

비동질 탄성 무한공간에 대한 비례경계유한요소법의 동적강도행렬

Dynamic Stiffness of the Scaled Boundary Finite Element Method for Non-Homogeneous Elastic Space

이 계 희*
Lee, Gye-Hee

요 지

본 논문에서는 비동질 탄성무한공간에 대한 비례경계유한요소법의 동적강도행렬을 해석적으로 유도하였다. 해석영역의 비동질성은 비동질파라미터를 지수로 하는 멱함수로 고려하였다. 동적강도행렬은 진동수영역에서 다항식으로 점근전개한 후, 방사조건을 만족시키도록 하여 각 다항식의 계수를 구하는 과정을 통하여 유도되었다. 얻어진 동적강도행렬의 타당성을 검증하기 위해 정확해가 알려져 있는 대표적인 문제에 대하여 비동질파라미터의 값을 변화시키면서 수치해석을 수행하였다. 그 결과 유도된 동적강도행렬이 비동질공간에 대한 특성을 적절하게 반영하는 것으로 나타났다.

핵심용어 : 비례경계해석, 비동질 탄성 공간, 동적강도행렬, 점근전개

Abstract

In this paper, the dynamic stiffness of scaled boundary finite element method(SBFEM) was analytically derived to represent the non-homogeneous space. The non-homogeneous parameters were introduced as an exponential value of power function which denoted the non-homogeneous properties of analysis domain. The dynamic stiffness of analysis domain was asymptotically expanded in frequency domain, and the coefficients of polynomial series were determined to satisfy the radiational condition. To verify the derived dynamic stiffness of domain, the numerical analysis of the typical problems which have the analytical solution were performed as various non-homogeneous parameters. As results, the derived dynamic stiffness adequately represent the features of the non-homogeneous space.

Keywords : scaled boundary analysis, non-homogeneous elastic space, dynamic stiffness, asymptotic expansion

1. 서 론

지반과 같은 무한영역(unbounded domain)의 동역학적 거동에 대한 해석은 필연적으로 무한영역에 대한 근사과정을 포함하게 된다. 이러한 근사는 여러가지 방법으로 수행되는데 대표적인 방법은 경계의 효과가 무시될 수 있는 지점까지 해석영역을 확장하는 것이다.

그러나 동적인 해석은 경계에서의 파의반사가 일어나기 때문에 정적인 경우에 비해 큰 해석영역이 필요하다. 이런 점에서 파의 반사를 적절히 처리하여 해석영역을 구조물부분으로 한정하고, 그 외 부분은 무한영역의 특성을 고려하여 해

석을 수행하는 방법들이 개발되었다(김재민 등, 2000; 윤정방 등, 2007).

비례경계유한요소법(scaled boundary finite element method)은 이러한 접근법의 하나로 비례중심(scaling center)이라 불리는 대칭점을 기준으로 해석영역의 뒹음을 이용하여 방정식을 근사하는 해석기법이다(Wolf, 2003). 이 방법은 원래 동적지반 구조물상호작용의 해석을 위하여 개발되었지만, 반해석적(semi-analytical)인 특성을 이용하여 다양한 문제에 적용하려는 시도(Deeks 등, 2003; Yang, 2006)가 계속되었고 특히 정적인 문제에서는 해석법이 갖는 여러 가지 특성들을 이용한 해석법 즉, 적응적 해석(Doherty 등, 2005;

* 책임저자, 목포해양대학교 해양시스템공학부 교수
Tel: 061-240-7314. ; Fax: 061-240-7301
E-mail: lghlsk@mmu.ac.kr

* 이 논문에 대한 토론을 2010년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2010년 8월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

Ekevid 등, 2006)이나 유사경계를 갖는 경우의 해석(Deeks, 2002b) 등이 시도되었다. 또한 이 해석법의 가장 큰 특징이라 할 수 있는 무한영역에 대한 접근법을 활용하기 위해 연구가 진행되고 있는데, 이 중 하나는 일정하지 않은 물성치를 가지는 비동질공간에 대한 해석으로 이 방법의 개발초기부터 중요한 고려사항의 하나로 연구되었다(Wolf 등, 1996; Doherty 등, 2003).

비동질 공간에서의 물성치의 변화를 비례중심을 기준으로 방사방향의 멱함수로 나타내고, 이를 이용하여 해석공간의 운동방정식을 유도하는 과정은 Doherty 등(2003) 등에 의해서 처음 시도되었다. 이 연구에서는 해저면에 매입되는 원형의 기초를 해석하기 위하여 축대칭영역을 가정하고 식을 유도하였다. 그 후 실제 공학적인 해석에 널리 사용되는 반무한평면에 대한 적용 및 거동특성에 대한 연구(이계희, 2007)와 무한요소를 이용하여 초기치를 갖는 반무한평면에 대한 해석기법이 연구되었다(Lee 등, 2008). 이러한 기존의 연구에서는 비동질무한공간 및 동적강도행렬에 대한 각각의 접근은 이루어졌으나, 이 두 가지 문제를 통합한 접근법은 아직 시도되지 않았다. 따라서 본 연구에서는 이들 연구의 연장선에서 비동질무한공간에 대한 동적강도행렬의 유도에 대해 서술하였다. 비동질무한공간에 대한 물성치의 변화는 기존의 접근방법과 동일하게 비동질파라미터를 지수로 하는 멱함수를 이용하여 나타냈고 동적강도행렬은 진동수영역에서 점근전개한 다항식으로 가정하고, 이 다항식이 방사조건을 만족시키도록 다항식의 계수를 산정하였다.

