論文 DOI:10.5139/JKSAS.2010.38.7.664

# Time-to-go 다항식 유도 법칙의 표적 가관측성 분석

이창훈*, 김태훈*, 탁민제**

# Target Observability Analysis of Time-to-go Polynomial Guidance Law

Chang-Hun Lee*, Tae-Hun Kim* and Min-Jea Tahk*

## ABSTRACT

This paper provides the target observability analysis of time-to-go polynomial guidance law with bearing-only measurement. In this study, a direct approach is used to analyze the target observability. Since the observability condition of a constant-velocity target is given by the function of LOS angle only, the target observability characteristic is determined by substituting the closed form solution of LOS angle to the observability condition directly. The analysis results show that the target observability is depended on the choice of guidance gain, initial intercept condition and guidance command shape. After that this mathematical analysis result is evaluated and demonstrated by number of simulation.

## 초 록

본 논문은 표적의 방향 정보만을 측정할 경우 $t_{go}$-다항식 유도법칙의 표적 가관측성 분석을 다룬다. 본 연구에서는 직접적인 방법으로 표적의 가관측성을 분석한다. 등속도 표적에 대해 가관측성을 갖기 위한 조건들이 시선각의 함수로만 주어지기 때문에, $t_{go}$-다항식 유도법칙을 적용 했을 때 시선각의 닫힌 해를 도출하고, 이 닫힌 해를 가관측성 조건에 직접 대입하므로, $t_{go}$-다항식 유도법칙의 표적 가관측성 특성을 해석한다. 표적의 가관측성은 유도법칙의 유도이득, 초기 유도 조건과 유도명령의 형상에 따라 달라진다. 최종적으로 시뮬레이션을 통해 $t_{go}$-다항식 유도법칙의 표적 가관측성을 검증한다.

**Key Words :** Target Observability(표적 가관측성), Time-to-go Polynomial Guidance Law(T-go 다항식 유도법칙)

## Ⅰ. 서 론

2차 세계 대전 이후 각종 전술 유도탄에는 종말 호밍 유도로 비례항법유도 (PNG)가 적용되고 있으며, PNG의 경우 가속도 명령은 시선각 속도 (LOS rate)와 접근하는 속도 (closing velocity)에 의해 결정된다. PNG는 구조가 간단하고 구현이 용이하지만, 기동하는 표적에 대해서 요격성능이 떨어지며 다양한 종말 호밍 구속조건 (충돌각, 충돌시간 등)을 고려 할 수 없는 단점이 있다. 최근에는 유도탄의 운용 목적에 따른 특정한 종말 호밍 구속조건들 (충돌각, 충돌시간)을 고려한 최신 유도 법칙들 (advanced guidance laws)이 개발되었다. 이러한 최신 유도법칙의 적용을 위해서는 표적의 상대위치, 상대

† 2010년 2월 22일 접수 ~ 2010년 6월 17일 심사완료
* 정회원, KAIST 항공우주공학전공 대학원
** 정회원, KAIST 항공우주공학전공
교신저자, E-mail : mjtahk@fdcl.kaist.ac.kr
대전광역시 유성구 과학로 335

속도 및 가속도를 알아야 하는데, 수동형 탐색기를 사용하여 방향정보 만을 이용하는 경우 표적의 상태변수들은 직접 측정이 불가능하다. 따라서 이러한 표적의 상태변수를 효과적으로 추정할 수 있는 유도필터 (guidance filter)가 필요하게 된다. 표적의 방향정보 만을 사용하여 유도필터를 구성하는 경우, 표적의 가관측성이 유도탄의 기동에 따라 변하게 된다. 참고문헌 [1]에서는 등속도로 움직이는 표적의 방향정보 만을 사용할 때, 유도탄의 기동과 가관측성의 관계를 분석하였다. 유도탄이 시선각 방향의 수직으로 기동을 할 때 가관측성이 확보되고, 유도탄의 기동이 없을 때에는 가관측성이 나빠져서 표적의 상대적인 위치 추정이 불가능해진다.

종말 호밍 단계에서 유도탄의 기동은 어떤 유도법칙을 적용하느냐에 따라 결정되게 된다. 참고문헌 [2]에 따르면 각종 전술 유도탄에 널리 사용되어진 PNG의 경우는, 시선각속도를 선형적으로 감소시켜서 최종적으로 0이 되도록 한다. 즉 호밍단계의 후반부에 유도탄의 기동이 거의 없는 상태가 되므로 표적의 가관측성이 거의 상실되는 현상이 일어난다. 이렇듯 종말 호밍 유도에 사용되는 유도법칙에 따라 표적의 가관측성이 직접 영향을 받기 때문에, 유도법칙에 따른 가관측성 분석이 요구된다. PNG의 경우 여러 연구를 통해 유도법칙과 가관측성의 관계가 어느 정도 규명되었다. 특히 참고문헌 [3]에서는 PNG의 항법상수 N에 따른 표적의 가관측성이 어떻게 영향을 받는지에 대해 분석 하였다.

