

Krylov 부공간 모델차수축소법을 이용한 주파수응답함수의 직접 설계민감도 해석

Direct Design Sensitivity Analysis of Frequency Response Function Using Krylov Subspace Based Model Order Reduction

한 정 삼†
Han, Jeong-Sam

요 지

Krylov 부공간 모델차수축소법은 초기 유한요소모델과 축소모델의 전달함수의 계수인 모멘트를 일치시키는 방법을 이용하는 축소기법으로 이미 대형 유한요소모델의 주파수응답함수의 효율적인 계산에 많이 사용되고 있는 방법 중의 하나이다. 본 논문에서는 Krylov 부공간 축소기법을 이용한 관심 주파수영역에 대한 주파수응답 해석과 이를 통하여 계산된 주파수응답의 여러 가지 설계변수에 대한 설계민감도 해석 방법을 제안하였다. 일반적으로 기계시스템의 주파수응답을 고려한 최적설계를 위해서는 설계변수에 대한 관심 주파수영역에서의 주파수응답 및 그의 민감도 정보가 요구되므로, 고려하는 유한요소모델이 대형일 경우에는 관심 주파수영역에서의 반복적인 해석으로 인한 계산비용의 문제가 심각하게 대두된다. 본 논문에서는 축소모델을 이용하여 주파수응답과 주파수응답의 설계민감도 해석을 수행하여 계산의 효율성을 극대화하였다. 계산상 시스템행렬의 민감도 계산에는 시간축면과 구현의 용이성 측면에서 장점이 있는 준해석적 방법을 이용하였다. 수치예제를 통하여 축소기법을 이용한 주파수응답의 설계민감도 해석 결과를 초기 유한요소모델의 민감도 결과와 비교하여 우수한 정확성 및 효율성을 확인하였다. 본 논문에서 제안된 방법을 주파수응답을 고려하는 최적설계에 이용하는 경우, 결과의 정확성 및 계산비용 측면에서 매우 효과적인 방법이 될 수 있을 것으로 판단된다.

핵심용어 : Krylov 부공간 모델차수축소법, 주파수응답함수, 설계민감도 해석, 모멘트일치법, 직접미분, 최적설계

Abstract

In this paper a frequency response analysis using Krylov subspace-based model reduction and its design sensitivity analysis with respect to design variables are presented. Since the frequency response and its design sensitivity information are necessary for a gradient-based optimization, problems of high computational cost and resource may occur in the case that frequency response of a large sized finite element model is involved in the optimization iterations. In the suggested method model order reduction of finite element models are used to calculate both frequency response and frequency response sensitivity, therefore one can maximize the speed of numerical computation for the frequency response and its design sensitivity. As numerical examples, a semi-monocoque shell and an array-type 4x4 MEMS resonator are adopted to show the accuracy and efficiency of the suggested approach in calculating the FRF and its design sensitivity. The frequency response sensitivity through the model reduction shows a great time reduction in numerical computation and a good agreement with that from the initial full finite element model.

Keywords : model order reduction, frequency response function, design sensitivity analysis, moment-matching method, direct differentiation, optimal design

1. 서 론

최근에 컴퓨터 전산자원의 눈부신 발전으로 합리적인 시간에 대형 문제의 구조해석이 가능하지만 다양한 기술 및 시장

의 요구사항으로 기계시스템의 형태가 더욱 복잡해지고 사용 환경 또한 특수해져 유한요소법의 적용 및 해석은 항상 새로운 문제를 접하는 실정이다. 따라서 멀티 피직스(multi-physics), 멀티 스케일(multi-scale) 문제에서 큰 자유도를 가진 유한

† 책임저자, 정회원 · 안동대학교 기계설계공학과 교수
Tel: 054-820-6218 ; Fax: 054-820-5167
E-mail: jshan@andong.ac.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2010년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2010년 8월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

요소모델의 주파수응답 및 진동해석을 주어진 설계시간 내에 반복적인 설계 변경 및 최적설계를 수행하기에는 여전히 해석상 시간적 어려움을 지니고 있다. 이에 해석모델의 모델차수축소법에 관한 연구의 필요성은 계속하여 증가되고 있으며 멀티 피직스, 제어, 최적설계의 분야에서 중요한 연구 분야로 인식되고 있다. 일반적으로 기계시스템의 주파수응답을 고려하는 최적설계를 위해서는 여러 가지 설계변수에 대한 관심 주파수영역에서의 주파수응답과 그의 민감도 정보가 요구되므로, 특히 고려하는 유한요소모델이 대형일 경우에는 관심 주파수영역에서의 반복적인 주파수응답 해석으로 인한 계산 비용 및 전산자원의 문제는 더욱 크게 대두된다. 따라서 이러한 계산상의 문제를 해결하기 위한 여러 가지 근사화기법 등이 제안되었다.

기계시스템의 주파수응답을 계산하는 근사화방법으로 벡터중첩법이 있다. 벡터중첩법 중에서 시스템의 고유모드를 구하여 이를 선형결합 하여 주파수 및 과도응답을 계산하는 모드중첩법(mode superposition method)이 전통적으로 많이 사용되지만 주파수응답에 사용되는 고유모드의 종류 및 개수를 결정하는 것이 문제에 의존적이며, 고유모드의 개수에 따른 응답의 정량적인 차이를 예측할 수 없는 단점이 있다. 또한, 고차까지의 고유모드가 필요할 때에는 이러한 고유치해석 자체가 해석시간의 대부분을 차지할 정도로 상당한 수치연산을 요구하는 경우가 많다. 다른 벡터중첩법으로 구조물의 고유치해석을 수행하지 않고 시스템의 질량행렬에 대하여 정규직교(orthonormal)한 Ritz 벡터를 중첩하는 방법이 제안되었다(Wilson 등, 1982). Ritz 벡터중첩법은 Ritz 벡터를 사용하여 초기 시스템의 차수를 줄이고, 축소된 시스템의 고유치해석을 통하여 초기 시스템의 진동해석을 근사화하였다. Ritz 벡터중첩법은 초기 시스템의 고유치해석을 수행하지 않으므로 모드중첩법보다 효율적이며, 하중분포벡터를 초기 Ritz 벡터로 사용하므로 하중분포에 대한 정보가 없는 모드중첩법에 비해 일반적으로 정확도가 더 우수하다. 하지만 이 방법은 구조 및 토목 분야의 구조 진동문제에 국한되었으며, 초대형 문제 및 다물리 분야의 적용에는 보고되지 않았다. 이에 반하여 본 논문에서 언급하고자 하는 Krylov 부공간을 이용하는 방법은 모멘트일치법을 통한 단단한 수학적 이론상에서 전개된 방법으로 다물리 분야로의 확장 및 공학적인 관점에서 요구되는 정확도를 지니는 축소모델의 차수를 결정할 수 있는 장점을 지닌다(한정삼, 2007; 한정삼 등, 2009).