본 논문의 구성은 2절에서 비례경계변환과 비례경계유한요소법의 동적강도계수에 대한 기본식을 간략히 설명하고, 3절에서는 비례중심에 대한 방사방향의 비동질 물성치의 변화를 표현하고, 이에 대해 점근전개를 이용하여 동적강도행렬을 유도하였다. 4절에서 유도된 동적강도행렬의 타당성을 검증하기 위해 정확해가 알려져 있는 대표적인 문제에 대하여 비동질파라미터의 값을 변화시키면서 수치해석을 수행하였다. 5절에서는 결론을 제시하였다.

2. SBFEM의 기본식

2.1 기본방정식

비례경계유한요소법(scaled boundary finite element method)은 해석영역의 경계방향(circumferential direction)은 유한요소법과 같은 방식으로 이산화되고, 비례중심을 기준으로 방사방향(radial direction)으로는 비례계수를 이용하여 나타낸다. 직교좌표계를 비례경계좌표계로 바꾸는 것은 비

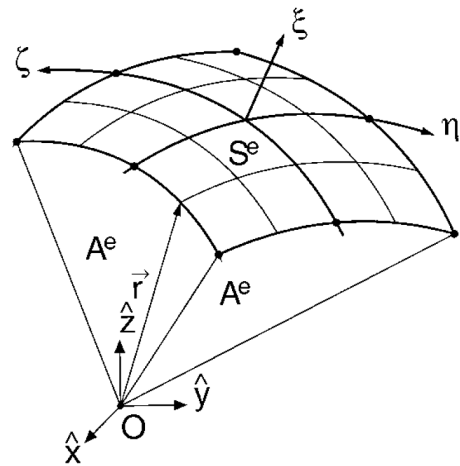


그림 1 3차원공간에 대한 비례경계변환(Wolf, 2003)

례경계변환(scaled boundary transformation)이라 부르며 기본적으로 닳은 꼴의 성질을 이용한 것이다. 경계에 대한 이산화를 이용해 임의의 형태를 가진 경계에 대하여 불연속적인 경계조건을 도입할 수 있다.

비례경계좌표계의 중심은 비례중심(scaling center)이라고 불리며 이 비례중심과 경계사이에는 다른 경계가 올 수 없다. 유한영역에서 비례중심은 영역 내에 존재하고 경계의 한 점으로 선택할 수도 있다. 이 경우 해석영역은 비례중심과 경계를 연결하는 선상에 있는 측면(side face)과 이산화된 경계가 이루는 폐곡선의 내부이다. 무한영역의 경우에 비례중심은 영역밖에 있다.

앞에서 언급했듯이 비례경계변환에서는 경계 S만 유한요소와 같은 방법으로 이산화되며, 이 요소를 비례경계유한요소라 부른다. 전형적인 비례유한요소는 그림 1에서 표면 S^e를 분할하는 요소이다. 경계를 제외한 다른 영역은 비례중심으로부터의 무차원 거리 ξ 를 이용하여 닳은꼴로 나타낸다. 따라서 경계에서는 $\xi=1$ 이고, 비례중심에서는 $\xi=0$ 이다. 해석영역은 유한영역에 대해서는 $0 \leq \xi \leq 1$ 이고 무한영역에 대해서는 $1 \leq \xi < \infty$ 이다. 이 좌표계는 ξ 와 경계방향 좌표 η, ζ 로 구성 되어있으며, 경계상에서의 변위는 유한요소의 형상함수 $[N(\eta, \zeta)]$ 를 이용하여 나타낸다. 이 형상함수는 일반적인 유한요소에서 사용되는 것과 동일하다. 경계이외의 다른 점에서의 변위는 경계에서의 변위를 ξ 의 비에 따라 변환하고, 이를 경계와 동일한 형상함수로 보간한다.

$$\{u(\xi, \eta, \zeta)\} = [N(\eta, \zeta)]\{u(\xi)\} \quad (1)$$

따라서 경계와 비례중심을 잇는 선상에서의 변위 $u(\xi)$ 는 방사좌표 ξ 의 함수로 나타나며 해석적으로 풀 수 있다.

이와 같은 비례경계변환 후 일반적인 유한요소법과 같이

가중잔여치법이나 역학적인 방법으로 해당 미분방정식을 풀면 탄성체의 변위방정식인 식 (2)와 같은 형태의 기본방정식을 얻을 수 있다.

$$[E^0]\xi\{u(\xi)\}_{,\xi\xi} + ([E^0] - [E^1] + [E^1]^T)\xi\{u(\xi)\}_{,\xi} - [E^2]\{u(\xi)\} + \omega^2\xi^2[M^0]\{u(\xi)\} + \{F(\xi)\} = 0 \quad (2)$$

여기서, $[E^0]$, $[E^1]$, $[E^2]$ 는 각각 시스템의 계수행렬이고 $[M^0]$ 와 $\{F(\xi)\}$ 는 시스템의 질량과 외력벡터이다. 각 식들의 상세한 유도과정 및 정의는 참고문헌(Wolf, 2003)에서 참조할 수 있다.

비례경계유한요소법에서는 경계만 이산화되기 때문에 유한요소법의 개념을 경계요소법에 도입했다고 할 수 있다. 요약하면 비례경계유한요소법은 닦은 꼴을 이용한 반해석적인 경계요소법이라 할 수 있다.