본 논문에서는 최신 유도 법칙의 하나인 $t_{go}$-다항식 유도법칙[4]의 표적의 가관측성 분석을 다룬다. 최근에 개발 된 $t_{go}$-다항식 유도법칙은 가속도명령을 $t_{go}$-다항식 형태로 가정하고, 종말 구속 조건을 만족 시키도록 다항식의 계수를 결정하는 방식으로 유도되며, 종말 구속 조건으로 충돌각, 측방향 가속도 및 측방향 가속도의 변화율을 고려 할 수 있다. 또한 본 논문에서는 등속도로 움직이는 표적의 가관측성을 고려한다. 참고문헌 [1]에 따르면 표적의 가관측성 조건은 시선각 (LOS)의 미분방정식 형태로 주어지므로 본 연구에서는 가관측성 분석을 위해 직접적인 접근방법을 사용한다. 먼저 $t_{go}$-다항식 유도법칙이 사용 될 때 선형화된 2차원 종말 호밍 기하에서 시선각의 닫힌 해 (closed-form solution)를 구하고, 이 해를 참고문헌 [1]에서 유도 된 가관측성의 조건식에 직접 대입하므로, $t_{go}$-다항식 유도법칙의 가관측성을 분석한다. 이를 통해 $t_{go}$-다항식 유도법칙에서 표적의 가관측성은 초기 유도 조건과 유도이득 (guidance gain)에 따라 어떻게 영향을 받는지에 대해 규명한다.

본 논문의 2.1장에서는 $t_{go}$-다항식 유도법칙에 대해 다루고, 2.2장에서는 $t_{go}$-다항식 유도법칙을 종말 호밍 유도에 적용했을 때 시선각의 닫힌 해를 유도한다. 2.3장에서는 표적의 방향정보 만을 알고 있을 때 등속도로 움직이는 표적의 가관측성 조건을 유도하고, 2.4장에서는 $t_{go}$-다항식 유도법칙과 표적의 가관측성 사이의 관계를 규명한다. 2.5장에서는 표적의 상태변수 추정 시뮬레이션을 통해 $t_{go}$-다항식 유도법칙의 가관측성을 PNG와 비교 분석하기로 한다.

## II. 본 론

### 2.1 $t_{go}$-다항식 유도법칙

참고문헌 [4]에서 제시 된 $t_{go}$-다항식 유도법칙은 유도명령을 $t_{go}$의 다항식으로 가정하고 운동방정식을 적분한 후, 종말 구속 조건을 만족하도록 다항식의 계수를 결정한다. 본 장에서는 독자의 편의를 위해 참고문헌 [4]에서 다루고 있는 $t_{go}$-다항식 유도법칙의 유도과정을 간략히 기술한다. 그림 1은 $t_{go}$-다항식 유도법칙의 종말 호밍 기하를 나타낸다. $(X_I, Y_I)$는 관성좌표계를 나타내며, $(X_f, Y_f)$는 관성좌표계에서 충돌각 $\gamma_f$만큼 회전한 충돌각좌표계를 나타낸다. $\gamma_M$와 $\theta$는 각각 관성좌표계와 충돌각좌표계에서 정의 된 비행경로각을 나타내며, $R$은 표적과 유도탄의 상대거리를 나타낸다. 또한 $\lambda$는 충돌각좌표계에서 정의된 시선각을 나타낸다. 만약 종말 호밍 과정에서 유도탄의 속도 $V_M$이 일정하고, 중기유도에서 어느 정도 정확도를 가지고 종말 호밍이 시작 된다고 가정하면 종말 호밍 시 충돌각좌표계에서 정의되는 측방향 거리 $y$와 측방향 속도 $v$가 작으

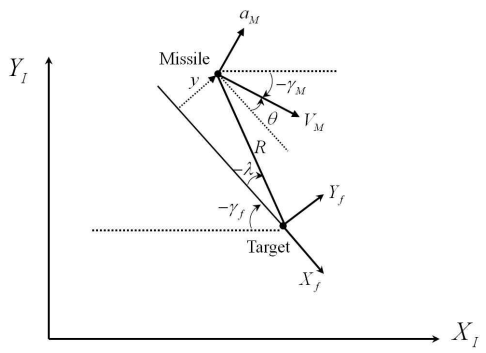


그림 1. 유도법칙의 종말 호밍 기하

므로, 충돌각좌표계에서 정의 된 비행경로각 $\theta$ 역시 작아진다. 따라서 위의 가정을 이용하면, 그림 1의 호밍 기하에서 다음과 같은 선형화 된 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{y} &= v \\ \dot{v} &= a_M\end{aligned} \tag{1}$$

여기에서 $y$,$v$는 각각 충돌각좌표계에서 정의되는 측방향 거리 및 속도를 나타내며, $a_M$는 유도탄의 측방향 가속도명령을 나타낸다. 위의 운동방정식에서 종말 시간에서 측방향 거리와 속도를 0으로 만드는 종말 구속 조건을 고려한다면, 유도법칙에 필요한 항의 개수는 최소 2개가 필요하다. 단, 여기에서 $n>m\geq 0$의 조건을 만족해야 한다.

$$a_M(t) = C_m t_{go}^m + C_n t_{go}^n \tag{2}$$

여기에서 $t_{go}=t_f-t$로 정의된다. 다음으로 식 (2)를 운동방정식에 대입한 후, 적분하면 종말 시간에서 충돌각좌표계에서 정의되는 측방향 거리 및 속도를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$v(t_f) = v(t_0) + \frac{C_m}{(m+1)}\hat{t}_{go}^{m+1} + \frac{C_n}{(n+1)}\hat{t}_{go}^{n+1} \tag{3}$$

$$y(t_f) = y(t_0) + v(t_0)\hat{t}_{go} + \frac{C_m}{(m+2)}\hat{t}_{go}^{m+2} + \frac{C_n}{(n+2)}\hat{t}_{go}^{n+2} \tag{4}$$

