

프로그램의 결과 비교를 통한 푸리에 변환의 이해

Understanding of Fourier Transformation by Comparison of program results

양 승 용*, 김 노 유**, 이 정 훈***

Seung-Yong Yang*, Nohyu Kim**, Jeonghoon Lee***

요 약

푸리에 변환과 관련하여 많은 참고할 수 있는 문헌이 존재하지만, 수식의 복잡성과 차이로 인해, 초보자가 푸리에 변환을 이해하고 활용하는 데에는 어려움이 따른다. 본 논문에서는 관련된 수식을 정리하고 수치 결과의 비교를 통하여 푸리에 변환을 이해하고자 하였다. 대표적인 입력신호에 대하여 푸리에 변환 결과를 도시하였고 푸리에 변환의 특성을 정리하였다.

Key Words : Fourier Transformation, Numerical Recipes, Spectral Method

ABSTRACT

Many references are available in the area of Fourier transformation. But some differences are found in the mathematical expressions provided in the references. These circumstances prohibit beginners from understanding and using Fourier transformation method. In this paper, relating mathematical expressions are epitomized and some numerical results are compared and interpreted to understand Fourier transformation. Fourier transformation results are displayed for representative input signals and some characteristics are summarized.

1. 서론

금속 구조물 내부의 균열을 검출하기 위하여 초음파를 이용한 기법이 널리 이용되고 있다. 이러한 스펙트럼 분석을 수행하기 위해서는 푸리에 변환 프로그램의 정확한 사용이 필요하다. 기계공학분야에서는 선형대수학과 미분방정식에 비해 상대적으로 푸리에 변환에 대한 교육이 강조되고 있지 못하다. 또한 대

표적인 푸리에 변환 프로그램의 소스 코드가 기술되어 있는 Numerical recipes in C 문헌[1]의 수식은 Schaums series[2] 등의 수학 교과서[3~6]에 기술된 수식과 약간 다른 형태로 기술되어 있으므로, 스펙트럼 분석을 처음 이용하는 연구자는 결과의 정확한 이해에 어려움을 겪는 경우가 있다. 본 논문에서는 정확한 스펙트럼 분석을 실시하기 위하여 Numerical recipes in C 문헌에 포함되어 있는 푸리에 변환 프

* 한국기술교육대학교 기계정보공학부(ysy@kut.ac.kr)

** 한국기술교육대학교 메카트로닉스 공학부(nykim@kut.ac.kr)

*** 한국기술교육대학교 기계정보공학부(jlee@kut.ac.kr)

제1저자 (First Author) : 양승용

교신저자 : 이정훈

접수일자 : 2010년 11월 1일

수정일자 : 2010년 12월 2일

확정일자 : 2010년 12월 13일

로그를 사용하여 구한 결과를 수학 문헌의 결과와 비교함으로써 결과를 의미를 확인하였고, 프로그램 사용에 있어 주의할 점을 정리하였다. 또한 대표적인 입력신호에 대하여 푸리에 변환의 결과를 제시하여 푸리에 변환의 이해를 돕도록 하였다.

II. 푸리에 변환식

1. 푸리에 변환 공식

(1) Schaums series의 푸리에 변환식 (Fourier transformation)

Schaum series(SS)[2]에 다음과 같이 푸리에 급수에 대한 내용이 공식으로 제시되어 있다. 구간 $c \leq x \leq c+2L$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 는 다음과 같은 푸리에 변환 또는 푸리에 급수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} + \phi_n \right) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{cases} \quad (2)$$

또는, 복소수 형태를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L} \int_c^{c+2L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} (a_n - ib_n) & n > 0 \\ \frac{1}{2} (a_{-n} + ib_{-n}) & n < 0 \\ \frac{1}{2} a_0 & n = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

한편 파시발의 등식은 다음과 같다[6].

$$\int_c^{c+2L} f(x)^2 dx = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (5)$$

위 등식의 증명은

$$f(x)^2 = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-in\pi x/L} \right) \quad (6)$$

이므로

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x)^2 dx \\ &= \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-in\pi x/L} \right) dx \\ &= \frac{1}{L} |c_0|^2 2L + \frac{2}{L} \int_c^{c+2L} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 dx \\ &= 2|c_0|^2 + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 2L \\ &= \frac{1}{2} a_0^2 + \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned} \quad (7)$$

임을 보일 수 있다. 단 c_n^* 는 c_n 의 켈레 복소수를 의미한다.