2.2 동적강도행렬

임의의 ξ 에 대한 동적강도행렬 $[S(\omega, \xi)]$ 는 다음 식과 같이 나타낸다(Wolf, 2003).

$$\pm [S(\omega, \xi)]\{u(\xi)\} \mp \{R^F(\xi)\} = [E^0]\xi^2\{u(\xi)\}_{,\xi\xi} + [E^1]^T\xi\{u(\xi)\} \quad (3)$$

여기서, $\{R^F(\xi)\}$ 는 절점하중벡터이다. 이중부호는 각각 유한영역과 무한영역에 대한 식을 나타낸다. 식 (3)을 미분하면 다음과 같다.

$$\pm [S(\omega, \xi)]_{,\xi}\{u(\xi)\} \pm [S(\omega, \xi)]\{u(\xi)\}_{,\xi} \mp \{R^F(\xi)\}_{,\xi} - [E^0]\xi^2\{u(\xi)\}_{,\xi\xi} - (2[E^0] + [E^1]^T)\xi\{u(\xi)\}_{,\xi} - [E^1]^T\{u(\xi)\} = 0 \quad (4)$$

식 (2)와 식 (4)를 더하면 다음과 같다.

$$\pm [S(\omega, \xi)]_{,\xi}\{u(\xi)\} + (\pm [S(\omega, \xi)] - \xi[E^1])\{u(\xi)\}_{,\xi} \mp \{R^F(\xi)\}_{,\xi} - [E^2]\{u(\xi)\} + \omega^2[M^0]\xi^2\{u(\xi)\} + \{F(\xi)\} = 0 \quad (5)$$

식 (5)를 $u(\xi)_{,\xi}, u(\xi)$ 에 대해서 정리하고 이들 임의함수의 계수가 0이 되도록 해를 산정하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$(\pm [S(\omega, \xi)] - \xi[E^1])(\xi[E^0])^{-1}(\pm [S(\omega, \xi)] - \xi[E^1]^T) \pm \xi[S(\omega, \xi)]_{,\xi} - [E^2] + \omega^2\xi^3[M^0] = 0 \quad (6a)$$

$$\xi\{R^F(\xi)\}_{,\xi} + (\pm [S(\omega, \xi)] - \xi[E^1])(\xi[E^0])^{-1} \{R^F(\xi)\} = \pm \xi\{F(\xi)\} \quad (6b)$$

이들 식의 경계조건은 유한영역의 경우 $\{R^F(\xi=0)\} = 0$, 무한영역의 경우 $\{R^F(\xi=\infty)\} = 0$ 이다.

동적탄성계수의 공간에 대한 미분 값은 다음 식과 같다.

$$\xi[S(\omega, \xi)]_{,\xi} = [S(\omega, \xi)] + \omega[S(\omega, \xi)]_{,\omega} \quad (7)$$

식 (7)을 식 (6a)에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$(\pm [S(\omega, \xi)] - \xi[E^1])(\xi[E^0])^{-1}(\pm [S(\omega, \xi)] - \xi[E^1]^T) - \xi[E^2] + [\pm S(\omega, \xi)] + \omega[S(\omega, \xi)]_{,\omega} + \omega^2\xi^3[M^0] = 0 \quad (8)$$

이를 무한영역에 대해 적용하면 무한영역에 대한 동적강도행렬 $[S^\infty(\omega)]$ 는 다음과 같다.

$$([S^\infty(\omega)] + [E^1])[E^0]^{-1}([S^\infty(\omega)] + [E^1]^T) - [S^\infty(\omega)] - \omega[S^\infty(\omega)]_{,\omega} - [E^2] + \omega^2[M^0] = 0 \quad (9)$$

2차원 문제에 대해서도 유사한 과정을 거쳐 다음과 같이 무한영역에 대한 동적강도행렬을 구성할 수 있다.

$$([S^\infty(\omega)] + [E^1])[E^0]^{-1}([S^\infty(\omega)] + [E^1]^T) - \omega[S^\infty(\omega)]_{,\omega} - [E^2] + \omega^2[M^0] = 0 \quad (10)$$

각 차원에 대한 식을 통합하기 위해 차원상수 $s (=2$ 또는 $=3)$ 을 도입하면 무한영역의 동적강도계수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\xi^{2-s}[S^\infty(\omega, \xi)] + [E^1])[E^0]^{-1}(\xi^{2-s}[S^\infty(\omega, \xi)] + [E^1]^T) - (s-2)\xi^{2-s}[S^\infty(\omega, \xi)] - \bar{\xi}(\xi^{2-s}[S^\infty(\omega, \xi)]), \bar{\xi} - [E^2] + \bar{\xi}^2[M^0] = 0 \quad (11)$$

여기서, $\bar{\xi} = \xi\omega$ 이다.

3. 동적강도행렬 유도

3.1 비동질공간의 물성치변화

해석영역의 비동질 물성치를 나타내기 위하여 해석영역의

물성치가 비동질 파라미터를 지수로 하고 비례중심으로부터의 거리 ξ 의 멱함수로 나타난다고 가정하자. 비동질파라미터가 임의함수로 변화하는 경우에는 이들 멱함수의 조합으로 물성치의 변화를 나타낼 수 있다. 이러한 가정에 따라 탄성계수와 전단탄성계수는 같은 비동질파라미터 g 를 지수로 갖는 멱함수로 나타낼 수 있다.

$$E(\xi) = E_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^g = E_0 \xi^g \quad (12a)$$

$$G(\xi) = G_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^g = G_0 \xi^g \quad (12b)$$

여기서, 동일한 포아슨 비 ν 를 가정하면 탄성행렬 $[D]$ 는 다음과 같다.

$$[D(\xi)] = [D_0] \xi^g \quad (13)$$

해석영역의 밀도는 다음과 같이 변한다.

$$\rho(\xi) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^m = \rho_0 \xi^m \quad (14)$$

여기서, 아래첨자 0은 경계($\xi=1, r=r_0$)에서의 물성치를 나타낸다. 지수 g 와 m 은 실수이며, 양수나 음수가 사용될 수 있다.