여기에서 $\hat{t_{go}}=t_f-t_0$ 이며, 충돌각제어를 위한 종말 구속 조건을 만족시키도록 식 (3), (4)의 좌변을 0으로 놓고 $C_m, C_n$을 결정하여, 식 (2)에 대입하면 유도명령은 다음과 같이 구해진다.

$$a_M(t) = -\frac{(m+2)(n+2)}{t_{go}^2}y(t) - \frac{(n+m+3)}{t_{go}}v(t) \tag{5}$$

여기에서 $n,m$은 $t_{go}$-다항식 유도법칙의 유도이득을 나타내며, $n>m\geq 0$의 관계식을 만족해야 한다. 유도이득을 $m=0,n=1$으로 선정하면, $t_{go}$-다항식 유도법칙은 충돌각제어 유도법칙과 동일해지며, $n=m+1$인 경우는 참고문헌 [6]에서 고려했던 식 (6)과 같은 성능지수를 최소화하는 최적유도법칙과 같아진다.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{u^2}{t_{go}^{N-3}}dt \tag{6}$$

단 여기에서 N은 항법상수를 나타낸다. 또한 $t_{go}$-다항식 유도법칙은 $n>m>0$ 이면, 종말 시간에서 측방향 가속도명령이 0이 되고, $n>m>1$ 이면, 종말 시간에서 측방향 가속도의 시간변화율도 0이 되기 때문에 $t_{go}$ 추정오차에 강인한 특성을 가진다. $t_{go}$-다항식 유도법칙은 유도이득 선정에 있어서 $n>m\geq 0$ 의 관계를 만족하는 어떠한 실수값에도 성립하므로, 충돌각제어 유도법칙의 더 일반적인 형태라고 볼 수 있다.

## 2.2 시선각 방정식의 해

$t_{go}$-다항식 유도법칙을 종말 호밍에 적용할 때, 시간에 따른 시선각의 거동을 알 수 있다면, 가관측성 분석에 많은 정보를 제공해 줄 수 있다. 따라서 본 장에서는 식 (1)과 같이 주어지는 선형화된 2차원 종말 호밍에서 $t_{go}$-다항식 유도법칙이 적용 되었을 때 시선각의 닫힌 해를 유도한다. 시선각의 닫힌 해를 구하기 위해 시선각 방향에 수직인 상대운동방정식 (relative dynamics)을 다음과 같이 고려한다.

$$r_x\ddot{\lambda} - 2V_c\dot{\lambda} = -a_M = -N_1\frac{r_y}{t_{go}^2} - N_2\frac{v_y}{t_{go}} \tag{7}$$

여기에서 $r_x$는 충돌각좌표계에서 정의되는 전진방향 상대거리이며, $r_y$와 $v_y$는 충돌각좌표계에서 정의되는 측방향 상대거리 및 상대속도로, 만약 정지 된 표적을 고려한다면, $r_y=-y$, $v_y=-v$로 간단히 표현 될 수 있다. $N_1, N_2$는 유도이득을 나타내며, $t_{go}$-다항식 유도법칙은$N_1=(m+2)(n+2)$ $N_2=(m+n+3)$의 값을 갖는다. $\lambda$는 충돌각좌표계에서 정의되는 시선각을 나타내고, $V_c$는 표적에 접근하는 속도로 거의 일정하다고 가정한다. 또한 중기유도에서 어느 정도 정확도를 가지고 종말 호밍이 시작 된다고 가정하면, 초기 측방향 거리가 작으므로, 충돌각좌표계에서 정의되는 시선각 또한 작아진다. 따라서 이 조건에서 다음과 같은 근사가 가능하다.

$$\lambda = \frac{r_y}{r_x} \qquad r_x = V_c t_{go} \tag{8}$$

식 (8)을 이용하여 식 (7)을 시선각과 $t_{go}$로 정리하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\ddot{\lambda} + \frac{N_2-2}{t_f-t}\dot{\lambda} + \frac{N_1-N_2}{(t_f-t)^2}\lambda = 0 \tag{9}$$

식 전개의 편의를 위해 $\tau=t-t_f$로 정의하고 식 (9)를 정리하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\tau^2\ddot{\lambda}-(N_2-2)\tau\dot{\lambda}+(N_1-N_2)\lambda=0 \tag{10}$$

식 (10)은 코시-오일러 방정식 (Cauchy-Euler equation) 형태이므로, $\tau=e^x$로 치환한 후, 정리하면 계수가 상수인 2차 미분방정식이 된다.

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2}-(N_2-1)\frac{d\lambda}{dx}+(N_1-N_2)\lambda=0 \tag{11}$$

2차 상미분방정식의 일반해는 $\lambda(x)=e^{\alpha x}$ 형태로 주어지므로, 일반해 형태를 식 (11)에 대입하면 특성방정식 (characteristic equation)이 다음과 같이 구해진다.

$$\alpha^2-(N_2-1)\alpha+(N_1-N_2)=0 \tag{12}$$

여기에서 $t_{go}$-다항식 유도법칙의 유도이득 $N_1, N_2$을 대입한 후 특성방정식의 해를 구하면, 0이 아닌 서로 다른 두 실근이 구해진다.

$$\alpha_1=n+1,\quad \alpha_2=m+1 \tag{13}$$

따라서 식 (11)의 일반해는 다음과 같다.

$$\lambda(x)=C_1e^{(n+1)x}+C_2e^{(m+1)x} \tag{14}$$

$x=\ln\tau$을 이용해 원래 식으로 다시 치환하면, 시간에 대한 시선각은 다음과 같이 구해진다.