(2) Numerical recipes의 이산 푸리에 급수 (Discrete Fourier series)

Numerical recipes (NR)[1]에 기술된 유한한 개수의 데이터를 이용한 이산 푸리에 변환 (Discrete Fourier Transformation)의 공식을 정리하면 다음과 같다. N 개의 시점에서 데이터를 받았을 때 k 번째 시간은 $t_k = k\Delta = k \frac{2L}{N}$ (단 $k = 0, \dots, N-1$)로 나타낼 수 있다. t_k 에서의 값을 $h_k = f(t_k)$ 라 표시한다. N 개의 데이터 h_k 의 이산 푸리에 변환을 다음과 같이 정의한다.

$$H_n = \sum_{k=-N/2}^{N/2} h_k e^{2\pi i k n / N} = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N} \quad (8)$$

역으로 h_k 는 다음과 같이 표시된다.

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{-2\pi i k n / N} \quad (9)$$

파시발 등식은 다음과 같이 기술된다.

$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2 \quad (10)$$

파시벌 등식의 증명은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} |h_k|^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{2\pi i f_n x_k} \sum_{m=0}^{N-1} H_m^* e^{-2\pi i f_m x_k} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} H_n H_m^* e^{2\pi i (f_n - f_m) x_k} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} H_n H_m^* e^{2\pi i \frac{n-m}{2L} x_k} \end{aligned} \quad (11)$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} H_n H_m^* e^{2\pi i \frac{n-m}{2L} x_k} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} H_n H_m^* \delta_{nm} N \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n H_n^* \end{aligned} \quad (12)$$

을 얻을 수 있다.

(3) 수식의 비교

식 (3)의 함수에 대한 푸리에 변환 결과와 식 (8)을 다음과 같이 비교할 수 있다.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L} \int_c^{c+2L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-in\pi x_k/L} \Delta \\ &= \frac{\Delta}{2L} \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-2\pi i \frac{n}{2L} x_k} \\ &= \frac{\Delta}{2L} \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-2\pi i \frac{n}{2L} \frac{2L}{N} k} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-2\pi i \frac{nk}{N}} \\ &= \frac{1}{N} H_n \end{aligned} \quad (13)$$

즉, NR의 공식에 나타난 H_n 을 SS의 c_n 과 비교하면 $\frac{1}{N}$ 의 계수가 차이가 나며, n 의 부호가 반

대임을 알 수 있다.

한편 $f(x)$ 가 실수이므로, $f(x) = f(x)^*$ 의 관계를 이용하면, $c_{-n} = c_n^*$ 또는

$H_{-n} = H_n^*$ 관계가 성립함을 알 수 있다. 이 경우 $H_0 = H_0^*$ 이므로 H_0 는 실수이고, $H_{-N/2} = H_{N/2} = H_{N/2}^*$ 이므로 $H_{N/2}$ 도 실수이다. 짝수인 N 개의 실수 데이터에 대하여 나이퀴스트 임계주파수(Nyquist critical frequency)는 $f_c = \frac{1}{2\Delta}$ 이고 주파수의 범위는

$$f_n = \frac{n}{N\Delta}, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \quad (14)$$

이다. $-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}$ 범위의 푸리에 급수의 계수는 $2-1 + \frac{N}{2} 2-1 = N$, 즉 N 개만 독립이다.

한편 n 번째 주파수 f_n 은 $f_n = \frac{n}{2L} = \frac{n}{N\Delta}$ 의 관계가 있다.

2. Numerical recipes의 이산 푸리에 변환 프로그램

Numerical recipes in C에서는 four1 서브루틴이 N 개의 복소수 값을 가지는 h_k (즉 $2N$ 의 크기를 갖는 실수 배열)에 대하여 푸리에 변환을 수행하고 있다. 신호가 실수형 데이터일 경우 twofft 서브루틴에서 2개의 N 의 크기를 갖는 실수 배열을 각각 실수부 및 허수부에 채워 넣어 2개의 실수 데이터를 동시에 푸리에 변환하거나 허수부에 모두 0의 값을 채워 넣어 하나의 실수 데이터 세트를 푸리에 변환하게 된다. twofft 서브루틴은 다음의 수식에 기반하여 작성되어 있다. f 와 g 가 실수 함수일 때, 복소수 함수 $f + ig$ 의 푸리에 변환을 z 라고 하면

$$f + ig = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n e^{in\pi x/L} \quad (15)$$