이러한 물성치변화는 방사방향에 국한되고 원주방향에 대해서는 일반적인 유한요소법과 같다. 단 이러한 변화는 방사방향의 요소내에서 이루어져야 한다. 이러한 물성치의 변화를 고려한 식을 탄성방정식에 대입하고 가상일의 원리 등에 의하여 식을 유도하면 방사방향물성치의 변화를 고려한 변위방정식을 얻을 수 있다(Deeks 등, 2002; 이계희, 2007).

차원상수 s 를 이용하여 2차원과 3차원에 대한 식을 통합하면 무한영역에 대하여 방사방향의 물성치변화를 고려한 식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\{R(\xi)\} = -[E^0] \xi^{g+s+1} \{u(\xi)\}_{,\xi} - [E^1]^T \xi^{g+s-2} \{u(\xi)\} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & [E^0] \xi^{g+2} \{u(\xi)\}_{,\xi\xi} + ((g+s-1)[E^0] - [E^1] + [E^1]^T) \\ & \xi^{g+1} \{u(\xi)\}_{,\xi} + ((g+s-2)[E^1]^T - [E^2]) \xi^g \{u(\xi)\} \\ & + \omega^2 [M_0] \xi^{m+2} \{u(\xi)\} + \xi^2 \{F^b(\xi)\} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

유한영역에 대해서는 식 (15)의 우변의 부호가 바뀌고 식 (16)은 그대로 적용된다.

모든 계수행렬 $[E^0], [E^1], [E^2], [M^0]$ 는 경계 $\xi=1$ 에서의 물성치로 구성된다. 식 (15)와 식 (16)의 일반적인 형태는 균질한 물성치를 가진 경우와 동일하지만 ξ 의 지수와 계수에 차이가 발생한다.

비동질무한영역에서의 비례경계유한요소법의 동적강도행렬의 유도는 균질한 물성치에 대한 유도과정과 유사하다. 이러한 영역에 대한 무차원동적강도행렬은 다음과 같다.

$$[S^\infty(\omega, \xi)] = G_0 r_0^{s-2} \xi^{g+s-2} [\overline{S^\infty}(a)] \quad (17)$$

여기서, 임의의 ξ 에 대한 무차원진동수는 다음과 같다.

$$a = \frac{\omega r_0}{c_{s0}} \xi^{1-\frac{g}{2}+\frac{m}{2}} \quad (18)$$

여기서, 경계에서의 전단파 속도 $c_{s0} = \sqrt{G_0/\rho_0}$ 이다. 따라서 체적력에 의해 절점력이 소거되는 무한영역에 대한 비례경계유한요소법의 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & ([S^\infty(\omega)] + [E^1])[E^0]^{-1}([S^\infty(\omega)] + [E^1]^T) - (g+s-2) \\ & [S^\infty(\omega)] - (1 - \frac{g}{2} + \frac{m}{2})\omega[S^\infty(\omega)]_{,\omega} - [E^2] + \omega^2[M^0] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

유한영역에 대해서는 이에 상응하는 관계는 $[S^\infty(\omega)] = -[S^b(\omega)]$ 이다.

식 (19)는 방사방향의 재료물성치가 균일한 경우와 같은 형태를 가지고 있으므로 균질한 해석영역에 적용된 해석기법을 그대로 사용할 수 있다.

3.2 접근전개

비례경계유한요소법에서 무한영역에 대해서는 질량행렬을 정의할 수 없기 때문에 동적강도행렬의 산정과정은 유한영역의 경우보다 복잡하다. 유일해를 얻기 위해서는 무한점에서의 경계조건이 모델링되어야 한다. 이를 방사조건(radiation condition)이라고 부르고 동적탄성문제에서는 무한점에서 영역내로 에너지가 유입되지 않는 현상, 즉 경계에서 파의 반사가 일어나지 않는 조건을 의미한다.

방사조건은 동적강도행렬이 $\omega \rightarrow \infty$ 인 경우이므로 동적강도행렬 $\xi^{2-c}[S^\infty(\omega, \xi)]$ 는 고진동수 영역에서 $i\xi$ 에 대한 다항식으로 전개하고 이를 내림차순으로 쓰면 다음과 같다(Wolf, 2003).

$$\xi^{2-e}[S^\infty(\omega, \xi)] \approx i\bar{\xi}[C_\infty] + [K_\infty] + \sum_{j=1}^k \frac{1}{(i\bar{\xi})^j} [A_j] \quad (20)$$

오른편의 처음 두 항은 상수 감쇠행렬 $[C_\infty]$ 와 상수 강도행렬 $[K_\infty]$ 를 나타낸다(첨자 ∞ 는 $\bar{\xi} \rightarrow \infty$ 나 $\xi=1$ 인 경우 $\omega \rightarrow \infty$ 를 나타낸다). 이 식에서 모든 계수행렬 ($[C_\infty]$, $[K_\infty]$, $[A_j]$, ($j=1, 2, \dots, k$))은 미지수이다. 다음과 같은 고유치문제로의 변환을 적용하면 이 식을 간단하게 할 수 있다.

$$[M^\eta][\Phi] = [E^\eta][\Phi][A^2] \quad (21)$$

$[M^\eta]$ 와 $[E^\eta]$ 는 양정부호이고 양의 고유치행렬 $[A^2]$ 을 얻는다. 고유치벡터 $[\Phi]$ 는 다음과 같이 정규화된다.

