

# 유한회전과 4원수를 이용한 유니버설 조인트 시스템의 기구해석 비교

## Comparisons of Kinematical Analysis for the Universal-joint System by Using Finite Rotations and Quaternions

윤 성 호\*  
Yun, Seong-Ho

### 요 지

본 논문에서는 자동차의 구동계 등에 사용되는 유니버설 조인트의 기구학적 거동을 관찰하기 위하여 오일러 각과 4원수(quaternion)를 적용한 두 가지 방법을 비교하였다. 이와 관련된 종래의 연구자들은 오일러 각을 사용하여 회전체의 동적인 거동을 해석하였으나 결과의 일관성과 정확도가 부족하였다. 유니버설 조인트 시스템 해석에서도 이러한 단점을 확인하였고 이를 극복하고자 4원수를 적용하였다. 구동시 원동축 1개축 회전과 원동축과 직각방향 회전축 2개의 축이 동시에 존재하는 경우에 대하여 수치해석을 통하여 기하학적인 물리량을 산출하였다. 4원수를 채용한 방법이 세차운동을 포함하는 2개축 회전에서 유니버설 조인트 시스템을 해석하는데 있어 더욱 유용한 방법임을 보여 주었다.

**핵심용어** : 유니버설 조인트, 오일러 각, 4원수, 세차운동, 기구학적 해석

### Abstract

This paper deals with the comparison of analysis methodologies by applying both Euler angle and quaternion to observe the kinematical behavior of the universal joint system used as an automotive drive-shaft. At first, conventional approaches are applied to predict a kinematical behavior by introducing only Euler angles into the universal joint system, but turns out to be lack in consistency and reliability of the analysis. Then to overcome this deficiency in numerical analysis a different methodology is proposed by using quaternion in this system. Its corresponding advantage is discussed in terms of kinetic energy, rotational velocity and rotational displacement. The application of quaternions in the numerical experiment is shown to be a more useful and valid way of establishing the ideal analytical model of the universal joint system.

**Keywords** : universal joint, Euler angle, quaternion, precession, kinematical analysis

## 1. 서 론

유니버설 조인트는 오랫동안 자동차의 구동계, 항공기의 제어기, 공작기계의 전동축과 같이 두 개의 축을 연결하는 각이 변할 때 유용하게 사용되어 왔다. 최근에는 두 축의 굴절각이 큰 것을 채택하여 큰 토크에도 견딜 수 있도록 의학용으로도 사용하고 있다(Hummel, 2000). 특히 차량에서 고장의 1/4 가량이 동력전달 계통에서 일어나고 있으며, 이는 제작 및 설계의 오차, 정비 불량, 재료의 피로에 의하여 야기되는 것으로 보고되고 있다(Heyes, 1998; Bayrackceken 등, 2007).

제조 공차를 가진 유니버설 조인트의 십자부위에서 내력을 산정하고자 이중 행렬(dual matrices)을 사용하여 기구학적 해석을 수행하였다(Fischer 등, 1984). 또한 종동축의 속도 변화에 의한 구동계(driveline)의 비틀림 진동을 저감시키는 방안을 연구하거나 구동축의 안정성을 평가하는 문제를 다루어 왔다(박보용 등, 1991; Kato 등, 1997). 최근에는 구동축의 지지대 뿐만 아니라 회전축 자체에도 댐핑이 존재할때 동적인 거동을 관찰하였다(Mazzei 등, 2001; 2003).

기존 연구자들은 회전체의 회전운동을 표현하기 위하여 좌표변환 행렬에 오일러 각(Euler angle)을 사용하여 시스템

\* 책임저자, 정회원 · 금오공과대학교 기계공학부 교수  
Tel: 054-478-7324 ; Fax: 054-478-7324  
E-mail: shyun@kumoh.ac.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2010년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2010년 8월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

모델을 설정하였다(Nelson 등, 1980; Mohiuddin 등, 1994; 1999, Al-Bedor, 1999). 이 때, 산출된 회전 운동 에너지에서 저차항만을 고려하여 선형의 운동방정식을 도출하였다. 그러나 오일러 각에 의한 유한회전 표현법을 사용하여 일반적인 회전자세를 설명하는데 있어 잠재적으로 낮은 신뢰도를 가지고 있다(윤성호, 2008). 상기에 언급한 유니버설 조인트 운동에 대한 종래의 해석들은 단지 구동축의 회전에 의한 종동축의 회전만을 다루어 왔다. 이 경우 오일러 각의 사용은 적절할지 모르나 구동축이 축 방향과 함께 다른 직각 방향 축의 회전을 동반한다면 오일러 각의 연속적인 순서가 상이하므로 해석 결과의 독립성을 보장할 수 없으리라 예측된다.

강체가 연속적으로 회전한 후의 자세는 어느 한 축에 대하여 일정한 각도를 회전시켜도 동일한 자세를 얻을 수 있다는 오일러 이론에 의하여 회전 벡터의 성질과 오일러 매개변수를 이용하여 4원수(quaternion)을 도입할 수 있다(Spring, 1986; Nikravesh, 1988; Haug, 1989; Dooley 등, 1991; Geradin 등 2001). 관측하는 좌표계도 필요에 따라서 관성좌표계(inertial frame) 또는 국부좌표계(local frame)를 편리하게 사용할 수 있어 회전 시스템에 적용에 편리하다.