분할구조해석법(component mode synthesis)도 널리 알려진 축소기법이다(Craig 등, 1960; Hurty, 1968). 이 방법은 Rayleigh-Ritz 해석법의 한 부류로서 대형 구조물을

여러 개의 작은 구조물로 분할하여 각 부분 구조물에 대하여 해석을 수행하고 이로부터 계산된 정보를 이용하여 전체 대형 구조물의 근사해를 구하는 방법으로 대형 구조물의 해석 시, 계산 시간과 메모리의 낭비요소가 되는 고차모드들을 효과적으로 제거하여 보다 경제적인 해석을 수행할 수 있다. Hurty 및 Craig 등에 의해 개발되어 최근에는 AMLS 방법(automated multilevel substructuring method)로까지 발전되었다(Bennighof 등, 2004). 이 방법은 구조를 반복적으로 다수의 부구조로 분할하고 부구조들은 병렬적으로 처리를 하는데, 초대형 문제의 해석을 요구하는 분야의 상업적 응용에서 성공적이지만 모드기반의 축소는 고차 모드에 대한 절삭 효과로 인해 해의 정확도에 문제가 발생할 수 있다. 이 문제를 해결하기 위해서는 모드의 개수를 증가시키거나 축소 과정에서 사용되는 근사 모드를 변경한다. 그러나 이 때, 모드 개수의 증가는 방법론의 효율성을 떨어뜨리며 근사 모드의 변경은 방법론 자체의 안정성에 나쁜 영향을 줄 수 있는 문제점이 있다.

또 다른 근사화기법으로는 다양한 자유도 기반의 축소기법이 제안되어 왔으며, 대표적인 방법으로는 Guyan축소법(Guyan, 1965)과 IIRS법(Friswell 등, 1995), AIRS법(Kim 등, 2001) 등이 있다. 일반적으로 자유도 기반의 축소기법들은 일정 수준의 오차를 가지고 있고 각각의 축소기법들은 서로 다른 수준의 오차와 연산시간을 가지고 있기 때문에 해석 대상에 따라 적절한 기법의 선정이 필요하다. 자유도 기반의 축소에는 주자유도 선정이라는 추가적인 문제가 있는데, 이는 해의 정확성과 수렴성, 최종 축소 시스템의 크기 등과 밀접한 연관이 있다. 대표적 선정 기법으로는 순차적 소거법(Shah 등, 1982), 2단계 축소 기법(two-level condensation scheme)(Kim 등, 2006) 등이 있다. 순차적 소거법은 정확도 면에 있어서 가장 신뢰할 만한 결과를 도출하지만 1회 반복에서 하나의 자유도를 소거하기 때문에 시스템의 크기가 커지는 경우 계산시간은 기하급수적으로 증가하는 문제를 가지고 있다. 이러한 효율성 문제를 해결하기 위해 제안된 2단계 축소 기법은 순차적 소거법이 가지는 정확도를 유지하면서, 에너지 평가를 통해 계산 효율성을 획기적으로 증가시킨 기법이다. 2단계 축소기법은 부구조화 기법과의 연동을 통해 전산 메모리를 효율적으로 이용할 수 있고 계산시간 절감의 장점을 얻었으며, IIRS기법과의 연동을 통한 효과적인 주파수응답 예측(백승민 등, 2007), 역문제(백승민 등, 2007) 및 동적해석(김현기 등, 2008) 등이 가능해졌다. 또한 Kim 등은 이러한 자유도 기반의 축소기법을 고유치의 민감도해석과 설계최적화에 적용하여 계산 효율성을 부가하였다(Kim 등, 2007). 그러나 이러한 기법은 다양한 멀티 피

직스 분야로의 확장, 상용프로그램 상에서의 영역분할 모델링 문제 등 실제 사용 측면과 응용에서 다소 보완되어야 할 부분이 있다.

주파수응답의 설계민감도 해석은 기계시스템의 설계시 주파수응답에 관한 설계방향의 정보를 제공하여 체계적인 설계 개선을 도모할 수 있는 매우 유용한 방법이다(Ting, 1993). 주파수응답의 각종 설계변수에 대한 민감도해석은 크게 다음 두 가지 방법으로 수행되었다. 첫째 방법은 시스템 행렬과 하중으로 주어지는 주파수응답함수를 근사화없이 그대로 계산하며, 이를 설계변수에 대하여 직접 미분함으로 주파수응답의 민감도를 계산하는 방법이다(Choi 등, 1992). 이 방법은 정확한 결과를 얻게 되나 대상 시스템이 대형일 경우에 계산량이 방대하여 거의 실제 문제에는 사용이 불가능하다. 다른 방법은 모드중첩법으로 주파수응답을 계산하고 고유치와 고유벡터의 미분으로 주파수응답의 미분을 표현하여 계산하는 방법이다(Sharp 등, 1988). 이 방법은 전자보다는 효과적이나 고유벡터의 미분이 필요하므로 역시 대상 시스템이 대형일 경우 계산량이 문제가 될 수 있으며 중복고유치를 가지는 경우 정확한 민감도를 구하기 힘든 경우가 있다.

따라서 본 논문에서는 Krylov 부공간 축소기법을 이용한 관심 주파수영역에 대한 효율적인 주파수응답 해석과 이를 이용하는 주파수응답의 설계변수에 대한 설계민감도 해석을 수행하는 방법을 제안하여 주파수응답 및 주파수응답의 민감도해석에 요구되는 계산비용을 대폭 감소하여 대형 유한요소 모델에 대한 주파수응답 및 그의 민감도해석을 합리적인 시간 내에 정확하게 수행하는 방법을 제안한다. 또한 수치 예제를 통하여 축소기법을 이용한 주파수응답의 설계민감도 해석 결과를 초기 유한요소모델의 민감도 결과와 비교하여 우수한 정확성 및 효율성을 확인하고자 한다.

2. 일반적인 주파수응답의 설계민감도 해석

일반적인 구조물의 운동방정식을 유한요소방법의 이산화를 통하여 행렬 형태로 나타내면 다음과 같이 이차 상미분방정식으로 표현된다.

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

여기서, M , C , K 및 $\mathbf{F}(t)$ 는 각각 시스템의 질량, 감쇠, 강성 및 하중이며, $\mathbf{x}(t)$ 는 시간 t 의 함수인 상태변수벡터이다. 대부분의 경우, 식 (1)의 시스템에서 실제로 필요한 자유도의 출력 응답 $\mathbf{y} \in R^m$ 은 $\mathbf{y} = L\mathbf{x}$ 처럼 상태변수벡터의 선형결합으로 나타낼 수 있다. 하중의 가진주파수를 Ω 로 하여 가진할 때, 시스템의 주파수응답함수(frequency response function)는 $K\mathbf{x} = \mathbf{F}$ 의 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

시스템의 주파수응답함수(frequency response function)는 $K\mathbf{x} = \mathbf{F}$ 의 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(-\Omega^2 M + i\Omega C + K)\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (2)$$

이때, 설계변수(b_j)에 대한 이 주파수응답함수의 설계민감도는 식 (2)를 설계변수에 대하여 미분을 취함으로 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & (-\Omega^2 M + i\Omega C + K) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b_j} \\ &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_j} - \left(-\Omega^2 \frac{\partial M}{\partial b_j} + i\Omega \frac{\partial C}{\partial b_j} + \frac{\partial K}{\partial b_j} \right) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3)$$

시스템에서 실제로 필요한 자유도의 출력응답인 \mathbf{y} 의 설계민감도는 $\mathbf{y} = L\mathbf{x}$ 의 관계에서 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial b_j} = L \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b_j} \quad (4)$$

시스템의 차수(degrees of freedom)가 N 인 경우, 식 (3) 및 (4)을 통하여 N 차의 연립방정식을 계산함으로써 각 가진주파수 및 설계변수에 대한 주파수응답함수의 설계민감도 $\partial \mathbf{y} / \partial b_j$ 를 구한다. 이 때, 각 설계변수별로 각 가진주파수에서 식 (3)을 계산하기 때문에 큰 차수의 문제에서는 이러한 주파수응답의 설계민감도 해석이 계산비용 측면에서 매우 큰 문제로 대두된다. 따라서 이러한 문제를 해결하기 위해서는 정확성과 효율성을 가진 주파수응답의 설계민감도 해석법이 반드시 필요하다.