$$[\Phi]^T [E^\eta] [\Phi] = [I] \quad (22)$$

이로부터

$$[\Phi]^T [M^\eta] [\Phi] = [A^2] \quad (23)$$

를 얻고, 여기서

$$[E^\eta]^{-1} = [\Phi][\Phi]^T \quad (24)$$

이다. 식 (19)의 좌측에 $[\Phi]^T$ 를 곱하고 우측에 $[\Phi]$ 를 곱하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & ([s^\infty(\bar{\xi})] + [e^1])([s^\infty(\bar{\xi})] + [e^1]^T) - (g+s-2)[s^\infty(\bar{\xi})] \\ & - \left(\frac{m}{2} - \frac{g}{2} + 1\right) \bar{\xi} [s^\infty(\bar{\xi})]_{,\xi} - [e^2] + \bar{\xi}^2 [A^2] = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

여기서,

$$[s^\infty(\bar{\xi})] = [\Phi]^T \xi^{2-s} [S^\infty(\omega, \xi)] [\Phi] \quad (26)$$

이고

$$[e^1] = [\Phi]^T [E^1] [\Phi] \quad (27a)$$

$$[e^2] = [\Phi]^T [E^2] [\Phi] \quad (27b)$$

이다. 식 (20)을 식 (26)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$[s^\infty(\bar{\xi})] \approx i\bar{\xi}[c_\infty] + [k_\infty] + \sum_{j=1}^m \frac{1}{(i\bar{\xi})^j} [a_j] \quad (28)$$

여기서,

$$[c_\infty] = [\Phi]^T [C_\infty] [\Phi] \quad (29a)$$

$$[k_\infty] = [\Phi]^T [K_\infty] [\Phi] \quad (29b)$$

$$[a_j] = [\Phi]^T [A_j] [\Phi] \quad (29c)$$

식 (28)에서 점근전개항의 수를 3개($k=3$)로 가정하면 미분항은 다음 식과 같다.

$$[s^\infty(\bar{\xi})]_{,\xi} = i[c_\infty] + \frac{ia_1}{\xi^2} + \frac{2a_2}{\xi^3} - \frac{3ia_3}{\xi^4} \quad (30)$$

식 (28)과 식 (30)을 식 (25)에 대입하고 $i\bar{\xi}$ 의 내림차순으로 정리하면 다음을 얻는다.

$$(i\bar{\xi})^2 C_1 + i\bar{\xi} C_2 + C_3 + \frac{1}{i\bar{\xi}} C_4 + \frac{1}{(i\bar{\xi})^2} C_5 + C_{high} = 0 \quad (31)$$

여기서, $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_{high}$ 는 각각 $i\bar{\xi}$ 의 2차항부터 제곱의 역수항까지의 계수행렬과 이외의 고차항에 대한 계수행렬이다.

$$C_1 = ([c_\infty]^2 - [A^2]) \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} C_2 = & ([c_\infty][k_\infty] + [k_\infty][c_\infty] + [c_\infty][e^1]^T \\ & + [e^1][c_\infty] - (s + \frac{m}{2} + \frac{g}{2} - 1)[c_\infty]) \end{aligned} \quad (32b)$$

$$\begin{aligned} C_3 = & [c_\infty][a_1] + [a_1][c_\infty] + ([k_\infty] + [e^1])([k_\infty] + [e^1]^T) \\ & - (s + g - 2)[k_\infty] - [e^2] \end{aligned} \quad (32c)$$

$$\begin{aligned} C_4 = & [c_\infty][a_2] + [a_2][c_\infty] + ([k_\infty] + [e^1])[a_1] + [a_1]([k_\infty] + [e^1]^T) \\ & - (s - \frac{m}{2} + \frac{3g}{2} - 3)[a_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 = & [c_\infty][a_2] + [a_2][c_\infty] + ([k_\infty] + [e^1])[a_1] + [a_1]([k_\infty] + [e^1]^T) \\ & - (s - \frac{m}{2} + \frac{3g}{2} - 3)[a_1] \end{aligned} \quad (32d)$$

$$\begin{aligned} C_5 = & [c_\infty][a_3] + [a_3][c_\infty] + ([k_\infty] + [e^1])[a_2] + [a_2]([k_\infty] + [e^1]^T) \\ & - (s - m + 2g - 4)[a_2] + [a_1]^2 \end{aligned} \quad (32e)$$

동일한 방식으로 고차항들의 계수행렬을 산정할 수 있다. 그러나 방사조건은 $\bar{\xi} \rightarrow \infty$ 에서의 경계조건이기 때문에 $\frac{1}{(i\bar{\xi})^n}$ 의 계수 중 n 의 값이 증가 할수록 C_{high} 의 영향은 급속히 작아진다.

각 계수행렬들은 임의의 함수에 대해 성립해야하므로 0의 값을 가져야 한다. 이를 식 (32a)에 적용하면 다음과 같은

식을 얻는다.

$$[c_{\infty}]^2 = [A^2] \quad (33)$$

$[A^2]$ 의 대각행렬의 양의 근을 취하면 다음과 같다.

$$[c_{\infty}] = [A] \quad (34)$$

감쇠행렬 $[C_{\infty}]$ 는 식 (29a)를 따라 다음과 같이 나타난다.

$$[C_{\infty}] = ([\Phi]^{-1})^T [A] [\Phi]^{-1} \quad (35)$$

각 $[A]$ 이 계수는 양수이기 때문에 $[C_{\infty}]$ 는 양정부호이다. 식 (20)에서 $\xi \rightarrow \infty$ 를 고려하면 $[C_{\infty}]$ 는 동적강도행렬의 허수부에 비례하고 따라서 이 또한 양정부호이다. 에너지 전달률 N 은 양수이고(식 (26)) 극한에서 방사조건을 만족시킨다.