본 논문에서는 유니버설 조인트의 기구학적인 해석을 위하여 구동시 원동축만 회전하는 경우와 다른 축의 세차운동(precession)도 동반하는 경우를 다룰 것이다. 종동축의 운동과 시스템의 운동에너지를 산출하는 과정에서 상이한 오일러 각의 순서를 적용하면 상이한 결과가 도출되는지를 수치예제를 통하여 확인하고 이 방법의 단점을 지적할 것이다. 아울러 이를 극복하기 위하여 회전운동을 매개화할 수 있는 4원수를 적용한 후 기존의 유한회전 방법과 비교할 것이다.

## 2. 기구학적 해석

### 2.1 평면내 유한회전

그림 1에서  $I(X, Y, Z)$ 는 유니버설 조인트 시스템의 기준좌표계이다. 축 1은 요크(yoke)로서 원동축 역할을 하며, 이 축은  $\theta_1$ 으로 회전하고 있다. 축 1에서  $Y$ 축이 종동축인 축 2의  $Z$ 축과 직각으로 교차하여 십자형 부재(cross trunnion)를 이루고 있고, 축 2는  $\theta_2$ 로 회전하고 있다. 축 1과 2가 회전할 때  $(X, Y)$ 평면 내에 회전축이 존재하는 경우를 먼저 생각해 보기로 한다. 이 때 회전의 순서를 오일러 각으로 표현하기로 한다. 축 1에서 기본좌표계  $I(X, Y, Z)$ 가  $X$ 축에 대하여  $\theta_1$ 만큼 회전하여  $I_1(x_1', y_1', z_1')$ 로 변할 때 식 (1a)가 성립한다. 여기서  $c$ 는 여현(cosine),  $s$ 는 정현(sine)을 나타내

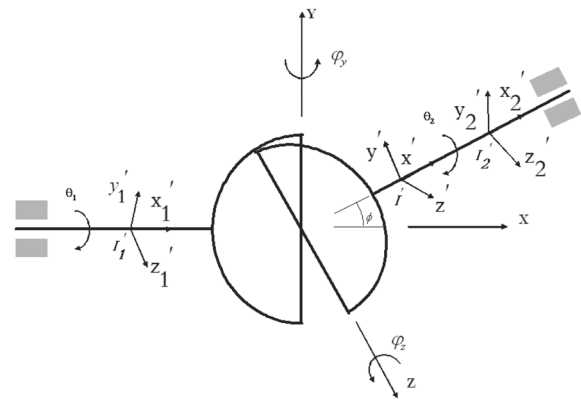


그림 1 유니버설 조인트의 기준좌표계와 회전좌표계

며,  $R$ 은 회전텐서,  $R$ 의 위 첨자  $T$ 는 전치행렬, 아래 첨자는 회전각을 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{Bmatrix} = R_{\theta_1}^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_1 & s\theta_1 \\ 0 & -s\theta_1 & c\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (1a)$$

축 2에서는 기본좌표계  $I(X, Y, Z)$ 가  $Z$ 축에 대하여 일정한 오프셋(off-set) 각도  $\phi$ 만큼 회전하여  $I'(x', y', z')$ 로 변하고 축  $x'$ 에 대하여  $\theta_2$ 만큼 회전한 후 최종적으로  $I_2(x_2', y_2', z_2')$ 로 변하면 식 (1b)를 만족한다. 시스템이 회전 중에 어느 순간에서도 십자형 부재는 직교조건인  $y_1' \perp z_2'$ 이 만족하므로 식 (2a)를 유도할 수 있다. 식 (2b)를 시간  $t$ 에 관하여 미분을 수행하면 원동축과 종동축의 각속도  $\omega_1$ 과  $\omega_2$ 의 관계식 (2c)를 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} x_2' \\ y_2' \\ z_2' \end{Bmatrix} = R_{\theta_2}^T R_{\phi}^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_2 & s\theta_2 \\ 0 & -s\theta_2 & c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi & s\phi & 0 \\ -s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (1b)$$

$$= \begin{bmatrix} c\phi & s\phi & 0 \\ -s\phi c\theta_2 & c\phi c\theta_2 & s\theta_2 \\ s\phi s\theta_2 & -c\phi s\theta_2 & c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

$$-c\phi c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1 = 0; \quad (2a)$$

$$\theta_{2ip} = \tan^{-1} \frac{\tan \theta_1}{c\phi}; \quad \omega_{2ip} = \frac{c\phi \omega_1}{1 - c^2 \theta_1 s^2 \phi} \quad (2b, c)$$

### 2.2 평면외 유한회전

다음에 고려할 문제는 축 1과 2가 회전할때  $(X, Y)$ 평면 내에 회전축이 존재하지 않고 십자형 부재의 길이 방향인  $Y$ 축과  $Z$ 축에 대하여 각각  $\varphi_1$  또는  $\varphi_2$ 만큼 회전하는 경우이다.