3. 축소모델을 이용한 주파수응답의 설계민감도 해석

3.1 시스템 주파수응답의 모델차수축소법

모델차수축소법은 다음 관계를 만족하는 변환행렬 $V \in R^{N \times n}$ 을 구하여 초기 시스템인 식 (1)의 큰 자유도의 상태변수벡터를 작은 자유도로 구성된 축소시스템의 상태변수벡터로 근사화하는 방법이다.

$$\mathbf{x}(t) = V\mathbf{z}(t) \quad \text{where } \mathbf{z}(t) \in R^n, n \ll N \quad (5)$$

이 관계를 이용하면 초기 시스템인 식 (1)은 동일한 형태를 지닌 이차 축소시스템으로 다음과 같이 변환된다.

Arnoldi process:
 Given a nonzero starting vector $\mathbf{r}(=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F})$ and a matrix $\mathbf{A}(=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})$, the algorithm produces orthonormal $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ such that $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} = \text{span}\{\mathbf{r}, \mathbf{A}\mathbf{r}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}\}$ for $k=1, 2, \dots, n$

```

 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r} / \|\mathbf{r}\|_2$ 
for  $k = 1, 2, \dots, n-1$ 
     $\mathbf{v}_{k+1} \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{v}_k$  (new vector generation)
    for  $j = 1, 2, \dots, k$  (orthogonalization)
         $h_{jk} \leftarrow \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_{k+1}$ 
         $\mathbf{v}_{k+1} \leftarrow \mathbf{v}_{k+1} - h_{jk}\mathbf{v}_j$ 
    endfor
     $h_{k+1,k} \leftarrow \|\mathbf{v}_{k+1}\|_2$ 
     $\mathbf{v}_{k+1} \leftarrow \mathbf{v}_{k+1} / h_{k+1,k}$  (normalization)
endfor
    
```

그림 1 Calculation of matrix \mathbf{V} by Arnoldi process

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}_r \mathbf{z}(t) &= \mathbf{F}_r(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}_r \mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, 축소행렬은 각각 $\mathbf{M}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$, $\mathbf{C}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V}$, $\mathbf{K}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}$, $\mathbf{F}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{F}$ 및 $\mathbf{L}_r = \mathbf{L} \mathbf{V}$ 이 된다. Krylov 부공간에 근거한 모델차수축소법에 따르면 감쇠행렬이 비례감쇠로 표현되는 경우, 즉 $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$ 인 경우에 식 (5)의 변환행렬 \mathbf{V} 의 각 열벡터로 이루어진 모든 선형결합이 아래의 n 차 Krylov 부공간을 구성(span)하면, 초기 시스템과 축소시스템의 첫 n 번째 까지의 모멘트(moment)는 서로 일치함이 알려져 있다(한정삼, 2007). 구체적인 모멘트일치법의 설명은 본 참고문헌에 기술되어 있다.

$$K_n(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}) = \text{span}\{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}, (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}, \dots, (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^{n-1}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}\} \quad (7)$$

식 (7)을 만족하는 변환행렬 \mathbf{V} 를 구하는 데에는 초기 시스템의 강성 및 질량행렬과 하중벡터만이 이용되며 수치적으로는 그림 1에 제시된 아놀디과정(Arnoldi process)을 통하여 계산된다. 이러한 열벡터로 구성된 변환행렬은 정규직교성(orthonormality)을 가진다(Freund, 2000).

$$\begin{aligned} \text{colspan}\{\mathbf{V}\} &= K_n(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}) \\ \mathbf{V}^T \mathbf{V} &= \mathbf{I}_n \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, 행렬 \mathbf{I}_n 은 n 차의 단위행렬이다. 변환행렬 \mathbf{V} 의 계산방법 및 수치계산 상의 고려점은 한정삼의 참고문헌에 자세히 기술되어 있다(한정삼, 2007).

이러한 Krylov 벡터를 이용하는 방법 이외에 유사한 형태

를 지니며 질량행렬 정규직교성(M-orthonormality)를 지닌 Ritz 벡터를 사용하는 모델축소법도 구조물의 진동해석에 일부 사용되었다(Wilson 등, 1982).

따라서 최종적으로 축소모델을 이용한 주파수응답 해석을 위하여 식 (5)의 관계를 식 (2)에 적용하고, 양변을 \mathbf{V}^T 로 곱하면

$$(-\Omega^2 \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} + i\Omega \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} + \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}) \mathbf{z} = \mathbf{V}^T \mathbf{F} \quad (9)$$

를 얻으며, 이렇게 차수 n 으로 축소된 축소시스템을 통하여 시스템의 주파수응답을 효율적으로 계산할 수 있다.

3.2 축소모델을 통한 주파수응답의 설계민감도 해석

축소모델을 이용한 주파수응답의 설계민감도 해석에서는 아래와 같이 식 (5)의 설계변수에 대한 미분이 필요하며, 이때 변환행렬 \mathbf{V} 의 민감도가 상대적으로 작아 무시할 수 있다는 가정을 하여 주파수응답의 설계민감도 해석을 단순화한다. 즉, $\partial \mathbf{V} / \partial b_j = \mathbf{0}$ 로 가정하여 식 (5)의 설계변수에 대한 미분을 다음과 같이 계산한다.

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b_j} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial b_j} \mathbf{z} + \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial b_j} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b_j} = \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial b_j} \quad (10)$$

이 관계와 식 (5)를 식 (3)에 대입하고, 양변에 \mathbf{V}^T 를 곱하면 다음과 같이 축소모델에 대한 주파수응답의 설계민감도를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &(-\Omega^2 \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} + i\Omega \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} + \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}) \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial b_j} \\ &= \mathbf{V}^T \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_j} - \left(-\Omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} + i\Omega \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial b_j} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_j} \right) \mathbf{V} \mathbf{z} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

시스템에서 실제로 필요한 자유도의 출력응답인 y 의 설계 민감도는 $y = LVz$ 의 관계에서 아래와 같이 계산된다.

$$\frac{\partial y}{\partial b_j} = LV \frac{\partial z}{\partial b_j} \quad (12)$$

식 (11)의 우변의 각 시스템 행렬의 미분은 유한차분법을 이용하여 계산하기 때문에 전체적으로는 준해석적 방법 (semi-analytical method)으로 주파수응답의 민감도를 계산하게 된다. 각 시스템 행렬의 미분값에는 아래 식과 같이 각 설계변수의 0.1% 섭동량(Δb_j)으로 계산한 전방차분법 (forward difference method)를 사용하였다. 유한차분법을 이용하여 민감도를 계산할 때, 보(beam), 평판(plate), 셸(shell) 등 일부 유한요소 종류에서는 민감도 도출시 섭동량에 따라 미분값의 변화가 불안정한 면을 보인다. 이의 해결 방법으로 강제모드분리법과 Neumann 급수전개법의 결합 (Cho 등, 2005), adjoint법에서의 준해석법의 적용(Cho 등, 2006) 등이 이용될 수 있다.