식 (32b)에 식 (34)를 대입하면 다음과 같다.

$$[A][k_{\infty}] + [k_{\infty}][A] = -[A][e^1]^T - [e^1][A] + (s + \frac{m}{2} + \frac{g}{2} - 1)[A] \quad (36)$$

$[k_{\infty}]$ 에 대한 선형 방정식은 Lyapunov방정식으로 나타나며, 각 $k_{\infty kl}$ 의 해는 다음과 같은 것으로 알려져 있다(Wolf, 2003).

$$k_{\infty kl} = \frac{1}{A_k + A_l} (-A_k e_{kl}^1 - A_l e_{kl}^1 + (s + \frac{m}{2} + \frac{g}{2} - 1)A_k \delta_{kl}) \quad (37)$$

여기서, δ_{kl} 은 Kronecker delta함수이다. (=1 if $k=1, =0$ if $k \neq l$) 스프링상수 $[k_{\infty}]$ 는 식 (29b)로부터 다음과 같이 계산된다.

$$[K_{\infty}] = ([\Phi]^{-1})^T [k_{\infty}] [\Phi]^{-1} \quad (38)$$

식 (32c)는 기지의 $[k_{\infty}]$ 와 식 (34)를 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$[A][a_1] + [a_1][A] = -([k_{\infty}] + [e^1])([k_{\infty}] + [e^1])^T + (s + g - 2)[k_{\infty}] + [e^2] \quad (39)$$

$[a_1]$ 에 대한 식은 식 (36)과 동일한 형태를 갖는다.

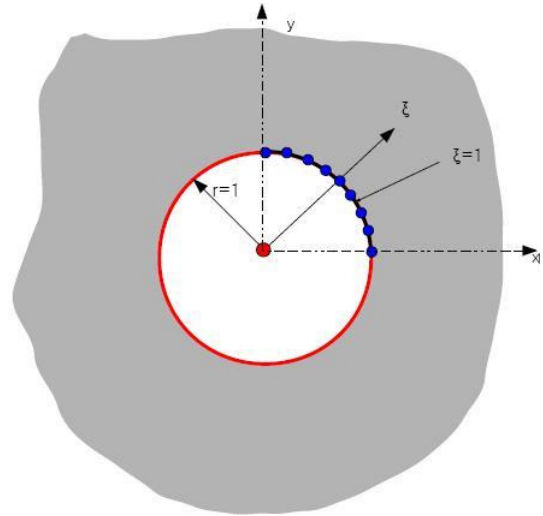


그림 2 평면내의 원형공동

유사하게 $[a_2], [a_3]$ 도 기지의 $[c_{\infty}] = [A], [k_{\infty}], [a_i]$ 으로부터 식 (32d)로 결정할 수 있다.

$$[A][a_2] + [a_2][A] = -([k_{\infty}] + [e^1])[a_1] - [a_1]([k_{\infty}] + [e^1])^T + (s - \frac{m}{2} + \frac{3g}{2} - 3)[a_1] \quad (40a)$$

$$[A][a_3] + [a_3][A] = -([k_{\infty}] + [e^1])[a_2] - [a_2]([k_{\infty}] + [e^1])^T + (s - m + 2g - 2)[a_2] - [a_1]^2 \quad (40b)$$

계수행렬 $[A_j]$ 는 식 (29c)로부터 다음과 같다.

$$[A_j] = ([\Phi]^{-1})^T [a_j] [\Phi]^{-1} \quad (41)$$

$[C_{\infty}], [K_{\infty}], [A_j]$ 를 계산한 후의 점근적 거동은 식 (20)을 따른다.

경계($\xi = 1$)에서의 고진동수 점근전개(식 (20))는 다음과 같다.

$$[S^{\infty}(\omega)] \approx i\omega [C_{\infty}] + [K_{\infty}] + \sum_{j=1}^k \frac{1}{(i\omega)^j} [A_j] \quad (42)$$

4. 수치예제

본장에서는 앞에서 유도된 식에 의해서 동적강도행렬을 구성하고 강도와 질량에 대한 비동질 파라미터의 영향을 분석하였다. 해석이 수행된 예제는 평면내의 원형공동의 횡방향 변위가 가해진 경우로 진동수 영역에서 해석이 수행되었으며 탄성계수와 밀도에 대한 비동질 파라미터의 변화가 동적강도