Y축에 대한 미세한 세차운동(precession)으로 인하여 원동축이 (X, Y)평면을 벗어나는 경우를 생각해 보기로 하자. 축 1에서 기본좌표계 I(X, Y, Z)가 X축에 대하여  $\theta_1$ 만큼 회전한 후  $I'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ 에서  $y'_1$ 축에 대하여  $\varphi_y$ 만큼 회전하여  $I''_1(x''_1, y''_1, z''_1)$ 로 변할때 다음 식 (3)이 성립하고, 축 2는 상기의 식 (1b)를 그대로 만족한다. 조인트의 기하학적인 직교조건인  $y''_1 \perp z''_2$ 로부터 구속 조건식이 구해지는데, 이는 식 (2a)와 동일하다. 따라서 원동축과 종동축의 각변위와 각속도 관계식은 (2b,c)와 동일하게 되어  $\theta_{2\theta\varphi} = \theta_{2ip}$ ,  $\omega_{2\theta\varphi} = \omega_{2ip}$ 가 성립한다.

$$\begin{Bmatrix} x''_1 \\ y''_1 \\ z''_1 \end{Bmatrix} = R_{\varphi_y}^T R_{\theta_1}^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\varphi_y & -s\varphi_y s\theta_1 & s\varphi_y c\theta_1 \\ 0 & c\theta_1 & s\theta_1 \\ -s\varphi_y & -c\varphi_y s\theta_1 & c\varphi_y c\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (3)$$

다음은 축의 회전순서를 달리하여 즉, 축 1에서 기본좌표계 I(X, Y, Z)가 Y축에 대하여  $\varphi_y$ 만큼 회전한  $I'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ 에서 축  $x'_1$ 대하여  $\theta_1$ 만큼 회전하여  $I''_1(x''_1, y''_1, z''_1)$ 로 변할때 좌표계의 관계식은 식 (4)와 같고, 축 2에 관한 변환식은 식 (1b)와 동일하다. 이 때, 십자형 부재의 기하적인 직교조건식 (5a)으로부터 원동축과 종동축의 각변위와 각속도 관계는 식 (5b,c)와 같이 구해진다.

$$\begin{Bmatrix} x''_1 \\ y''_1 \\ z''_1 \end{Bmatrix} = R_{\theta_1}^T R_{\varphi_y}^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\varphi_y & 0 & s\varphi_y \\ -s\varphi_y s\theta_1 & c\theta_1 & c\varphi_y s\theta_1 \\ -s\varphi_y c\theta_1 & -s\theta_1 & c\varphi_y c\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$-s\varphi_y s\theta_1 s\phi s\theta_2 - c\phi c\theta_1 s\theta_2 + c\varphi_y s\theta_1 c\theta_2 = 0; \quad (5a)$$

$$\theta_{2\theta\phi} = \tan^{-1} \frac{c\varphi_y \tan\theta_1}{s\varphi_y s\phi \tan\theta_1 + c\phi}; \quad (5b)$$

$$\omega_{2\theta\phi} = \frac{\dot{\varphi}_y s\phi \tan\theta_1 (\tan\theta_1 + c\phi) - \omega_1 c\phi c\varphi_y \sec^2\theta_1}{(s\varphi_y s\phi \tan\theta_1 + c\phi)^2 + (c\varphi_y \tan\theta_1)^2} \quad (5c)$$

### 2.3 유한회전 에너지

우선 회전축이 (X, Y)평면 내에서 운동할 때, 축 1에 구동모멘트 Q를 가하여 종동축의 각속도를 관찰하기로 한다. 축에 설정된 회전좌표계에서 각속도  $\omega_1^*$ 과  $\omega_2^*$ 에 관한 반대칭행렬(skew-symmetric matrix)  $\tilde{\omega}_1^*$ 와  $\tilde{\omega}_2^*$ 는 식 (6a,b)와 같이 표현되고, 이로부터 각속도를 식 (7a,b)와 같이 구할 수 있다.

$$\tilde{\omega}_1^* = R_{\theta_1}^T \dot{R}_{\theta_1} = \dot{\theta}_1 \tilde{X} \quad (6a)$$

$$\tilde{\omega}_2^* = (R_{\varphi} R_{\theta_2})^T (R_{\varphi} R_{\theta_2}) \dot{\ } = R_{\theta_2}^T \dot{\phi} \tilde{Z} R + R_{\theta_2}^T R_{\varphi} \quad (6b)$$

$$\omega_1^* = \dot{\theta}_1 [1 \ 0 \ 0]^T \quad (7a)$$

$$\omega_2^* = R_{\theta_2}^T \dot{\phi} \tilde{Z} + \dot{\theta}_2 \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s\theta_2 \\ 0 & 0 & c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (7b)$$

상기의 속도 표현식 (7a,b)를 이용하여 (X, Y)평면 내에서 회전할때 시스템의 총 운동에너지는  $K_{ip}$ 는 다음 식 (8a,b)와 같이 표현되며, 이 때 종동축의 오프셋 각도  $\phi$ 는 일정하고,  $I_i$ 는 축  $i$ 의 질량관성모멘트이다. 평면내 운동의 경우 아래 첨자는  $ip$ , 평면외의 경우는  $\theta\varphi$ 와  $\varphi\theta$ 로 나타낼 것이다. 또한 ( $\dot{\ }$ )는 시간  $t$ 에 관한 미분을 나타낸다.

$$K_{ip} = \frac{1}{2} (\omega_1^{*T} J_1 \omega_1^* + \omega_2^{*T} J_2 \omega_2^*) = \frac{1}{2} (I_{1x} \theta_1^2 + I_{2x} \theta_2^2) \quad (8a)$$

$$J_i = \begin{bmatrix} I_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & I_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{iz} \end{bmatrix}, \quad (i=1,2) \quad (8b)$$