$$\frac{\partial M}{\partial b_j} = \frac{M(b + \Delta b_j) - M(b)}{\Delta b_j} \quad (13a)$$

$$\frac{\partial C}{\partial b_j} = \frac{C(b + \Delta b_j) - C(b)}{\Delta b_j} \quad (13b)$$

$$\frac{\partial K}{\partial b_j} = \frac{K(b + \Delta b_j) - K(b)}{\Delta b_j} \quad (13c)$$

주파수응답의 설계민감도인 식 (3)과 식 (11)을 서로 비교할 때, 초기모델(N)과 축소모델(n)을 이용한 주파수응답의 설계민감도 해석은 각 설계변수에 대하여 각각 N차 및 n차의 연립방정식을 관심 주파수영역의 각 가진주파수에 대하여 반복적으로 풀어야 한다. 공학적 문제에서 많은 경우, $n \ll N$ 이므로 계산비용 측면에서 축소모델을 이용하는 것이 매우 효율적이다. 다음 절에서는 실제적인 여러 가지 예제를 통하여 제안한 주파수응답 설계민감도해석의 정확도 및 효율성을 확인하였다.

4. 수치 예제

4.1 반모노코크 평판의 주파수응답

첫째 예제로 그림 2와 같이 총 31,051개의 자유도를 가지는 반모노코크 평판의 1/4 유한요소모델을 고려하였다. 사용된 평판의 물성치는 탄성계수 $E=73\text{GPa}$, 포아송비 ν

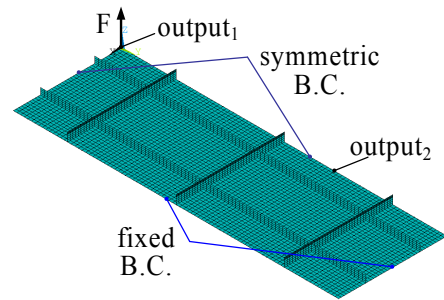


그림 2 Finite element model of a semi-monocoque shell problem

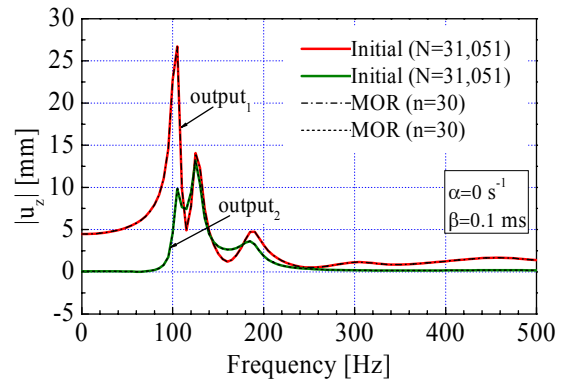
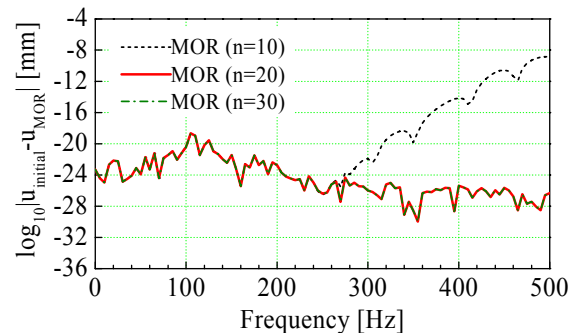
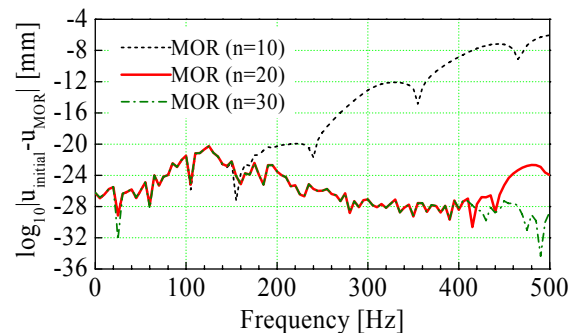


그림 3 Frequency responses



(a) u_z at output₁



(b) u_z at output₂

그림 4 True errors according to the order of reduced models

$=0.33$, 밀도 $\rho=7,850\text{kg/m}^3$ 이다. 평판의 중앙 부분에 $F=1\text{kN}$ 의 하중이 가해지며 경계조건으로 가장자리는 고정

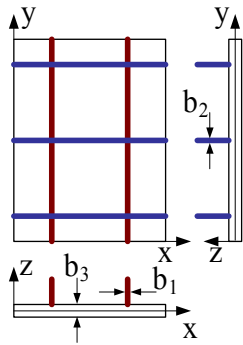
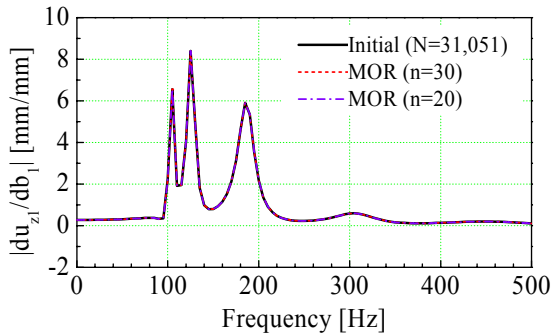
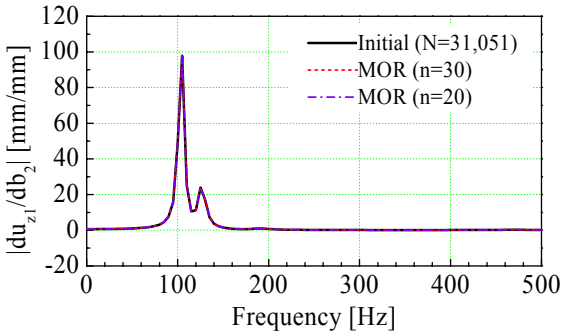


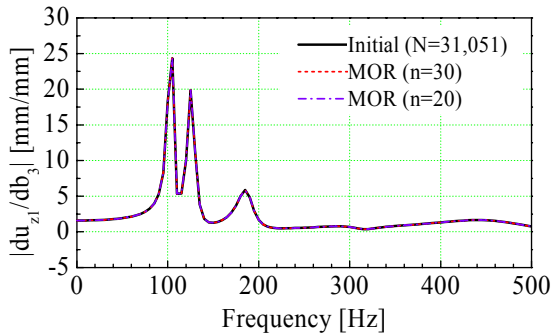
그림 5 Definition of design variables



(a) b_1 : thickness of the longer stiffeners



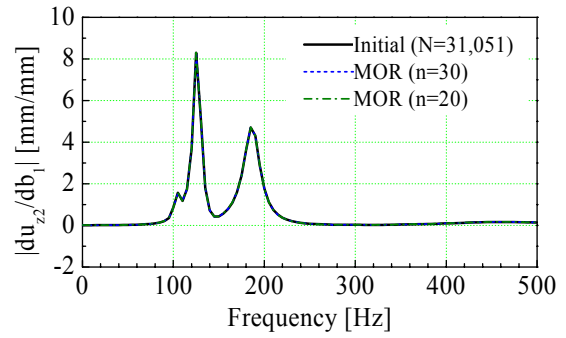
(b) b_2 : thickness of the shorter stiffeners