단

$$z_n = \Phi_n(f + ig) \quad (16)$$

이고 $\Phi(\cdot)$ 은 푸리에 변환을 나타낸다. z_n 을 실수부와 허수부로 분해하면

$$\begin{aligned} z_n &= \Phi_n(f + ig) = \Phi_n(f) + i\Phi_n(g) \\ &= \text{Re}(F_n) + i\text{Im}(F_n) + i(\text{Re}(G_n) + i\text{Im}(G_n)) \\ &= \text{Re}(F_n) - \text{Im}(G_n) + i(\text{Im}(F_n) + \text{Re}(G_n)) \\ &= \text{Re}(z_n) + i\text{Im}(z_n) \end{aligned} \quad (17)$$

한편 f 와 g 가 실수함수 이므로,

$$\begin{aligned} F_{N-n} &= F_n^* \\ G_{N-n} &= G_n^* \end{aligned} \quad (18)$$

따라서

$$\begin{aligned} F_n^* &= (\text{Re}(F_n) + i\text{Im}(F_n))^* \\ &= \text{Re}(F_{N-n}) + i\text{Im}(F_{N-n}) \end{aligned} \quad (19)$$

또는

$$\text{Re}(F_n) - i\text{Im}(F_n) = \text{Re}(F_{N-n}) + i\text{Im}(F_{N-n}) \quad (20)$$

마찬가지로

$$\text{Re}(G_n) - i\text{Im}(G_n) = \text{Re}(G_{N-n}) + i\text{Im}(G_{N-n}) \quad (21)$$

따라서

$$\begin{aligned} \Phi_{N-n}(f + ig) &= \text{Re}(F_{N-n}) - \text{Im}(G_{N-n}) + i(\text{Im}(F_{N-n}) + \text{Re}(G_{N-n})) \\ &= \text{Re}(F_n) + \text{Im}(G_n) + i(-\text{Im}(F_n) + \text{Re}(G_n)) \\ &= \text{Re}(z_{N-n}) + i\text{Im}(z_{N-n}) \end{aligned} \quad (22)$$

식 (17)과 (22)로부터

$$\begin{aligned} \text{Re}(F_n) &= \frac{1}{2}(\text{Re}(z_n) + \text{Re}(z_{N-n})) \\ \text{Im}(F_n) &= \frac{1}{2}(\text{Im}(z_n) - \text{Im}(z_{N-n})) \\ \text{Re}(G_n) &= \frac{1}{2}(\text{Im}(z_n) + \text{Im}(z_{N-n})) \\ \text{Im}(G_n) &= -\frac{1}{2}(\text{Re}(z_n) - \text{Re}(z_{N-n})) \end{aligned} \quad (23)$$

와 같이 쓸 수 있다. 따라서 f 의 푸리에 급수를 구할 경우 z 의 푸리에 급수를 구한 후 식 (23)에 따라 F_n 를 구성할 수 있다.

III. 계산 결과

SS의 푸리에 변환 공식을 FORTRAN 언어를 이

용하여 프로그램으로 작성하였고 시간 데이터에 대하여 푸리에 변환한 결과를 NR의 twofft 서브루틴을 이용하여 계산한 결과와 비교하였다. 몇 가지 대표적인 입력 신호에 대하여 그 결과를 정리하였다. 계산 프로그램은 FORTRAN 언어로 구현되었으나 대학교육에서 많이 활용되고 있는 C 언어를 이용하여 구현하는 것도 큰 어려움 없이 가능 하다.

(1) 상수 함수인 경우

모든 시간에서 $f(t) = 1$ 로 일정한 값을 갖는 신호에 대하여 SS의 공식을 이용하여 계산한 결과와 NR의 twofft 서브루틴을 이용하여 푸리에 급수를 계산한 후 N 으로 나누어준 값을 그림 1에 나타내었다. 두 결과가 일치함을 확인 할 수 있다.

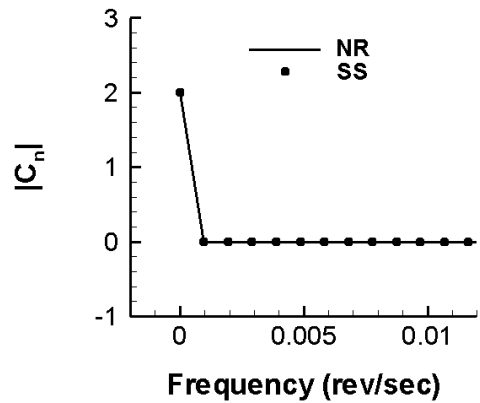


그림 1. 상수 함수의 푸리에 변환.
Fig. 1. Fourier transformation of a constant function.