이와 동일한 방법으로 (X, Y)평면외에서 회전할 때 원동축의 유한회전 순서가  $\theta_1 \rightarrow \varphi_y$ 와  $\varphi_y \rightarrow \theta_1$ 에 따른 운동에너지  $K_{\theta\varphi}$ 와  $K_{\varphi\theta}$ 를 구한다. 먼저 오일러 각의 순서가  $\theta_1 \rightarrow \varphi_y$ 인 경우에 대하여 각속도를 구하면  $\omega_1^*$ 은 식 (9a,b)와 같이 구해지고,  $\omega_2^*$ 는 식 (7b)와 동일하다. 이에 따른 운동에너지  $K_{\theta\varphi}$ 는 식 (9c)로 표현된다.

$$\tilde{\omega}_1^* = (R_{\theta_1} R_{\varphi})^T (R_{\theta_1} R_{\varphi}) \dot{\ } = R_{\varphi}^T \dot{\theta}_1 \tilde{X} R_{\varphi} + R_{\varphi}^T R_{\theta_1} \quad (9a)$$

$$\omega_1^* = R_{\varphi}^T \theta_1 \mathbf{X} + \dot{\theta}_2 \mathbf{y}'_1 = \begin{bmatrix} c\varphi_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s\varphi_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\varphi}_y \end{Bmatrix} \quad (9b)$$

$$K_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} (I_{1x} \dot{\theta}_1^2 c^2\varphi_y + I_{1y} \dot{\phi}_y^2 + I_{1z} \dot{\theta}_1^2 s^2\varphi_y + I_{2x} \dot{\theta}_2^2) \quad (9c)$$

다음은 오일러 각의 순서가  $\varphi_y \rightarrow \theta_1$ 인 경우에 대하여 각속도를 구하면  $\omega_1^*$ 은 식 (10a,b)와 같이 구해지고,  $\omega_2^*$ 는 식 (7b)와 동일하다. 운동에너지는 식 (10c)로 표현된다.

$$\tilde{\omega}_1^* = (R_{\varphi} R_{\theta_1})^T (R_{\varphi} R_{\theta_1}) \dot{\ } = R_{\theta_1}^T \dot{\varphi}_y \tilde{Y} R_{\theta_1} + R_{\theta_1}^T R_{\varphi} \quad (10a)$$

$$\omega_i^* = R_{\theta_i}^T \dot{\phi}_y \mathbf{Y} + \dot{\theta}_i \mathbf{x}'_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\theta_i \\ 0 & 0 & -s\theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\phi}_y \end{bmatrix} \quad (10b)$$

$$K_{\phi\theta} = \frac{1}{2} (I_{1x} \dot{\theta}_1^2 + I_{1y} \dot{\phi}_y^2 c^2 \theta_1 + I_{1z} \dot{\phi}_y^2 s^2 \theta_1 + I_{2x} \dot{\theta}_2^2) \quad (10c)$$

### 2.4 4원수(Quaternion) 회전

회전운동을 다른 방법으로 표현하기 위하여 회전축 방향이 벡터  $\mathbf{n}$ 이고 크기  $\phi$ 로 회전하는 경우를 생각한다. 이 때 회전텐서  $\mathbf{R}$ 은 다음과 같으며  $\mathbf{U}$ 는 단위행렬을 나타낸다. 오일러 매개변수(Euler parameter)를 4개의 원소로 하는 4원수(quaternion)를 식 (11)과 같이 정의하여 회전텐서를 구하면 다음과 같다(Spring, 1986).

$$\hat{e} = [e_0 \quad \mathbf{e}]^T = [\cos(\phi/2) \quad \sin(\phi/2)\mathbf{n}]^T \quad (11)$$

$$\mathbf{R}(\phi) = \mathbf{U} \cos \phi + (1 - \cos \phi)\mathbf{nn}^T + \sin \phi \tilde{\mathbf{n}} \quad (12a)$$

$$\mathbf{R}(\hat{e}) = (2e_0^2 - \mathbf{I})\mathbf{U} + 2(\mathbf{ee}^T + 2e_0 \tilde{\mathbf{e}}) \quad (12b)$$

또한, 직교성질(orthogonality)  $\hat{e}^T \hat{e} = 1$ 를 만족하는 단위 4원수(unit quaternion)이다. 회전좌표계와 관성좌표계에서 각속도  $\hat{\omega}^*$ 와  $\hat{\omega}$ 에 대한 4원수에서 각속도 성분은 다음과 같이 구하여 진다.

$$\hat{\omega}^* = 2A^T(\hat{e})\hat{e} = 2C^T(\hat{e})\hat{e}; \quad (13a)$$

$$\hat{\omega} = 2B^T(\hat{e})\hat{e} = 2C(\hat{e})\hat{e} \quad (13b)$$

여기서, 4×4행렬 A, B, C는 다음과 같이 정의된다.

$$A(\hat{e}) = \begin{bmatrix} e_0 & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & e_0 \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix}; B(\hat{e}) = \begin{bmatrix} e_0 & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & e_0 \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix};$$

$$C(\hat{e}) = \begin{bmatrix} e_0 & \mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & -e_0 \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \quad (14a,b,c)$$

각속도는  $\hat{\omega}^*$ 와  $\hat{\omega}$ 에서 스칼라 성분인 첫 번째 매개변수  $\omega_0^*$ 와  $\omega_0$ 는 단위 4원수라는 정규성(unit normality) 때문에 0이며 다음의 관계식이 성립한다.

$$A(\hat{e})A^T(\hat{e}) = B(\hat{e})B^T(\hat{e}) = C(\hat{e})C^T(\hat{e}) = |\hat{e}|^2 U_4 \quad (15)$$