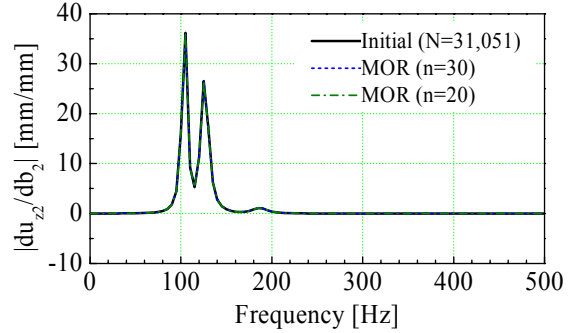
(c) b_3 : thickness of the plate

그림 6 Comparison of FRF design sensitivities of u_z at output₁ between initial full-sized and reduced models

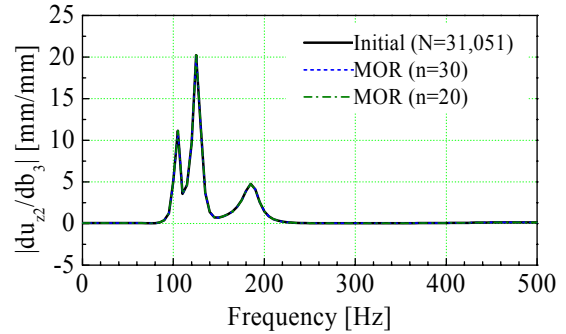
되었고 안쪽 모서리는 대칭 경계조건을 가진다(그림 2 참고). 그림 3과 같이 이 평판의 두 출력점(output₁ 및 output₂)에서 0~500Hz의 주파수응답을 계산하였으며, 두 출력점에



(a) b_1 : thickness of the longer stiffeners



(b) b_2 : thickness of the shorter stiffeners



(c) b_3 : thickness of the plate

그림 7 Comparison of FRF design sensitivities of u_z at output₂ between initial full-sized and reduced models

서 각각 105 및 126Hz에서 z방향으로의 피크값이 발생함을 알 수 있다. 이 주파수는 이 평판의 첫째 및 둘째 고유진동수인 104 및 126Hz에 해당하는 값이다.

초기 유한요소모델과 $n=30$ 의 축소모델로 각각 계산한 주파수응답 결과를 함께 도시하였을 때, 그래프 상에서 각 결과의 차이를 확인할 수 없을 정도로 정확히 일치하였다. 구체적인 오차를 확인하기 위하여 그림 4에 초기 유한요소모델과 축소모델의 주파수응답의 오차를 몇 가지 축소모델의 차수(n)에 따라서 도시하였다. 이 결과로부터 $n=10$ 인 축소모델의 경우도 10^{-4} 의 매우 작은 오차를 보임을 알 수 있다. 다만 출력 주파수 대역이 점차 고주파수 영역으로 되면서 오차가 점차 증가되지만 축소모델의 차수를 $n=20$ 및 30 으로 높이면 더 고주파수 대역까지 주파수응답이 일치하게 되는

특징을 관찰할 수 있다. 차수 $n=20$ 인 축소모델로도 전 주파수영역에서 10^{-20} 미만의 오차를 가지는 정확한 주파수응답을 얻을 수 있다.

그림 5에는 이 문제에서 고려한 설계변수(b_j)인 평판의 긴 보강재의 두께(b_1), 짧은 보강재의 두께(b_2) 및 평판의 두께(b_3)를 도시하였다. 이러한 설계변수는 최적설계문제 분류에서 치수문제(size problem)에 해당한다. 그림 6과 7에는 초기 유한요소모델에 대하여 식 (3) 및 (4)를 이용하여 구한 주파수응답의 민감도(그래프의 실선)와 축소모델에 대하여 식 (11) 및 (12)를 통하여 계산한 주파수응답의 민감도(그래프의 점선)를 함께 도시하였다. 초기 유한요소모델($N=31,051$)과 $n=20$ 및 30의 축소모델로 각각 계산한 주파수응답의 민감도 결과를 함께 도시하였을 때, 그래프 상에서 그 결과의 차이를 확인할 수 없을 정도로 정확하게 일치하였다. 주파수응답의 민감도 결과는 주파수응답의 피크값이 발생하는 주파수에서 큰 값을 가지며, 상대적으로 짧은 보강재의 두께(b_2) 및 평판의 두께(b_3)가 큰 민감도를 보임을 알 수 있다. 주파수응답의 민감도 계산에 필요한 각 시스템 행렬의 미분값에는 각 설계변수의 0.1% 섭동량(Δb_j)으로 계산한 전방차분법을 사용하였다.

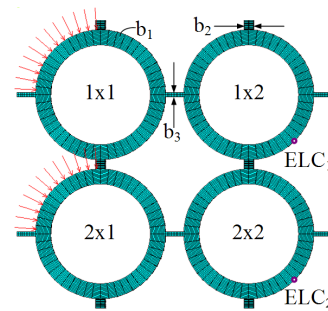


그림 8 Finite element model of an array-type MEMS resonator problem

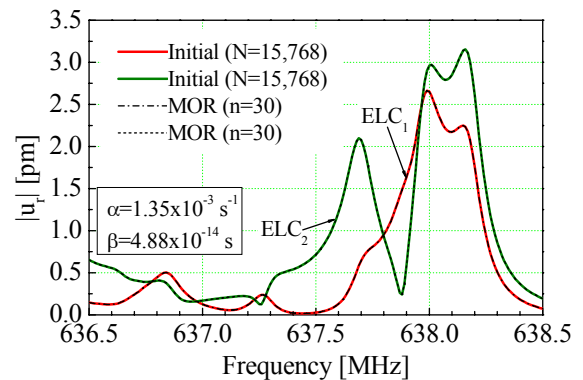


그림 9 Frequency responses

4.2 배열형 2x2 MEMS 공진체의 주파수응답

본 절에서는 수백 MHz 주파수 대역에서 발생하는 와인 유리잔 형태의 고유진동모드(extensional wine-glass mode) (Xie 등, 2003)를 사용하여 높은 작동 주파수 및 Q 인자를 가지도록 고안된 2x2형 MEMS 공진체에 대한 주파수응답 및 그 민감도 계산을 고려한다.

초기 유한요소모델은 ANSYS(SAS 2007)의 2,304개의 쉘요소 및 144개의 빔요소로 구성되며 총 15,768개의 자유도를 가진다. 사용된 Si의 물성치는 탄성계수 $E=150\text{GPa}$, 포아손비 $\nu=0.226$, 밀도 $\rho=2,300\text{kg/m}^3$ 이다. 유한요소모델에서 1x1 및 2x1의 링에 표시된 화살표는 입력 구동력($1\text{nN}/\mu\text{m}$)을 의미하며, 출력응답은 1x2 및 2x2의 공진체의 전극에서 각 단위 공진체의 중심축에 대한 반경 방향으로의 변위로 하였다. 경계조건으로 각 빔의 끝단은 완전 구속되었다(그림 8 참조). 이 때, 단위 공진체의 외경, 내경, 두께(b_1), 수직빔의 폭(b_2), 수평빔의 폭(b_3), 수직빔의 길이 및 수평빔의 길이는 각각 28.2, 21.7, 2, 4, 2, 4, $8\mu\text{m}$ 이다.