$$\lambda(t)=C_1(t-t_f)^{n+1}+C_2(t-t_f)^{m+1} \tag{15}$$

여기에서 $C_1, C_2$는 초기 호밍 조건과 관련이 있는 계수로, $\lambda(t_0)$, $\dot{\lambda}(t_0)$이 주어지면 다음과 같이 계산된다.

$$C_1=\frac{(m+1)\lambda(t_0)-(t_0-t_f)\dot{\lambda}(t_0)}{(m-n)(t_0-t_f)^{n+1}}$$
$$C_2=\frac{(n+1)\lambda(t_0)-(t_0-t_f)\dot{\lambda}(t_0)}{(n-m)(t_0-t_f)^{m+1}} \tag{16}$$

## 2.3 등속도 표적의 가관측성 조건

본 장에서는 표적의 방향정보 만을 이용할 때 등속도로 움직이는 표적의 가관측성 조건을 유도한다. 본 논문에서 유도되는 표적의 가관측성 조건은 참고문헌 [1], [3]에서 제시된 방법을 이용한다. 표적이 알려지지 않는 등속도로 이동하고 있을 때, 유도탄과 표적간의 상대위치와 상대속도는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
r_x(t)&=r_x(t_0)+(t-t_0)v_x(t_0)-\int_{t_0}^{t}(t-\tau)a_{M_x}(\tau)d\tau\\
r_y(t)&=r_y(t_0)+(t-t_0)v_y(t_0)-\int_{t_0}^{t}(t-\tau)a_{M_y}(\tau)d\tau\\
v_x(t)&=v_x(t_0)-\int_{t_0}^{t}a_{M_x}(\tau)d\tau\\
v_y(t)&=v_y(t_0)-\int_{t_0}^{t}a_{M_y}(\tau)d\tau
\end{aligned} \tag{17}$$

여기에서 $a_M$는 유도탄의 가속도명령을 나타내며, 유도탄 동체에 탑재 된 센서 (sensor)에서 정확하게 측정 된다고 가정한다. 또한 유도탄의 탐색기 (seeker)로부터 표적의 방향정보인 시선각을 측정하게 되는데, 시선각은 다음과 같이 표현 된다.

$$\lambda(t)=\tan^{-1}\left(\frac{r_y(t)}{r_x(t)}\right) \tag{18}$$

식 (18)은 표적과 유도탄 사이의 상대위치의 비선형형태 주어지는데, 식 (18)을 의사선형화 (pseudo-linearization)를 이용해 다시 정리하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$r_y(t)\cos\lambda(t)-r_x(t)\sin\lambda(t)=0 \tag{19}$$

여기에서 식 (17)을 식 (19)에 대입하여 정리하면 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
0=&\cos\lambda(t)\left[r_y(t_0)+(t-t_0)v_y(t_0)-\int_{t_0}^{t}(t-\tau)a_{M_y}(\tau)d\tau\right]\\
&-\sin\lambda(t)\left[r_x(t_0)+(t-t_0)v_x(t_0)-\int_{t_0}^{t}(t-\tau)a_{M_x}(\tau)d\tau\right]
\end{aligned} \tag{20}$$

식 (20)에서 초기 상대거리와 상대속도는 미지수 (unknown)이므로 위의 식을 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\mathbf{M}(t)\,\mathbf{x}=\mathbf{y}(t) \tag{21}$$

여기에서,

$$\mathbf{x}=\left[r_x(t_0), r_y(t_0), v_x(t_0), v_y(t_0)\right]^T$$
$$\mathbf{M}(t)=\left[-\sin\lambda(t), \cos\lambda(t), -\tilde{t}\sin\lambda(t), \tilde{t}\cos\lambda(t)\right]$$
$$\mathbf{y}(t)=\int_{t_0}^{t}(t-\tau)\left[a_{M_y}(\tau)\cos\lambda(t)-a_{M_x}(\tau)\sin\lambda(t)\right]d\tau$$

와 같이 정리되며, $\tilde{t}=t-t_0$이다. 유도탄의 가속도와 표적의 방향정보는 측정 할 수 있기 때문에 $M(t), y(t)$는 주어지는 정보이며, 이 값들을 통해 초기 상대위치와 상대속도인 $x$을 구해야 한다. $x$가 주어지면 식 (17)의 적분을 통해 임의의 시간

에서 상대위치와 상대속도를 구할 수 있으므로, 매순간 표적의 상태변수를 알 수 있다. 따라서 가관측성이 존재할 조건은 식 (21)에서 유일한 $x$가 결정되어야 하는 것과 같다. 식 (21)에서 유일한 $x$가 결정되기 위해서는 식 (22)와같이 정의되는 행렬 $A$의 역행렬 (inverse matrix)이 존재해야한다.

$$\mathbf{A}(t)\begin{bmatrix}\mathbf{M}(t)\\ \dot{\mathbf{M}}(t)\\ \ddot{\mathbf{M}}(t)\\ \dddot{\mathbf{M}}(t)\end{bmatrix} \tag{22}$$

행렬 $A$의 역행렬이 존재하기 위해서는 $A$의 행렬식 (determinant)이 0이 되면 안되므로, 최종적으로 가관측성을 갖기 위한 조건은 식 (23)과 같이 주어진다.

$$\det\left(\mathbf{A}(t)\right)\neq 0 \tag{23}$$

식 (22)를 통해 등속도 표적에 대한 가관측성 조건을 구하면, 다음과 같이 시선각의 미분방정식으로 표현된다.