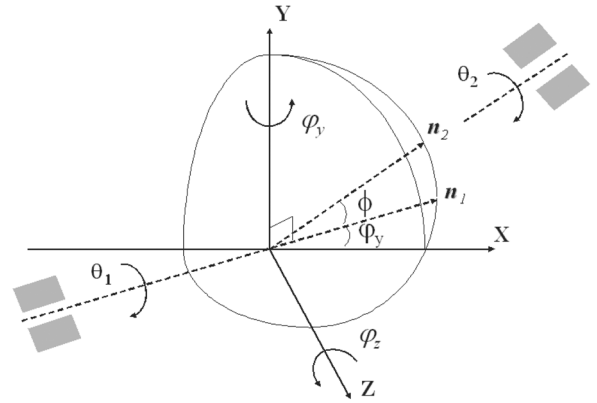


그림 2 Y축에 대하여 회전하는 평면의 운동

$$\omega_o^* = \omega_o = 2(e_o \dot{e}_o + \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{e}}) = 2\hat{e}^T \dot{\hat{e}} = 0 \quad (16)$$

여기서,  $|\hat{e}|^2$ ,  $U_4$ 는 대각 원소가 1인 단위행렬이다.  $A(\hat{e})$ 과  $B(\hat{e})$ 은 직교 연산자이므로 역으로 오일러 매개변수를 식 (17a,b)로부터 계산할 수 있다.

$$\hat{e} = \frac{1}{2} A(\hat{e})\hat{\omega}^*, \hat{e} = \frac{1}{2} B(\hat{e})\hat{\omega} \quad (17a,b)$$

그림 2와 같이 원동축은 벡터  $\mathbf{n}_1$ 방향, 종동축은  $\mathbf{n}_2$ 방향으로 평면 외에서 회전을 할 때 각각의 4원수를  $\hat{e}_1$ 과  $\hat{e}_2$ 으로 표현하면 다음과 같다.

$$\hat{e}_1^T = \begin{bmatrix} c\theta_1/2 & s\theta_1/2 c\phi_y & 0 & -s\theta_1/2 s\phi_y \end{bmatrix} \quad (18a)$$

$$\hat{e}_2^T = \begin{bmatrix} c\theta_2/2 & s\theta_2/2 c\phi_y & s\theta_2/2 s\phi & -s\theta_2/2 c\phi_y \end{bmatrix} \quad (18b)$$

벡터  $\mathbf{n}_1$ 으로 회전하여 초기 원동축의 십자부재 Y축이 y축으로 변하였고, 마찬가지로 벡터  $\mathbf{n}_2$ 로 회전하여 초기 종동축의 십자부재 Z축이 z축으로 변하였을때 다음 식이 성립한다.

$$\mathbf{y} = R(\hat{e}_1)\mathbf{Y}; \mathbf{Y}^T = [0 \quad 1 \quad 0] \quad (19a,b)$$

$$\mathbf{z} = R(\hat{e}_2)\mathbf{Z}; \mathbf{Z}^T = [0 \quad 0 \quad 1] \quad (20a,b)$$

식 (12a,b)를 회전텐서  $R(\hat{e})$ 을 행렬로 표현하면 식 (21)과 같고, 이를 식 (19a,b)와 (20a,b)에 적용하면 단위 벡터  $\mathbf{Y}$ 와  $\mathbf{Z}$ 가 회전중에 변한 벡터  $\mathbf{y}$ 와  $\mathbf{z}$ 의 성분을 식 (22a,b)와 같이 구할 수 있다.

$$R(\hat{e}) = 2 \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - 1/2 & e_1 e_2 - e_0 e_3 & e_1 e_3 + e_0 e_2 \\ e_1 e_2 + e_0 e_3 & e_0^2 + e_2^2 - 1/2 & e_2 e_3 - e_0 e_1 \\ e_1 e_3 - e_0 e_2 & e_2 e_3 + e_0 e_1 & e_0^2 + e_3^2 - 1/2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{y}^T = [s\theta_1 s\varphi_y \quad c\theta_1 \quad s\theta_1 c\varphi_y] \quad (22a)$$

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} -s\theta_2 c\phi s\varphi_y \\ -(1-c\theta_2)c\phi s\varphi_y - s\theta_2 c\phi c\varphi_y \\ (1+c\theta_2) + (1-c\theta_2)c^2\phi s^2\varphi_y - 1 \end{Bmatrix} \quad (22b)$$

회전중 어느 때라도 만족하는 십자부재의 직교조건  $\mathbf{y} \perp \mathbf{z}$ 로부터 다음의 구속식이 유도된다.

$$\alpha(\phi, \theta_1, \varphi_y) s\theta_2 + \beta(\phi, \theta_1, \varphi_y) c\theta_2 = \gamma(\phi, \theta_1, \varphi_y) \quad (23)$$

여기서, 계수  $\alpha, \beta, \gamma$ 는 식 (24a,b,c)과 같이 주어지며  $\theta_2$ 는 식 (25)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \alpha(\phi, \theta_1, \varphi_y) &= s\phi s\theta_1 s\varphi_y - c\phi s\theta_1 c\varphi_y; \\ \beta(\phi, \theta_1, \varphi_y) &= s\phi c\theta_1 s\varphi_y + s\theta_1 c\varphi_y; \\ \gamma(\phi, \theta_1, \varphi_y) &= s\phi c\theta_1 s\varphi_y \end{aligned} \quad (24a,b,c)$$

$$\theta_{2q} = \sin^{-1} \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha} \quad (25)$$