그림 9는 2x2형 MEMS 공진체의 출력 전극의 두 출력점 ELC₁ 및 ELC₂에서 와인 유리잔 형태 고유진동모드를 사용하는 작동주파수인 636.5~638.5MHz의 주파수응답을 201개의 가진주파수에서 도시하였다. 각 출력점에서 대략 638~

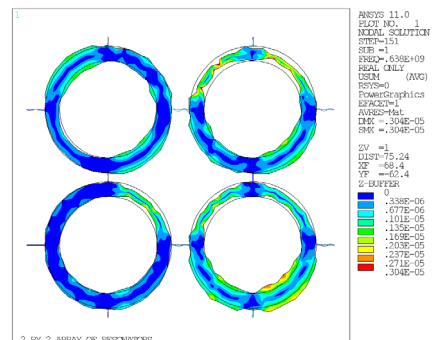
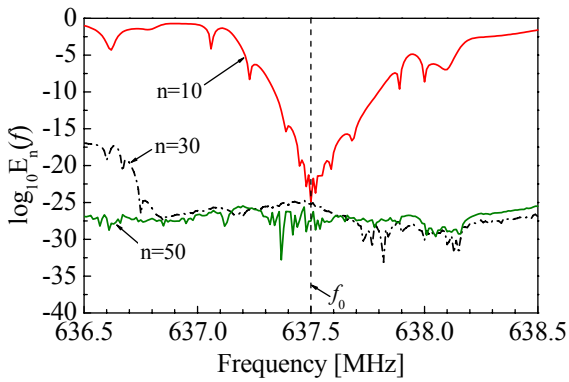


그림 10 Deformed shape around 638 MHz

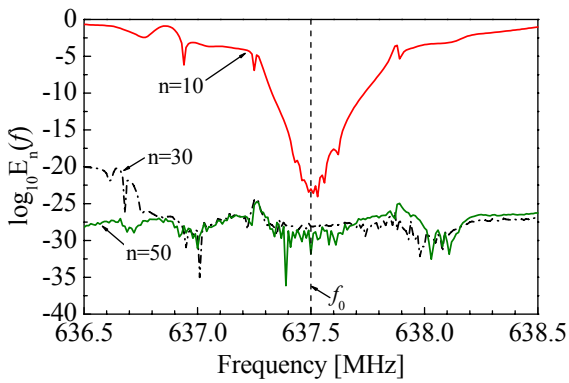
638.2MHz 부근에서 피크값이 발생하며 다른 주파수대역에서는 응답이 작아 신호의 필터 역할을 할 수 있음을 알 수 있다(한정삼 등, 2009).

그림 10은 주파수응답의 피크값이 발생하는 주파수영역인 638MHz에서의 변형 형상을 나타낸다. 출력점 부근에서 반경 방향으로 주된 변위가 발생하는 와인 유리잔 형태의 변형 형상이 잘 나타남을 확인할 수 있다.

특히, 이 문제와 같이 특정한 고주파수 대역에 대한 주파수응답을 고려하는 경우에는 축소모델의 생성시, $s_0 \neq 0$ 인 관심 주파수영역의 전개점에 대하여 급수전개함으로써 일반적으로 $s_0 = 0$ 인 전개점에 대한 축소모델보다 그 주파수 대역에서 더 높은 정확도를 가진 축소모델을 얻을 수 있다. 만약 주파수



(a) u at ELC₁



(b) u at ELC₂

그림 11 True relative errors according to the order of reduced models

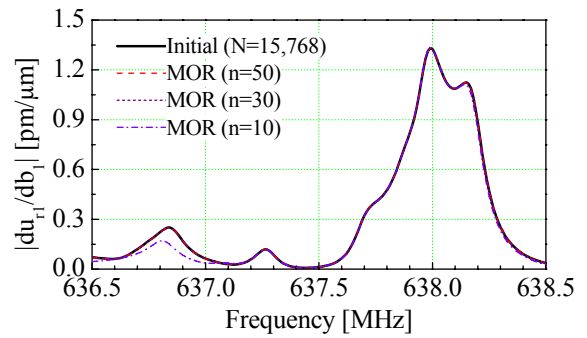
답의 관심주파수를 f_0 Hz라고 하면, 변환행렬 \mathbf{V} 는 다음과 같이 계산되며, $s_0 = -(2\pi f_0)^2$ 이다(한정삼 등, 2009).

$$\text{colspan}\{\mathbf{V}\} = K_n \{ (s_0 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{M} (s_0 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{F} \} \quad (14)$$

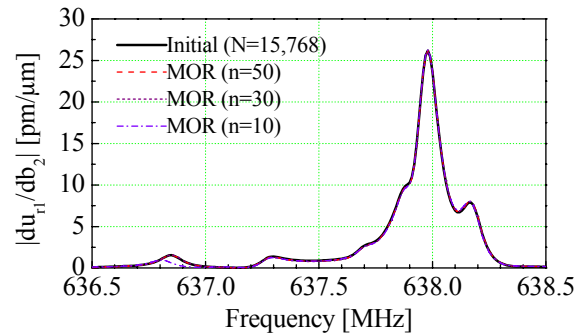
그림 9와 같이 초기 유한요소모델과 $n=30$ 의 축소모델로 각각 계산한 주파수응답 결과를 함께 도시하였을때, 그래프 상에서 결과의 차이를 확인할 수 없을 정도로 정확히 일치하였다. 구체적인 오차를 확인하기 위하여 그림 11에는 아래 식 (15)로 계산된 초기 유한요소모델과 축소모델의 주파수응답의 상대오차를 몇 가지 축소모델의 차수에 따라서 도시하였다.

$$E_n(f) = \frac{\|\hat{\mathbf{H}}_n(f) - \mathbf{H}(f)\|}{\|\mathbf{H}(f)\|} \quad (15)$$

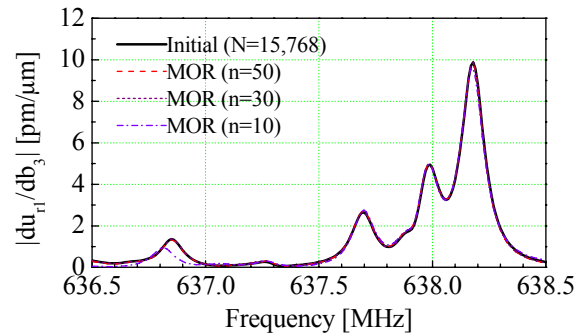
이 문제에서는 $f_0=637.5$ MHz인 전개점을 사용하였는데, 결과에서 출력 주파수 대역이 전개점에서 멀어지게 되면서 상대오차가 점차 증가되지만 축소모델의 차수를 높이면 더 넓은 주파수 대역까지 주파수응답이 일치하게 됨을 알 수 있