(2) 순수한 sine 함수

$0 \leq t \leq 100 \times 2\pi$ 범위에서 그림 2에 나타난 것과 같은 사인 함수이고 그 이후는 0의 값을 갖는 신호에 대하여 푸리에 변환을 실시 하였다. 0의 값을 추가로 포함(zero-padding)시킨 이유는 twofft 서브루틴에서 입력받는 데이터의 개수가 2의 제곱승이 되어야 하기 때문이다. SS와 NR에 의한 푸리에 변환 결과를 그림 3에 나타내었다. 두 결과는 거의 완벽히 동일하였다. Zero-padding의 효과로 인해 푸리에 변환 결과의 값이 입력 주파수 주위로 약간 흩어짐을 관찰할 수 있었다.

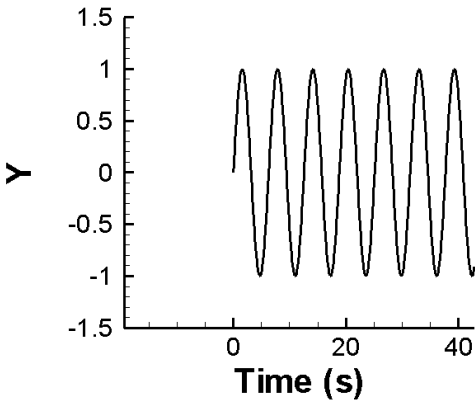


그림 2. 사인 함수 입력파형
Fig. 2. Sinusoidal input function

zero-padding이 필요 없도록 주기의 정수배 시간동안 16384개의 데이터를 읽는 경우의 푸리에 변환 결과를 그림 4에 나타내었다. 이 경우 입력 주파수에서 정확히 1의 푸리에 계수가 계산되었다.

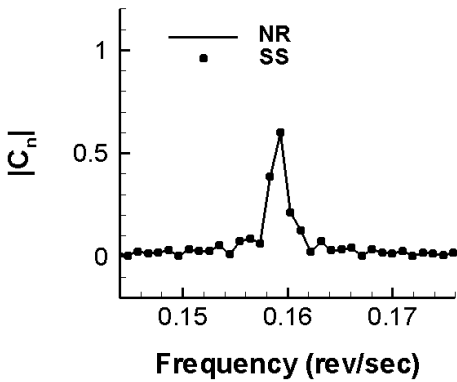


그림 3. 그림 2의 신호에 대한 푸리에 변환 결과
Fig. 3. Fourier transformation result of Fig. 2

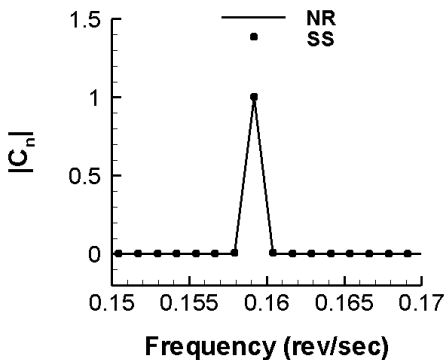


그림 4. 그림 2의 신호에 대한 푸리에 변환 결과. zero-padding 이 없는 경우
Fig. 4. Fourier transformation result of Fig. 2 when there is not zero-padding

(3) 변형된 sine 함수

$0 \leq t \leq 100 \times 2\pi$ 범위에서 그림 5와 같은 변형된 사인함수 파형을 갖고 그 이상의 시간에서는 0의 값을 갖는 신호에 대하여 푸리에 변환을 실시하였고, 그 결과를 그림 6에 나타내었다. 입력신호의 한 주기에 대하여 100개의 데이터 포인트를 취하였다. 푸리에 변환 후 NR과 SS의 결과는 거의 정확히 일치하였다.

푸리에 변환 결과를 보면 입력 주파수

$$\frac{1}{2\pi} = 0.159 \text{ Hz의 정수배 되는 주파수에서 약간의}$$

신호가 발생함을 볼 수 있다. 즉 그림 5와 같이 변형된 sine 파는 푸리에 변환을 실시하면 기본 주파수 (fundamental frequency) 파형 이외에 고조파 (harmonics)가 발생함을 볼 수 있다. 이러한 현상은 구조물 내의 닫힌 균열 (closed crack)을 검출하는데 활용될 수 있다[7].