식 (25)를 시간에 대하여 미분하면 중동축의 각속도  $\omega_{2q}$ 는 다음과 같이 구하여 진다.

$$\begin{aligned} \omega_{2q} &= \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}} D(\phi, \theta_1, \varphi_y, \omega_1, \dot{\phi}_y) \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} E(\phi, \theta_1, \varphi_y, \omega_1, \dot{\phi}_y) \end{aligned} \quad (26)$$

여기서, 함수  $D$ 와  $E$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D(\phi, \theta_1, \varphi_y, \omega_1, \dot{\phi}_y) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ &\quad \times \{s\phi c\phi (-\omega_1 s\theta_1 s\varphi_y + \dot{\phi}_y c\theta_1 c\varphi_y)\} \\ &\quad - \frac{\gamma}{2(\alpha^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ &\quad \times \left\{ \begin{aligned} &\omega_1 s 2\theta_1 (1-c^2\phi)(s^2\phi s^2\varphi_y + c^2\varphi_y) \\ &+ \dot{\phi}_y s 2\varphi_y (s^2\phi - 1)(c^2\phi c^2\theta_1 + s^2\theta_1) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} E(\phi, \theta_1, \varphi_y, \omega_1, \dot{\phi}_y) &= \frac{1}{\alpha} \left\{ \omega_1 (-s\phi c\phi s\theta_1 s\varphi_y + c\theta_1 c\varphi_y) \right\} \\ &\quad + \dot{\phi}_y \left\{ s\phi c\phi c\theta_1 c\varphi_y - s\theta_1 s\varphi_y \right\} \\ &\quad - \frac{\beta}{\alpha^2} \left\{ \omega_1 (s\phi c\theta_1 s\varphi_y + c\phi s\theta_1 c\varphi_y) \right\} \\ &\quad + \dot{\phi}_y \left\{ s\phi s\theta_1 c\varphi_y + c\phi c\theta_1 s\varphi_y \right\} \end{aligned} \quad (27b)$$

또한 식 (13a,b)과 (16)을 적용하여 축  $i$ 에 해당하는 운동에너지  $K_{qi}$ 와 질량관성모멘트 행렬  $J_{qi}$ 는 식 (28a,b)와 같이 표현된다.

$$K_{qi} = 2\hat{e}^T A(\hat{e}) J_{qi} A^T(\hat{e}) \hat{e}; \quad (28a)$$

$$J_{qi} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{b \times 3}^T \\ \mathbf{0}_{3 \times l} & J_i \end{bmatrix} \quad (28b)$$

그리고 원동축 1의  $X$ 축과  $Y$ 축의 4원수를 각각  $\hat{e}_X^T, \hat{e}_Y^T$ 라고 하고 중동축 2의 경우를  $\hat{e}_x^T$ 라고 할 때 이를 식 (28)을 적용하여 운동에너지를 나타내면 다음과 같다.

$$\hat{e}_X^T = \begin{bmatrix} c\theta_1/2 & s\theta_1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (29a)$$

$$\hat{e}_Y^T = \begin{bmatrix} c\varphi_y/2 & 0 & s\varphi_y/2 & 0 \end{bmatrix}; \quad (29b)$$

$$\hat{e}_x^T = \begin{bmatrix} c\theta_1/2 & s\theta_1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29c)$$

$$\begin{aligned} K_{q1} &= 2I_1 \{ (-\dot{e}_{x0} e_{x1} + \dot{e}_{x1} e_{x0})^2 \\ &\quad + (-\dot{e}_{y0} e_{y1} + \dot{e}_{y1} e_{y0})^2 \} \\ &= \frac{1}{2} I_{1x} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{1y} \dot{\phi}_y^2 \end{aligned} \quad (30a)$$

$$K_{q2} = 2I_2 (-\dot{e}_{x0} e_{x1} + \dot{e}_{x1} e_{x0})^2 = \frac{1}{2} I_{2x} \dot{\theta}_2^2 \quad (30b)$$

따라서 4원수를 적용한 시스템의 전체 운동에너지  $K_q (= K_{q1} + K_{q2})$ 를 구할 수 있다.

### 3. 수치해석

기하학적인 물리량을 산출하기 위하여 식 (8b)에서  $I_x = 1\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $I_y = I_z = 0.5\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 로 질량관성모멘트의 양으로 하였고, 회전속도는  $\theta_1(t) = 10t \text{ rad}$ ,  $\varphi_y(t) = (\sin t)/10 \text{ rad}$ 로 정하였다. 이러한 수치모델에서 먼저 평면내 회전과 평면외