$$\det\left(\mathbf{A}(t)\right)=2\dot{\lambda}(t)\dddot{\lambda}(t)-3\ddot{\lambda}(t)^2+4\dot{\lambda}(t)^4\neq 0 \tag{24}$$

여기에서 식 (8)을 이용하여 시선각이 작다고 가정하면, 의사관측행렬 (pseudo-measurement matrix) $M(t)$는 다음과 같이 간략화 된다.

$$\mathbf{M}(t)=\left[-\lambda(t),1,-(t-t_0)\lambda(t),(t-t_0)\right] \tag{25}$$

식 (25)를 이용해 $A$를 구성하고, $A$의 행렬식으로부터 가관측성 조건을 구하면, 식 (24)는 다음과 같이 간략화 된다.

$$\det\left(\mathbf{A}(t)\right)=2\dot{\lambda}(t)\dddot{\lambda}(t)-3\ddot{\lambda}(t)^2\neq 0 \tag{26}$$

최종적으로 본 논문에서 고려하는 가관측성 조건은 식 (26)과 같은 시선각의 미분방정식 형태로 주어지며, 미분방정식의 자명해 (trivial solution)는 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$\dot{\lambda}(t)\neq 0 \tag{27}$$

즉 가관측성을 갖기 위한 첫번째 조건은 시선각속도가 0이 되면 안 된다는 것을 의미하며, 또 다른 가관측성 조건은 종말 호밍 과정에서 시선각이 식 (26)과 같은 미분방정식의 비자명해 (non-trivial solution)가 되어서는 안 된다는 것을 의미한다.

## 2.4 유도 법칙의 가관측성 분석

본 장에서는 2.3장에서 유도 된 등속도 표적에 대한 가관측성 조건을 이용하여, $t_{go}$-다항식 유도법칙의 가관측성 분석을 다룬다. 2.3장에서 유도된 두 가지 가관측성 조건은 다음과 같다.

1) $\dot{\lambda}(t)\neq 0$

2) $2\dot{\lambda}(t)\dddot{\lambda}(t)-3\ddot{\lambda}(t)^2\neq 0$

여기에서 한 가지 주목할 점은 가관측성 조건이 시선각의 식으로만 이루어져 있다는 것이다. 따라서 2.2장에서 얻어진 시선각의 닫힌 해를 위의 가관측성 식에 직접 대입하므로 $t_{go}$-다항식 유도법칙의 표적의 가관측성을 분석할 수 있다.

첫 번째 표적의 가관측성 조건은 시선각속도로 주어지므로, 시선각의 일반해인 식 (15)의 미분을 통해 시선각속도를 구하면 다음과 같다.

$$\dot{\lambda}(t)=C_1(n+1)\left(t-t_f\right)^n+C_2(m+1)\left(t-t_f\right)^m \tag{28}$$

가관측성을 갖기 위해서는 시선각속도가 호밍 유도 과정 중 어느정도 값을 유지해야 한다. 시선각속도가 0이 되거나 너무 작은 값을 갖게 되면 가관측성이 나빠지게 된다. 식 (28)을 보면, $t_{go}$-다항식 유도법칙의 경우 시선각속도는 유도법칙을 구성하는 유도이득의 영향을 받는다. 여기에서 유도이득의 선정에 따른 시선각속도는 두 가지의 경우로 나누어서 분석 할 수 있다. 먼저 $n>m=0$ 인 경우 시선각속도는 다음과 같이 얻어 진다.

$$\dot{\lambda}(t)=C_1(n+1)\left(t-t_f\right)^n+C_2 \tag{29}$$

식 (29)는 $t-t_f$에 대한 $n$차 함수가 되고, $t$가 $t_f$이 될 때 시선각속도는 $C_2$ 값에 수렴하게 된다. 따라서 유도탄이 표적에 탄착할 때 0이 아닌 시선각속도를 갖기 때문에, 표적의 가관측성이 유지된다. 다음으로 $n>m>0$ 인 경우는 시선각속도가 식 (28)과 같이 $t-t_f$에 대한 다항식 형태로 주어진다. 따라서 $t-t_f$가 0이 될 때 시선각속도가 0이 되지만, 호밍 유도 과정 중에는 시선각속도가 지속적으로 감소하는 것이 아니라, $t-t_f$에 대한 다항식 형태로 비선형적으로 계속 변화하기 때문에 탄착 직전까지 표적의 가관측성을 제공하게 된다.

다음으로 두 번째 가관측성 조건은 식 (26)과 같이 구성되며, 식 (15)를 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\ddot{\lambda}(t)&=C_1(n+1)n\left(t-t_f\right)^{n-1}+C_2(m+1)m\left(t-t_f\right)^{m-1}\\ \dddot{\lambda}(t)&=C_1\left(n^2-1\right)n\left(t-t_f\right)^{n-2}+C_2\left(m^2-1\right)m\left(t-t_f\right)^{m-2}\end{aligned} \tag{30}$$

이렇게 얻어진 식 (30)을 식 (26)에 대입하고 정리한다. 두 번째 가관측성 조건은 유도이득 $m,n$의 값에 따라 두 가지 경우로 정리 된다.

$$\begin{aligned} n>m=0 \;&\rightarrow\; C_1\neq 0 \\ n>m>0 \;&\rightarrow\; C_1\neq 0 \;\; and \;\; C_2\neq 0 \end{aligned} \tag{31}$$