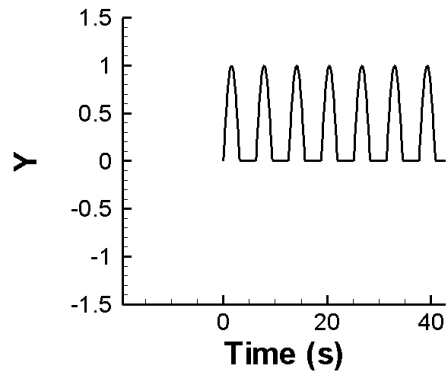


그림 5. 변형된 sine 입력파
Fig. 5. Distorted sinusoidal input function

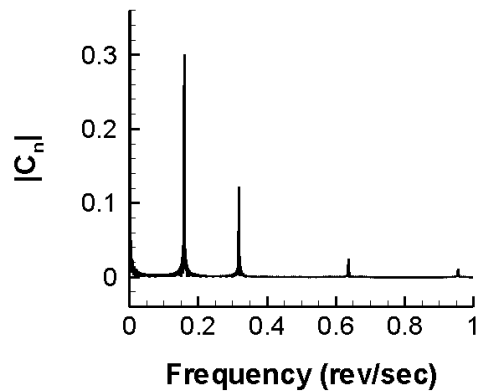


그림 6. 그림 5의 신호에 대한 푸리에 변환 결과
Fig. 6. Fourier transformation result of Fig. 5

IV. 결론

본 논문에서는 Schaums series(SS)의 푸리에 변환식과 Numerical recipes(NR)의 프로그램을 이용하여 푸리에 변환한 결과를 비교하였다. 두 변환 결과가 거의 정확히 일치함을 확인 할 수 있었다. 몇 가지 대표적인 입력신호에 대하여 푸리에 변환을 실시하였으며 다음을 확인할 수 있었다.

- (1) NR의 twofft 서브루틴을 이용하여 계산된 푸리에 계수는 그 값을 전체 입력 데이터의 수 N으로 나누어 주어야 SS의 결과와 일치하였다.
- (2) NR의 twofft 서브루틴을 사용하기 위하여 데이터의 개수는 2^m 개가 되어야 하며, 그렇지 않을 경우 zero-padding이 필요하다. Zero-padding이 들어갈 경우, 푸리에 변환 결과는 이상적인 경우에 비해 분산되었다.
- (3) 사인형태 파형의 양수 값만 존재하도록 변형된 파형의 경우 푸리에 변환에 의해 고조파(harmonics)가 발생되었다.

감사의 글

이 논문의 일부는 2009년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국과학재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2007-00467). 이 논문의 일부는 양승용에 대한 한국기술교육대학교 교육연구진흥비지원 프로그램(2010년)의 지원에 의하여 수행되었음.

참 고 문 헌

- [1] Press W., Flannery B., Teukolsky S. and Vetterling, "Numerical recipes in C," *Cambridge University Press*, 1988.
- [2] Spiegel M., "Schaums outline series: Mathematical handbook," *McGraw Hill*, 1968.
- [3] Smith S., "Guid to digital signal processing", *California Technical Publishing*, 1999.
- [4] Chapra S. and Canale R., "Numerical

Methods for engineers", *McGraw Hill*, 1988.

- [5] Figliola R. and Beasley D., "Theory and design for mechanical measurements", *Wiley*, 2006.
- [6] 최행진, "물리학자 푸리에와 고속 푸리에 변환", *교우사*, 2007.
- [7] Kim N, Jhang K, Lee T, Yang S and Chang Y., "Reflection and transmission of acoustic waves across contact interfaces", *J. Korean Soc. Nondest. Testing*, Vol. 28, pp. 292-301, 2008. 6.

양 승 용 (Seung-Yong Yang)



2000년 5월 : 브라운 대학교(공학박사)
 2006년 3월~현재 :
 한국기술교육대학교
 기계정보공학부 교수
 <관심분야> 수치해석, 금속재료

김 노 유 (Nohyu Kim)



1996년 12월 : 노스웨스턴 대학교(공학박사)
 1998년 3월~현재 :
 한국기술교육대학교
 메카트로닉스공학부 교수
 <관심분야> 비파괴 검사

이 정 훈 (Jeonghoon Lee)



2003년 8월 : 서울대학교 기계항공공학부(공학박사)
 2003년~2006년 :
 현대-기아자동차 기술연구소
 2006년~2008년 : 미국
 브룩헤이븐 국립연구소
 2010년 3월~현재 :
 한국기술교육대학교 기계정보공학부 교수
 <관심분야> 실험 역학, 에어로졸 공학