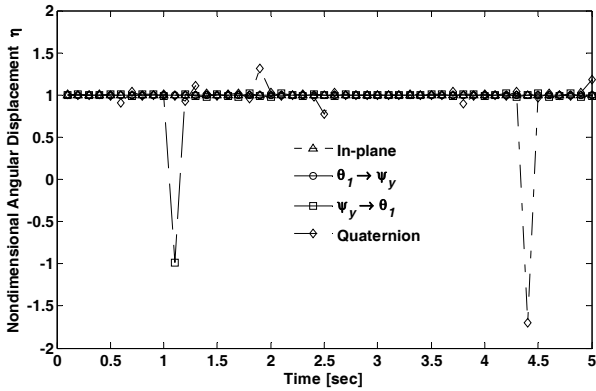


그림 3 평면내의 회전의 종동축 각변위 비교

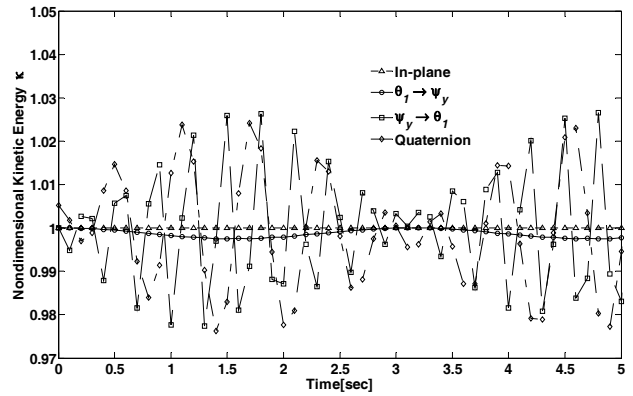


그림 5 평면내 에너지를 기준으로 한 평면내의 회전의 운동에너지 비교

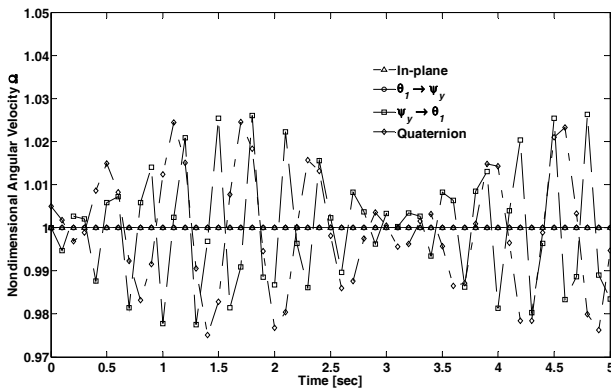


그림 4 평면내의 회전의 종동축 각속도 비교

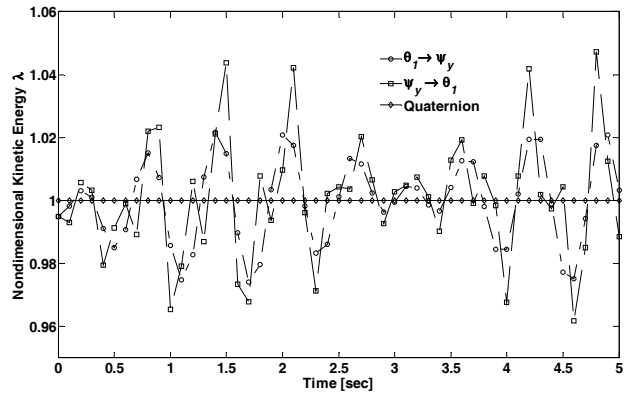


그림 6 4원수에 의한 운동에너지를 기준으로 한 평면외 회전의 운동에너지 비교

회전의 종동축 각변위(angular displacement)를 평면내 회전의 각변위  $\theta_{2ip}$ 에 대한 비  $\eta_{\theta\varphi} = \theta_{2\theta\varphi} / \theta_{2ip}$ ,  $\eta_{\varphi\theta} = \theta_{2\varphi\theta} / \theta_{2ip}$ ,  $\eta_q = \theta_{2q} / \theta_{2ip}$ 를 그림 3에 나타냈다.  $(X, Y)$ 평면외에서 회전할 때 원동축의 유한회전 순서가  $\theta_1 \rightarrow \varphi_y$ 인 경우에는  $\eta_{\theta\varphi} = 1$ 이며,  $\varphi_y \rightarrow \theta_1$ 인 경우는  $\theta_1 \rightarrow \varphi_y$ 인 경우보다 최대 약 200% 크게 관찰되었다. 이는 회전각 순서를 달리하는 유한회전에 의한 각변위는 일관성 없는 결과를 초래함을 알 수 있다. 평면내 회전시 종동축의 각속도  $\omega_{2ip}$ 에 대한 비  $\Omega_{\theta\varphi} = \omega_{2\theta\varphi} / \omega_{2ip}$ ,  $\Omega_{\varphi\theta} = \omega_{2\varphi\theta} / \omega_{2ip}$ ,  $\Omega_q = \omega_{2q} / \omega_{2ip}$ 를 그림 4에 나타냈다. 각변위  $\eta$ 에서 관찰한 바와 같이 평면외에서 유한회전에 의해서 산출한 각속도는 평면내의 결과 또는 진동형의 결과를 보여주고 있다. 상기 그림 3~5에서 살펴 본 바와 같이 4원수에 의한 방법은 오일러 각에 의한 평면외의 운동의 두 가지 해석방법과 비교하여 현저히 상이한 결과를 도출하고 있음을 알 수 있다.