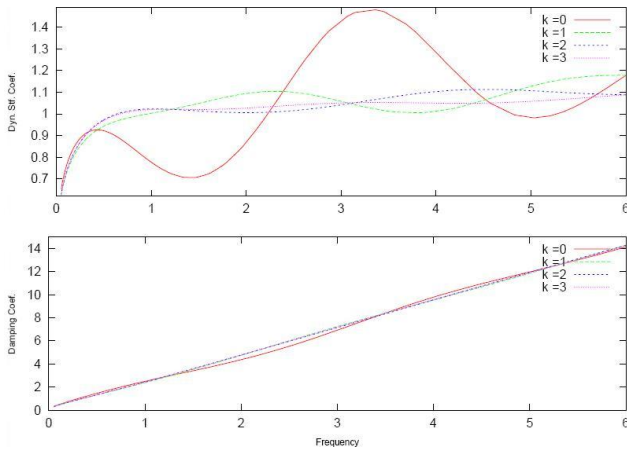


그림 3 점근항 수의 변화에 따른 동적강도의 변화

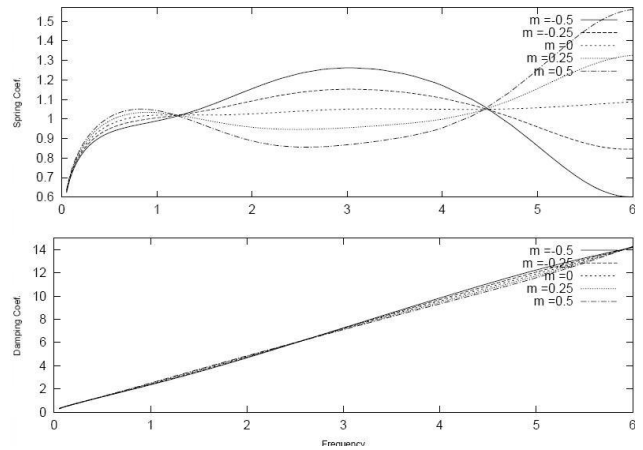


그림 5 밀도의 변화에 따른 동적강도의 변화

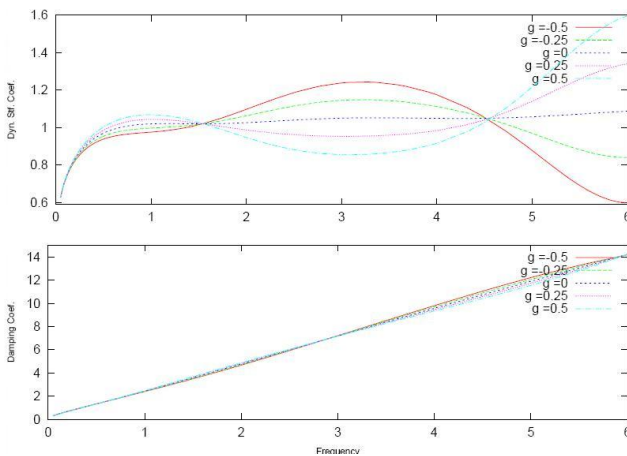


그림 4 탄성계수의 변화에 따른 동적강도의 변화

행렬에 미치는 영향을 분석하였다. 해석모델은 대칭조건을 이용해 전체의 1/4을 8개의 절점과 4개의 2차 선형경계요소로 모델링하였다(그림 2).

일정한 물성치를 가지는 경우에 대해서 이 문제의 해석적인 해는 다음과 같이 알려져 있다(Wolf, 1996).

$$S^\infty = \pi r_0 (c_s + c_p) i \omega + 2\pi G \left(-\left(\frac{c_s}{c_p}\right)^2 + 4 \frac{c_2}{c_p} - 1 \right) \quad (43)$$

여기서, c_s 와 c_p 는 각각 $c_s = \sqrt{G/\rho}$ 와 $c_p = \sqrt{(\lambda+2G)/\rho}$ 로 나타나는 전단파속도와 압축파의 속도를 나타낸다. 식 (43)에서 첫 번째 항은 감쇠계수를 나타내고 두 번째 항은 스프링계수를 나타낸다. 위의 식에서 보이는 바와 같이 감쇠계수의 경우는 진동수에 따라 선형으로 증가하는 형상을 보이고 스프링계수는 진동수에 무관한 일정한 값을 갖는 형상을 보여주고 있다.

고진동수영역에 대한 점근전개의 항수의 차이에 따른 해의 형상은 그림 3에 나타내었다. 이 해는 해석영역의 물성치가

경우에 대한 것이다. 이 그림에서 볼 수 있듯이 $k=0$ 인 경우(점근전개를 사용하지 않은 경우), 스프링계수가 큰 진폭을 가지고 진동을 일으키나 항수가 증가할수록 수평에 가까워진다. $k=2$ 이상인 경우에는 전체적인 동적강도를 나타내는데 큰 오차가 없을 것으로 판단된다. 반면에 감쇠계수의 경우에는 점근전개에 사용되는 항수에 큰 영향을 받지 않는 거동을 보여준다.

해석영역의 탄성계수에 대한 비동질 파라미터 g 값의 변화에 따른 동적강도의 변화를 그림 4에 나타내었다. 이 때 g 값의 변화는 -0.5 에서 0.5 까지를 고려하였다.

이 때 점근전개에 사용한 차수는 $k=3$ 으로 하였다. 이러한 비동질파라미터의 변화에 따른 스프링계수의 값은 일정한 물성치를 가진 경우를 중심으로 대칭인 거동을 보인다. 비동질파라미터의 값이 비례중심에서 멀어질수록 탄성계수가 감소하는 경우($g < 0$), 고진동수에서의 스프링계수값은 감소하고 반대의 경우($g > 0$)에는 고진동수로 갈수록 스프링계수값이 증가한다. 이러한 증가 및 감소의 정도는 비동질파라미터의 절대값이 클수록 크게 나타났다.

이러한 비동질파라미터값의 변화에 대한 감쇠계수의 변화 폭은 크게 나타나지 않았고 모두 진동수의 증가에 따라 감쇠계수가 증가하는 경향을 보였다.

해석영역의 밀도에 대한 비동질 파라미터 m 값의 변화에 따른 동적강도의 변화를 그림 5에 나타내었다.

이 때 m 값의 변화는 탄성계수에 대한 비동질파라미터 값과 동일한 범위인 -0.5 에서 0.5 까지를 고려하였다. 이 때 점근전개에 사용한 차수는 탄성계수의 경우와 동일하게 $k=3$ 으로 하였다. 이러한 비동질파라미터의 변화에 따른 스프링계수의 값은 일정한 물성치를 가진 경우를 중심으로 대칭인 거동을 보인 탄성계수의 경우와 매우 유사하게 나타난다. 이는 점근전개에서 스프링계수에 대한 식 (37)에서 탄성계수에 대한 비동질파라미터와 밀도에 대한 비동질파라미터가 동일