(a) b_1 : thickness of the ring



(b) b_2 : width of strong vertical beam

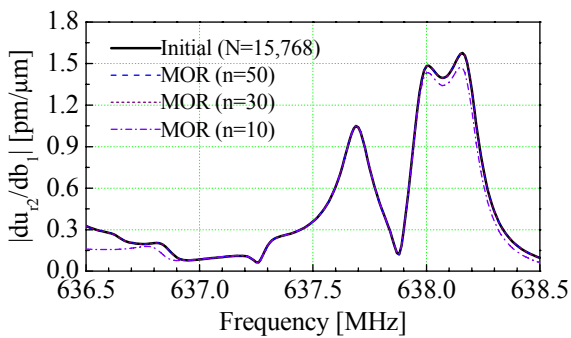


(c) b_3 : width of weak horizontal beam

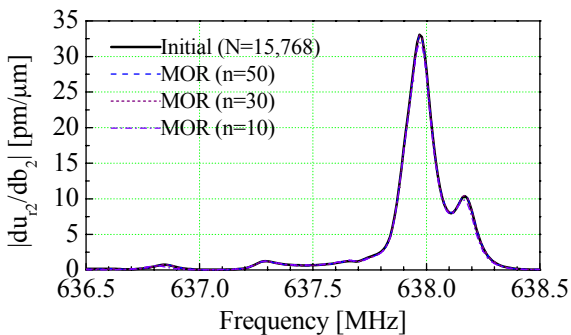
그림 12 Comparison of FRF design sensitivities of u at ELC₁ between initial full-sized and reduced models

다. 결과로부터 관심주파수의 전영역에서 $n=30$ 인 축소모델의 경우는 상대오차 10^{-15} 미만의 결과를 얻을 수 있으며, $n=50$ 인 축소모델로는 주파수영역에서 10^{-25} 미만의 상대오차를 가지는 주파수응답을 계산할 수 있다.

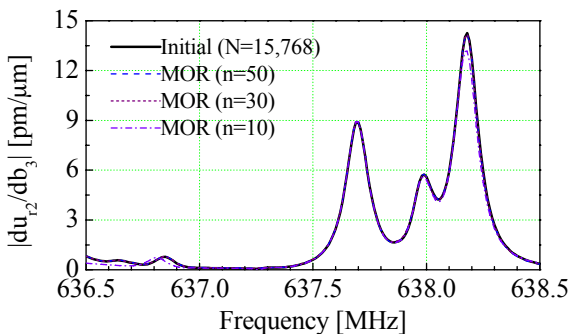
이 문제에서 고려한 설계변수는 공진체의 두께(b_1), 수직빔의 폭(b_2) 및 수평빔의 폭(b_3)이다(그림 8 참조). 그림 12와 13에는 초기 유한요소모델에 대하여 식 (3) 및 (4)를 이용하여 구한 주파수응답의 민감도(그래프의 실선)와 축소모델에 대하여 식 (11) 및 (12)를 통하여 계산한 주파수응답의 민감도(그래프의 점선)를 함께 도시하였다. 초기 유한요소모델($N=15,768$)과 $n=10, 30$ 및 50 의 축소모델로 각각 계산한 주파수응답의 민감도 결과를 함께 도시하였을때,



(a) b_1 : thickness of the longer stiffeners



(b) b_2 : width of strong vertical beam



(c) b_3 : width of weak horizontal beam

그림 13 Comparison of FRF design sensitivities of u at ELC₂ between initial full-sized and reduced models

$n=30$ 및 50 인 축소모델로 계산한 민감도 결과는 그래프 상에서 그 결과의 차이를 확인할 수 없을 정도로 정확하게 일치하였다. 축소모델 $n=10$ 인 경우는 그 민감도 값이 전개점에서 점차 멀어지면서 다소 차이가 발생함을 확인할 수 있다. 주파수응답의 민감도 결과는 주파수응답의 638MHz 의 주파수 대역에서 큰 값을 가지며, 상대적으로 수직빔의 폭 (b_2) 및 수평빔의 폭(b_3)이 공진체의 두께(b_1)보다 큰 민감도를 보임을 알 수 있다. 이 문제에서도 주파수응답의 민감도 계산에 필요한 각 시스템 행렬의 미분값을 계산하기 위하여 각 설계변수의 0.1% 섭동량을 이용한 전방차분법을 사용하였다.

모든 주파수영역에 걸쳐 정확한 주파수응답 민감도를 얻기

위해서는 그림 11에 도시한 것처럼 관심주파수의 모든 영역에 걸쳐 유사한 수준의 작은 상대오차를 가지는 축소모델을 선정해야 함을 알 수 있다. 축소모델 $n=10$ 인 경우, 대략 637MHz 부근부터 상대오차가 증가하여 그 부근에서의 주파수응답의 민감도값에서도 점차 오차가 증가하는 현상을 볼 수 있다.

5. 고 찰

수치예제를 통하여 본 논문에서 제안한 방법으로 초기 유한요소모델에 비하여 매우 작은 차수의 축소모델을 통하여 주파수응답의 설계민감도를 정확하게 계산할 수 있음을 확인하였다. 본 절에서는 각 경우에 소요되는 계산시간을 비교하여 효율성을 정량적으로 비교하였다. 비교를 위한 모든 수치계산은 3.00GHz 의 Intel Xeon CPU 5160과 16GB 의 메모리가 탑재된 HP xw8400 워크스테이션에서 MATLAB R2009a(MathWorks, 2009)으로 수행되었다.

초기 유한요소모델에 대해서는 해석모델의 총 자유도, 주파수응답 계산에 소요되는 시간, 각 설계변수에 대한 주파수응답의 민감도 계산에 소요되는 시간을 표시하였다. 축소모델에 대해서는 축소모델을 생성하는데 소요되는 시간, 생성된 축소모델로 주파수응답 계산에 소요되는 시간, 각 설계변수에 대한 주파수응답의 민감도 계산에 소요되는 시간을 각각 표시하였다.

반모노코크 평판문제 및 배열형 2×2 MEMS 공진체 문제

표 1 Comparison of elapsed CPU time for the semi-monocoque shell problem

	Initial FE models	Reduced models		
		$n=10$	$n=20$	$n=30$
총 자유도(DOF)	31,051	10	20	30
축소모델 생성(sec)	-	52.9	74.9	94.9
주파수응답 계산(sec)	479.9	0.078	0.500	0.562
주파수응답 민감도 계산(sec)	893.8	5.1	8.8	9.0

표 2 Comparison of elapsed CPU time for the 2×2 MEMS resonator problem

	Initial FE models	Reduced models		
		$n=10$	$n=30$	$n=50$
총 자유도(DOF)	15,768	10	30	50
축소모델 생성(sec)	-	7.8	16.1	24.9
주파수응답 계산(sec)	294.1	0.062	0.109	0.937
주파수응답 민감도 계산(sec)	513.4	8.6	15.9	17.0

의 결과를 각각 표 1 및 2에 정리하였다. 평판문제에서 $n = 20$ 및 30의 축소모델을 사용하면 주파수응답의 민감도 계산시, 일반적인 방법에 대하여 대략 1/10의 계산비용만이 소요됨을 확인할 수 있다. 두 번째 문제에서 축소모델을 사용한 주파수응답의 민감도 계산은 첫 번째 문제보다 더욱 효과적임을 알 수 있다.

축소모델을 사용하는 경우, 축소모델을 생성하는 시간을 고려하더라도 매우 작은 계산시간으로 주파수응답 및 주파수응답의 민감도를 계산할 수 있음을 알 수 있다. 더욱이 넓은 주파수대역에서 여러 가진주파수에서 주파수응답을 계산하거나 고려해야할 설계변수가 많은 경우에는 축소모델을 사용함으로써 계산의 효율성은 더욱 높아짐을 알 수 있다.