시스템이 가지고 있는 에너지를 관찰하고자 평면내 에너지  $K_{ip}$ 를 기준으로 하여 평면내의 회전의 운동에너지 비  $\kappa_{\theta\varphi} = K_{\theta\varphi} / K_{ip}$ ,  $\kappa_{\varphi\theta} = K_{\varphi\theta} / K_{ip}$ ,  $\kappa_q = K_q / K_{ip}$ 를 그림 5에 나타냈다. 각속도가 상이함에 따라서 평면외의 유한회전의 경우에도 서로 상이한 운동에너지가 관찰됨을 알 수 있다. 이러

한 유한회전법에 의하여 계산되는 기하학적 물리량의 가변성을 없애고자 4원수를 기준으로 운동에너지를 다시 산정하였다. 4원수에 의한 운동에너지  $K_q$ 를 기준으로 하여 평면외 회전의 운동에너지 비  $\lambda_{\theta\varphi} = K_{\theta\varphi} / K_q$ ,  $\lambda_{\varphi\theta} = K_{\varphi\theta} / K_q$ 를 그림 6에 나타냈다. 여기에서 유한회전에 의한 결과는 최대 약  $\pm 5\%$ 의 편차를 보이고 있음을 알 수 있다. 4원수의 경우는 오직 회전축에 대하여 정식화함으로써 유한회전법을 사용했을 때보다 해석의 일관성을 유지하고 결과의 변동성을 방지할 수 있음을 암시하고 있다. 따라서 향후 시스템을 해석할 때 신뢰도가 높은 운동에너지로부터 도출될 운동방정식에 주의를 기울여야 하므로 4원수에 의한 해석이 더욱 합리적이고 볼 수 있다.

#### 4. 결 론

유니버설 조인트 시스템의 회전운동을 해석하는데 있어 회전 매개화 방법 중에서 오일러 각을 채택한 기존의 방법과 4원수(quaternion)를 사용한 방법을 비교하여 다음과 같은

결론을 얻었다.

- 1) 원동축이 회전할 때 이 축과 직각방향으로 세차운동하는 회전축이 동시에 존재하는 평면의 회전의 경우 오일러 각을 사용한 방법은 상이한 결과를 초래한다.
- 2) 오일러 각을 적용하여 얻은 종동축의 각변위와 각속도는 4원수 방법과 비교하여 결과치의 일관성이 결여되어 있음을 발견하였다.
- 3) 시스템의 운동에너지를 비교하면 오일러 각 방법이 4원수 방법보다 신뢰도가 떨어짐을 알 수 있다.
- 4) 향후 유니버설 조인트 시스템의 운동방정식을 도출하여 일관성이 보장된 동역학적 해석을 수행하려면 4원수를 적용한 방법이 더욱 유용하리라고 예측한다.

### 감사의 글

본 연구는 2008년도 금오공과대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구된 논문임.

### 참 고 문 헌

**박보용, 송창섭, 강효식** (1991) Universal Joint를 갖는 구동축 시스템의 비틀림 진동 감소를 위한 적정설계에 관한 연구, 한국정밀공학회지, 8(4), pp.137~145.

**윤성호** (2008) 로터 시스템 회전운동의 정식화 및 해석, 한국전산구조공학회지, pp.475~482.

**Al-Bedoor, B.O.** (1999) Dynamic Model of Coupled Shaft Torsional and Blade Bending Deformations in Rotors, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 169, pp.177~190.

**Bayrakceken H., Tasgetiren S., Yavuz I.** (2007) Two Cases of Failure in the Power Transmission System on Vehicles: A Universal Joint Yoke and a Drive Shaft, *Engineering Failure Analysis*, 14, pp.716~724.

**Dooley J.R., McCarthy J.M.** (1991) Spatial Rigid Body Dynamics using Dual Quaternion Components, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, CA, USA, pp.90~95.

**Fischer I.S., Freudenstein F.** (1984) Internal Force and Moment Transmission in a Cardan Joint With Manufacturing Tolerances, *Journal of Mechanisms Transmissions, and Automation in Design*, 106, pp.301~311.

**Geradin M., Cardona A.** (2001) Flexible Multibody Dynamics, *John Wiley and Sons*, p.327.

**Haug E.J.** (1989) Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems, Allyn and Bacon, p.498.

**Heyes A.M.** (1998) Automotive Component Failures, *Engineering Failure Analysis*, 5, pp.129~141.

**Hummel S.R.** (2000) Configuration Design and Optimization of Universal Joints with Manufacturing Tolerances, *Mechanism and Machine Theory*, 35, pp.463~476.

**Kato M., Ota H. Kim J.-R., Kato R.** (1997) Unstable Vibration of a Rotating Shaft Driven Through a Universal Joint, *The Korean Society of Mechanical Engineers Asia-Pacific Vibration Conference*, November, Korea, pp.236~241.

**Mazzei A.J., Scott R.A.** (2001) Principal Parametric Resonance Zones of Rotating Rigid Shaft Driven Through a Universal Joint, *Journal of Sound and Vibration*, 244, pp.555~562.

**Mazzei A.J., Scott R.A.** (2003) Effects of Internal Viscous Damping on the Stability of a Rotating Shaft Driven Through a Universal Joint, *Journal of Sound and Vibration*, 265, pp.863~885.

**Mohiuddin M.A., Khulief Y.A.** (1994) Modal Characteristics of Rotors using a Conical Shaft Finite Element, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 115, pp.125~144.

**Nelson, H.D.** (1980) A Finite Rotating Shaft Element using Timoshenko Beam Theory, *Journal of Mechanical Engineering Design*, 102, pp.793~803.

**Nikravesh P.E.** (1998) Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems, Prentice-Hall, p.370.

**Spring K.W.** (1986) Euler Parameters and the use of Quaternion Algebra in the Manipulation of Finite Rotations: A review, *Mechanism and Machine Theory*, 21, pp.365~373.

- 논문접수일 2009년 11월 23일
- 논문심사일  
1차 2009년 11월 27일  
2차 2010년 2월 3일
- 게재확정일 2010년 2월 9일