위 및 응력값을 비교하였다. 앞의 예제와 달리 유한요소 해석은 응력특이점($\xi=0$)을 제외하고는 대체로 요소수의 증가에 따라 정해와 비교하여 좋은 결과를 보여준다. 반면에 표 2에서 보는 바와 같이 32개의 선형요소를 사용하여도 64.77%의 오차를 보여줌을 알 수 있다. 이에 비해 WSA는 웨이블릿 공간(level)을 $m=5,6$ 까지 확장함에 따라 13.22%, 5.04%로 오차가 크게 줄어들음을 알

수 있다. 이 결과로부터 응력특이가 심하면 심할수록 WSA의 해석방법의 장점이 있다는 것을 확인할 수 있다.

5. 결 론

웨이블릿 급수해석은 기존의 푸리에 급수해석의 단점을 보완할 수 있는 방법이다. 푸리에 해석은 어떠한 함수를 분석할 때 sine wave, cosine wave와 같은 단순한 주기함수를 사용했기 때문에 복잡한 신호나 함수를 분석하기는 어렵다. 하지만 웨이블릿 해석은 '시간'이라는 요소를 첨가한 웨이블릿 함수를 사용하기 때문에 복잡한 형상의 함수들을 수학적으로 보다 효율적이게 나타낼 수 있어서 웨이블릿은 응력 특이가 발생하는 문제의 수치해석에 보다 적합하다고 할 수 있겠다. 웨이블릿 해석은 웨이블릿 공간을 고차로 증가시킬수록 오차가 더욱 줄어들 것이다. 특히, 응력특이가 심하게 발생하는 문제에서는 큰 이점이 있는 것을 확인할 수 있었다. 지금까지는 국내에서 웨이블릿 급수를 이용한 수치해석 적용사례가 거의 없었다. 이 논문에서 설명한 바와 같이 WSA가 앞으로 2차원 평판문제 등의 수치해석에 많이 적용될 수 있을 것으로 생각한다.

참 고 문 헌

강현배, 김대경, 서진근 (2001) *Wavelet Theory and its Applications*, 아카넷.
 김충락, 송현중, 장대홍, 홍창곤 (1998) 웨이블릿의 기본 이론과 통계에의 응용, 아르케.
 이승훈, 윤동한 (2000) 알기 쉬운 웨이블릿 변환, 진한도서.
 Basu, P.K., Jorge, A.B., Bardi, S., Lin, J. (2003) Higher-Order Modeling of Continua by Finite-Element, Boundary-Element, Meshless, and Wavelet Methods, *Comput. Math.*, 46, pp.15~33.
 Reddy, J.N. (1993) *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill.
 Sidney Burrus, C., Ramesh A. Gopinath, Haitao Guo (1998) *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms*, Prentice Hall.
 Xiang, J.W., Chen, X.F., He, Z.J., Dong, H.B. (2007) The construction of 1D Wavelet Finite Elements for Structural Analysis, *Comput. Mech.*, 40, pp.325~339.

- 논문접수일 2009년 4월 1일
- 논문심사일 1차 2009년 4월 13일
2차 2009년 11월 12일
- 게재확정일 2009년 11월 16일