여기에서 $C_1, C_2$는 식 (16)과 같이 주어지며, 초기 호밍 조건과 관련 있는 계수이다. 따라서 초기 시선각, 초기 시선각속도, $\lambda(t_0)$, $\dot{\lambda}(t_0)$의 값에 따라 가관측성이 결정 되게 된다. 먼저 $n>m=0$ 인 경우, $C_1$값이 0이 되면 안 되기 때문에 다음과 같은 조건을 얻을 수 있다.

$$\lambda(t_0)-(t_0-t_f)\dot{\lambda}(t_0)\neq 0 \tag{32}$$

식 (32)의 가관측성 조건을 만족하기 위해서는 $\lambda(t_0)=\dot{\lambda}(t_0)\neq 0$ 이거나 $\lambda(t_0)\neq(t_0-t_f)\dot{\lambda}(t_0)$ 이어야 한다. $\lambda(t_0)=\dot{\lambda}(t_0)\neq 0$ 인 경우는 식 (32)의 자명해 (trivial solution)로 초기 유도탄의 침로각 (heading angle) 방향이 표적을 정확하게 향하거나, 초기 유도오차가 0이어서는 안된다는 것을 의미한다. 위의 경우와 같은 호밍 조건에서는 유도탄이 기동 없이 표적을 탄착 할 수 있으므로, 표적의 가관측성이 손실 된다는 사실은 직관적으로 쉽게 이해 될 수 있다. 또한 초기 시선각과 초기 시선각속도가 0이 아닌 경우에도, 초기의 특정한 $t_{go}$ 값에 의해, 시선각과 시선각속도가 특정한 관계식 $\lambda(t_0)=(t_0-t_f)\dot{\lambda}(t_0)$을 만족시키게 되면 가관측성이 상실 될 수 있다. 다음으로 $n>m>0$ 인 경우, 식 (31)로부터 다음과 같은 가관측성 조건을 얻는다.

$$\begin{aligned} (m+1)\lambda(t_0)-(t_0-t_f)\dot{\lambda}(t_0)\neq 0 \\ (n+1)\lambda(t_0)-(t_0-t_f)\dot{\lambda}(t_0)\neq 0 \end{aligned} \tag{33}$$

식 (33)에서 유도이득 $n$과 $m$은 서로 다른 실수 이므로, 가관측성을 갖기 위한 조건은 $\lambda(t_0)=\dot{\lambda}(t_0)\neq 0$ 뿐이다. 따라서 유도이득이 $n>m>0$인 경우는, 기동없이 표적을 탄착하는 상황을 제외하면 가관측성이 유지된다.

위의 결과를 정리하면, 첫번째 가관측성 조건은 $t_{go}$-다항식 유도법칙의 유도이득에 따른 유도명령의 형상과 관련이 있고, 두번째 가관측성 조건은 종말 호밍 조건과 관련 있다. 따라서 $t_{go}$-다항식 유도법칙의 유도이득을 $n>m>0$ 을 설정하고, 초기 유도오차가 없는 경우, 즉 다시 말해서 유도탄이 아무런 기동없이 표적을 탄착하는 경우를 제외하면, 가관측성이 확보됨을 확인 할 수 있다.

## 2.5 시뮬레이션

본 장에서는 $t_{go}$-다항식 유도법칙의 가관측성을 수치적으로 해석하기 위해, 유도필터 (guidance filter)를 이용해서, 시선각 정보가 주어질 때 표적의 상태변수를 추정하는 시뮬레이션을 수행한다. 본 논문에서는 Singer [5]가 제시한 표적모델 (target model)을 사용한다. 또한 유도필터 알고리즘은 MGPMF (Modified Gain Pseudo Measurement Filter)로 참고문헌 [5]에서 자세한 내용을 다루고 있다. 표적과 유도탄의 종말 호밍 상황은 그림 2와 같이 도시 된다. 유도탄의 종말 호밍 시작 위치는 $(0, 3000)\,m$이고, 표적의 위치는 $(7000, 0)\,m$이다. 유도탄의 속도는 $V_M=680\,m/s$, 비행경로각은 $\gamma_M=-5^\circ$ 이고, 표적의 속도는 $V_T=20\,m/s$ 이다. 유도필터의 상태변수는 관성좌표계에서 x, y의 상대위치, 상대속도, 표적 가속도로 다음과 같이 구성된다.

$$X=\begin{bmatrix} r_x & r_y & v_x & v_y & a_{Tx} & a_{Ty} \end{bmatrix}^T \tag{34}$$

유도필터에서 프로세스 잡음의 스펙트럼 밀도 (spectral density)는 $q=2\lambda\sigma^2$로 표현되며, 여기에서 $\lambda=10\,\mathrm{sec}$, $\sigma=0.1\,m/s^2$ 이다. 또한 측정잡음의 표준편차 (standard deviation)는 $\sigma_\psi=0.001\,rad$ 이다. 유도필터에서 초기 상태변수와 추정값은 다음과 같다.

$$X_0=[7000m,-3000m,-657m/s,59m/s,0m/s^2,0m/s^2]^T$$
$$\hat{X}_0=[6400m,-3500m,-300m/s,-200m/s,0m/s^2,0m/s^2]^T$$
$$\hat{P}_0=diag[1000^2,1000^2,300^2,300^2,1^2,1^2]$$