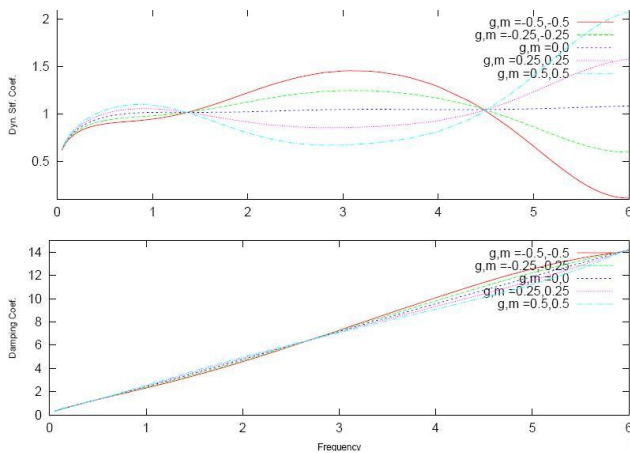


그림 6 탄성계수와 밀도의 변화에 따른 동적강도의 변화

한 계수를 갖는 것이 이유가 될 것이다. 고차항에서는 이 두 비동질파라미터는 서로 다른 계수값을 가지지만 그 영향은 상대적으로 미미하다. 비동질파라미터의 변화에 따른 감쇠계수의 변화는 앞의 경우와 유사하게 비동질파라미터의 영향을 크게 받지 않는 것으로 나타났다.

탄성계수에 대한 비동질파라미터와 밀도에 대한 비동질 파라미터를 동시에 변화시키는 경우에 대해서 동적강도의 스프링계수와 감쇠계수를 그림 6에 나타내었다. 이 경우 각각의 비동질파라미터를 적용한 경우에 비하여 진동폭이 커진 것을 제외하고는 유사한 거동을 나타내고 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 비동질 탄성무한공간에 대한 비례경계유한요소법의 동적강도행렬을 해석적으로 유도하였다. 해석영역의 비동질성은 비동질파라미터를 지수로 하는 멱함수로 고려하였다. 동적강도행렬은 진동수영역에서 다항식으로 접근한 후, 방사조건을 만족시키도록 하여 각 다항식의 계수를 구하는 과정을 통하여 유도되었다. 수치예제에 해석결과 강도에 대한 비동질파라미터와 밀도에 대한 비동질파라미터가 동적강도행렬의 스프링계수에 미치는 영향은 거의 동일한 것으로 나타났다. 이는 스프링계수의 산정에 지배적인 계수행렬에서 두 비동질파라미터가 동일한 계수를 가지고 있기 때문인 것으로 판단되었다.

감사의 글

이 논문은 2007년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음 (KRF-2007-512-D00475).

참 고 문 헌

김재민, 윤정방, 김두기 (2000) 유한요소와 무한요소를 사용한 2차원 선형 지반-구조물계의 지진응답해석법, 한국전산구조공학회 논문집, 13(2), pp.231~244.

윤정방, 서춘교, 김재민 (2007) 3차원 지반-구조물 상호작용 해석을 위한 입방형무한요소, 한국전산구조공학회 논문집, 20(1), pp.39~50.

이계희 (2007) 비동질 반무한 평면에서의 비례경계요소법, 전산구조공학회 논문집, 20(2), pp.127~136.

Deeks, A.J., Cheng, L. (2003) Potential Flow Around Obstacles using the Scaled Boundary Finite-Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, V41(7), pp.721~741.

Deeks, A.J., Wolf, J.P. (2002a) A Virtual Work Derivation of the Scaled Boundary Finite Element Method for Elastostatic, *Computational Mechanics*, 28, pp.489~504.

Deeks, A.J., Wolf, J.P. (2002b) Semi-Analytical Analysis of Unbounded Two-Dimensional Domain, *Int. J. of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26, pp.1031~1057.

Doherty, J.P., Deeks, A.J. (2003) Scaled Finite Element Analysis of a Non-Homogeneous Elastic Half Space, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 57, pp.955~973.

Doherty, J.P., Deeks, A.J. (2005) Adaptive Coupling of the Finite Element and Scaled Boundary Finite-Element Methods for Non-Linear Analysis of Unbounded Medi, *Computer & Geotechnics*, 32, pp.436~444.

Ekevid, T., Lane, H., Wiberg, N.E. (2006). Adaptive Solid Wave Propagation Influences of Boundary Conditions in High-Speed Train Applications, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, pp.236~250.

Gu, Y.T., Liu, G.R. (2001), A Coupled Element Free Galerkin Boundary Element Method for Stress Analysis of Two Dimensional Solids, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp.4405~4419.

Hassanen, M., El-Hamalawi, A. (2007) Two-Dimensional Development of the Dynamic Coupled Consolidation Scaled Boundary Finite-Element Method for Fully Saturated Soils, *Soil Dynamics & Earthquake Engineering*, 27, pp.153~165.

Kireev, O., Mertens, T., Bouillard, Ph. (2006) A

Coupled EFGM - CIE Method for Acoustic Radiation, *Computers and Structures*, 84, pp.2092~2099.

Lee, G.H., Deeks, A.J. (2008) Infinite Element for the Scaled Boundary Analysis of Initial Valued Non-Homogeneous Elastic Half Space, 한국전산구조 공학회 논문집, 21(2), pp.199~208.

Wolf, John P. (2003) The Scaled Boundary Finite Element Method, *John Wiley & Sons*.

Wolf, John P., Song, Chongmin (1996) Finite-Element Modelling of Unbounded Medi, *John Wiley & Sons*.

Yang, Z. (2006) Fully Automatic Modelling of Mixed-Mode Crack Propagation using Scaled Boundary Finite Element Method, *Engineering Fracture Mechanics*, 73, pp.1711~1731.

- 논문접수일 2009년 11월 14일
- 논문심사일 2009년 11월 23일
- 게재확정일 2010년 1월 4일