8. 결 론

본 논문에서는 Krylov 부공간 모델차수축소법을 통하여 생성된 축소모델을 이용한 대형 유한요소모델의 주파수응답 해석과 주파수응답의 여러 가지 설계변수에 대한 설계민감도 해석을 정확하고 매우 효율적으로 수행하는 방법을 제안하였다. 이로써 매우 방대한 계산비용 및 전산자원 한계의 문제로 여러 가지 실제 문제에 적용이 불가능했던 대형 유한요소 모델에 대한 정확한 주파수응답 및 주파수응답의 민감도해석이 가능할 것으로 판단된다. 구체적으로 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

- 1) 정확한 주파수응답 및 주파수응답의 민감도 결과를 주는 직접해석법(direct method)의 수식에 Krylov 기반 축소모델을 적용하여 매우 효율적인 계산으로 상대적으로 정확한 주파수응답 및 주파수응답 민감도 결과를 얻을 수 있었다. 또한, $\partial V / \partial b_j = 0$ 의 가정을 하더라도 관심주파수의 모든 영역에 걸쳐 유사한 수준의 작은 상대오차를 가지는 차수의 축소모델을 선정함으로써 정확한 민감도 결과를 도출할 수 있었다.
- 2) 주파수응답의 민감도 계산에 필요한 각 시스템 행렬의 미분값을 계산할 때에는 시간축면과 구현의 용이성 측면에서 전방차분법을 사용하여 전체적으로는 준해석적 방법으로 주파수응답의 민감도를 계산하였다. 시스템 행렬의 미분시, 초기와 섭동된 시스템 행렬의 크기는 서로 동일해야 하므로 본 방법은 설계변수의 섭동에도 시스템 행렬의 크기가 변경되지 않는 치수문제(size problem)에 적용가능하다.
- 3) 축소모델 생성시, 특정한 관심 주파수영역의 전개점에 대하여 급수전개함으로써 고주파수영역의 주파수응답과 주파수응답 민감도해석에도 매우 효율적으로 정확

한 결과를 얻을 수 있음을 확인하여 추후 일정한 주파수영역에서 작동 밴드폭(bandwidth)을 가지는 응용 문제에 효과적으로 이용될 수 있을 것이다.

- 4) 초기 유한요소모델과 몇 가지 축소모델을 이용한 주파수응답 및 주파수응답 민감도해석의 총 계산시간을 정량적으로 비교하여 본 방법의 우수한 효율성을 보였으며, 이로써 주파수응답을 고려하는 최적설계에 본 수치 방법은 매우 효과적으로 이용될 수 있을 것이다.
- 5) 본 논문에서는 주파수응답 및 주파수응답 민감도해석에 대한 적용이 언급되었지만 제안된 방법은 시간영역의 과도응답해석 및 그 민감도해석에도 유효한 방법이다.

감사의 글

이 논문은 2007년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 일부 받아 연구되었음(KRF-2007-331-D00017).

참 고 문 헌

- 김현기, 조맹효** (2008) 축소모델 기반 구조물의 동적해석 연구, 한국전산구조공학회 논문집, 21(5), pp.439~450.
- 백승민, 김기욱, 조맹효** (2007) 동적 해석의 효율적 해석 기법에 관한 연구, 한국전산구조공학회 논문집, 20(3), pp.347~352.
- 백승민, 김현기, 김기욱, 조맹효** (2007) 반복적 IRS를 이용한 구조 시스템 식별, 한국전산구조공학회 논문집, 20(1), pp.65~73.
- 한정삼** (2007) 축소된 유한요소모델을 이용한 하드디스크 구동부의 고유치 및 주파수응답 해석, 대한기계학회논문집 A권, 31(5), pp.541~549.
- 한정삼, 고진환** (2009) 크리로프 부공간법에 근거한 모델차수 축소기법을 통한 배열형 MEMS 공진기의 주파수응답해석, 대한기계학회논문집 A권, 33(9), pp.878~885.
- Bennighof, J.K., Lehoucq, R.B.** (2004) An Automated Multilevel Substructuring Method for Eigenspace Computation in Linear Elastodynamics, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(6), pp.2084~2106.
- Cho, M., Kim, H.** (2005) A Refined Semi-Analytic Sensitivity Based on the Mode Decomposition and Neumann series, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(1), pp.19~49.
- Cho, M., Kim, H.** (2006) Improved Semi-Analytic Sensitivity Analysis Combined with a Higher Order

- Approximation Scheme in the Framework of Adjoint Variable Method, *Computers and Structures*, 84(29-30), pp.1827~1840.
- Choi, K.K., Lee, J.H.** (1992) Sizing Design Sensitivity Analysis of Dynamic Frequency Response of Vibrating Structures, *Journal of Mechanical Design*, 114(1), pp.166~173.
- Craig, Jr. R.R., Bampton, M.C.C.** (1960) Coupling of Substructures for Dynamic Analysis, *AIAA Journal*, 6(7), pp.1313~1319.
- Freund, R.W.** (2000) Krylov-Subspace Methods for Reduced-Order Modeling in Circuit Simulation, *J. Comput. Appl. Math.*, 123, pp.395~421.
- Friswell, M.I., Garvey, S.D., Penny, J.E.T.** (1995) Model Reduction using Dynamic and Iterated IRS Techniques, *Journal of Sound and Vibration*, 186(2), pp.311~323.
- Guyan, R.J.** (1965) Reduction of Stiffness and Mass Matrices, *AIAA Journal*, 3(2), pp.380.
- Hurty, W.C.** (1968) Vibration of Structural Systems by Component Mode Synthesis, *J. Engeg. Mech. Division ASCE*, 86, pp.51~69.
- Kim, H., Cho, M.** (2006) Two-Level Scheme for Selection of Primary Degrees of Freedom and Semianalytic Sensitivity Based on the Reduced System, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, pp.4244~4268.
- Kim, H., Cho, M.** (2007) Sub-Domain Optimization of Multi-Domain Structure Constructed by Reduced System Based on the Primary Degrees of Freedom, *Finite Elements in Analysis and Design*, 43(11-1), pp.912~930.
- Kim, K.O., Kang, M.K.** (2001) Convergence Acceleration of Iterative Modal Reduction Methods, *AIAA Journal*, 39(1), pp.134~140.
- SAS IP, Inc.** (2007) *ANSYS Structural Analysis Guide*, ANSYS Release 11.0.
- Shah, V.N., Raymund, M.** (1982) Analytical Selection of Masters for the Reduced Eigenvalue Problem, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 18(1), pp.89~98.
- Sharp, R.S., Brooks, P.C.** (1988) Sensitivities of Frequency Response Functions of Linear Dynamic Systems to Variations in Design Parameter Values, *Journal of Sound and Vibration*, 126(1), pp.167~172.
- The MathWorks, Inc.** (2009) *MATLAB Getting Started Guide*.
- Ting, T.** (1993) Design Sensitivity Analysis of Structural Frequency Response, *AIAA Journal*, 31(10), pp.1965~1967.
- Wilson, E.L., Yuan, M.W., Dickens, J.M.** (1982) Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10, pp.813~821.
- Xie, Y., Li, S.S., Lin, Y.W., Ren, Z., Nguyen, C.T.C.** (2003) UHF Micromechanical Extensional Wine-Glass Mode Ring Resonators, Technical Digest, IEEE International Electron Devices Meeting, Washington, DC, pp.953~956.

- 논문접수일 2009년 11월 12일
- 논문심사일 2009년 11월 25일
- 게재확정일 2010년 2월 9일