본 추정 시뮬레이션에서는 $t_{go}$-다항식 유도법칙의 가관측성을 비교하기 위해 비교군으로 PNG의 경우도 함께 고려한다. $t_{go}$-다항식 유도법칙의 경우 유도이득은 $m=2, n=3$ 인 경우를 적용하였고, PNG의 경우 항법상수 (navigation constant)를 3으로 설정하였다. 각각의 유도법칙을 적용했을 때 유도필터의 추정 시뮬레이션은 50 번의 Monte Carlo Simulation을 통해 수행되고었고, 추정성능의 비교는 상대위치와 상대속도 오차의 RMS (root mean square)값을 이용하기로 한다.

$$\begin{aligned} R_{error}&=\sqrt{E\left[\left(X-\hat{X}\right)^2\right]+E\left[\left(Y-\hat{Y}\right)^2\right]} \\ V_{error}&=\sqrt{E\left[\left(V_X-\hat{V}_X\right)^2\right]+E\left[\left(V_Y-\hat{V}_Y\right)^2\right]} \end{aligned} \tag{35}$$

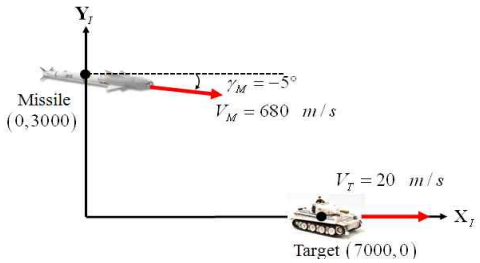


그림 2. 종말 호밍 상황

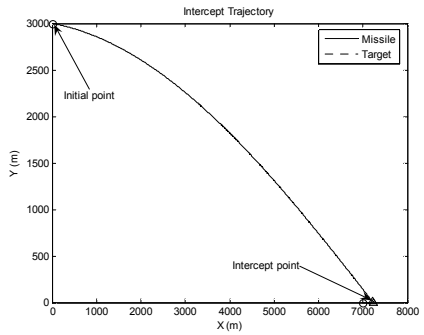


그림 3. 비례항법유도의 호밍 궤적

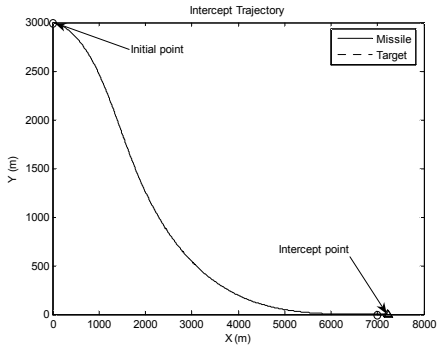


그림 4. $t_{go}$-다항식유도의 호밍 궤적

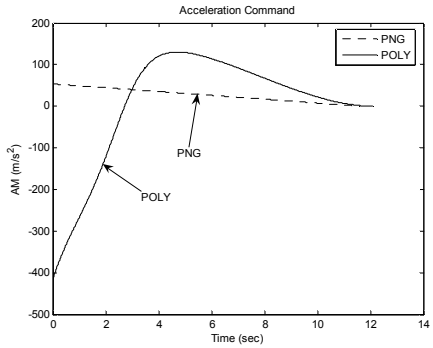


그림 5. 가속도 명령

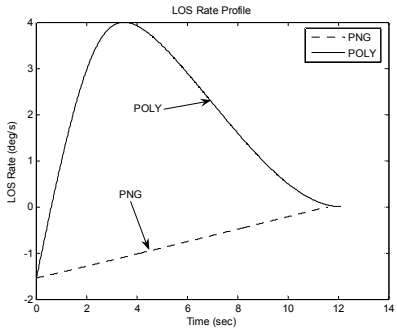


그림 6. 시선각 변화율

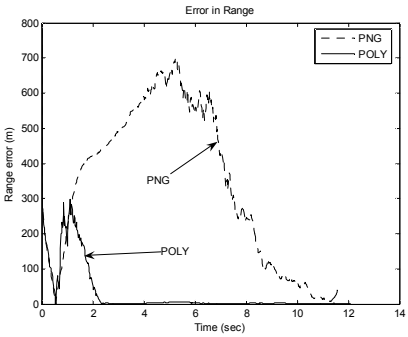


그림 7. 상대거리 추정 오차

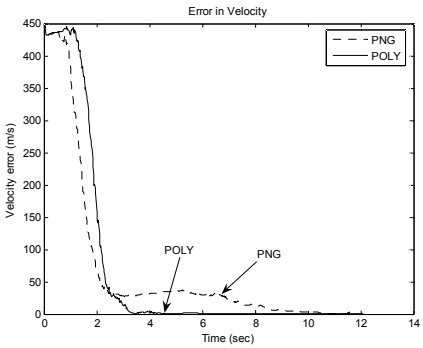


그림 8. 상대속도 추정 오차

표적의 상태변수 추정 시뮬레이션의 결과는 그림 3~8과 같이 주어진다. 그림 3은 PNG의 종말 호밍 궤적을 나타내고, 그림 4는 $t_{go}$-다항식 유도법칙의 종말 호밍 궤적을 나타낸다. 또한 그림 5는 두 유도법칙의 가속도 명령을 도시한다. 두 유도법칙의 궤적과 가속도 명령의 크기를 비교해 보면, $t_{go}$-다항식 유도법칙은 종말 호밍 초기에 기동을 많이 하여 비행궤적을 충돌각 방향으로 수정한 다음에 후반기에는 비교적 기동을 적게 하는 반면에, PNG는 제어에너지를 최소화

하기 위해 천천히 기동하는 경향성을 살펴 볼 수 있다. 이러한 경향성은 유도법칙의 가관측성으로 나타나게 된다. 일반적으로 유도탄이 표적에 접근할 때 시선각 방향의 수직으로 기동을 많이 하면 가관측성이 좋아진다. 그림 6의 시선각속도를 살펴보면, $t_{go}$-다항식 유도법칙의 경우 시선각속도가 PNG보다 더 큼을 확인 할 수 있다. PNG의 경우 작은 시선각속도에서 출발하여, 그 크기가 종말 시간으로 갈수록 선형적으로 감소한다. 이러한 경향은 유도탄이 표적에 접근하면서 더 강해지는데, 최종적으로는 시선각속도가 0으로 수렴한다. 따라서 표적의 상태변수의 추정오차가 0으로 수렴하기 까지 충분한 가관측성을 제공하지 못한다. 이에 반해 $t_{go}$-다항식 유도법칙의 경우 시선각속도가 호밍 단계 전반부에는 비선형적으로 증가하다가 후반부에는 감소하는 형태를 보이며 그 크기도 PNG의 경우보다 더 크다. 따라서 표적을 요격하기 전까지 충분한 가관측성이 확보되어 표적의 상태변수 추정오차가 빠르게 0으로 수렴할 수 있게 된다. 또한 $t_{go}$-다항식 유도법칙의 경우 호밍 단계의 중반부에서 시선각속도가 0이 되는 지점이 순간 발생하지만, 이 지점은 시선각속도의 부호가 바뀌면서 순간적으로 0을 통과하면서 발생되는 것으로, 전체적인 가관측성에 큰 영향을 미치지 않는다.

그림 7과 8은 표적의 상태변수 추정오차의 응답을 나타낸다. PNG의 경우 상대거리와 상대속도의 추정오차가 요격 순간까지 수렴하지 못하지만, $t_{go}$-다항식 유도법칙의 경우 3초 이내로 빠르게 수렴함을 확인 할 수 있다.

위의 시뮬레이션에서도 볼 수 있듯이 종말 호밍 단계에서 시선각의 수직방향으로 유도탄의 기동이 많을수록 가관측성은 좋아지는 것은 잘 알려진 사실이다. 하지만 큰 가속도 명령은 유도탄의 기동 제한치를 초과하거나, 큰 시선각속도를 유발 시킬 수 있는 가능성이 있으며, 종말 단계에서 유도오차가 증가할 수도 있다. $t_{go}$-다항식 유도법칙의 경우 호밍단계 전반기에 기동명령을 많이 사용하여 충돌각 방향으로 비행궤적을 빨리 수정하고, 후반부에는 가속도명령과 가속도 변화율을 0으로 맞추면서 작은 기동을 가지고 표적을 요격하므로, 유도오차가 종말 시간에서 발생할 가능성은 적다. 하지만 유도이득 $n,m$에 따라 초기 가속도가 유도탄의 기동 제한을 넘거나, 큰 시선각속도가 발생되어 탐색기로부터 안정적인 표적 정보를 얻는 것이 어려워 질수 있다. 따라서 유도탄의 기동 제한과 시선각속도 제한을 고려하여 유도이득 $n,m$을 적절하게 스케쥴링 하는 것이 별도로 필요하다.

## III. 결 론

본 연구에서는 $t_{go}$-다항식 유도법칙이 종말 호밍 유도로 적용되고, 표적의 방향 정보만을 측정할 수 있을 때, 등속도로 움직이는 표적의 가관측성 분석을 다루었다. 선형화 된 2차원 종말 호밍에서 $t_{go}$-다항식 유도법칙을 적용 했을 때, 시선각의 일반해를 도출하였고, 이렇게 구해진 시선각을 이용해 유도법칙의 가관측성 조건을 유도하였다. $t_{go}$-다항식 유도법칙의 경우, 가관측성은 유도이득의 선정에 따라 달라지지만, $n>m>0$의 값을 선정하고, 초기 유도오차가 없을 때 (유도탄이 아무런 기동없이 표적을 요격 할 수 있는 경우)의 경우를 제외하면 가관측성이 확보됨을 수식을 통해 분석하였다. 또한 이렇게 분석 된 가관측성 조건은 종말호밍에서 표적의 상태 변수를 추정하는 시뮬레이션을 통해 검증하였고, 비례항법유도의 가관측성과 비교분석 하였다.

## 후 기

본 연구는 국방과학연구소의 연구비 지원으로 수행되었습니다(계약번호 UD099001CD).

## 참고문헌

1) Nardone, S.C., and Aidala, V.J., "Observability Criteria for Bearing-Only Target Motion Analysis", IEEE Ttransactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-17, No. 2, 1981, pp. 162-166.

2) Song, T.L., and Um, T.Y., "Practical Guidance for Homing Missiles with Bearing-Only Measurements", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-32, No. 1, 1996, pp. 1509~1514.

3) Tahk, M.J., Ryu, H., and Song, E.J., "Observability Characteristic of Angle-Only Measurement under Proportional Navigation", Proceedings of SICE Conference, 1995, pp. 1509-1514.

4) Min, B.M., Tahk, M.J., Shim,D.H., and Bang, H.C., "Guidance Law for Vision-Based

Automatic Landing of UAV", KSAS International Journal, Vol. 8, No.1, 2007.

5) R. A. Singer, "Estimating Optimal Tracking Filter Performance for Manned Maneuvering Targets", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 6, No. 4, July, 1960.

6) 조항주, 'PNG의 항법상수와 이와 관련된 최적제어 문제', 한국자동제어학술회의논문집, 1992 10, pp. 578-583.