

비정합 불확실성을 갖는 시스템을 위한 적분 슬라이딩 모드 제어기의 LMI 기반 설계

논문
59-8-15

LMI-based Design of Integral Sliding Mode Controllers for Mismatched Uncertain Systems

최한호*
(Han Ho Choi)

Abstract - This paper presents an LMI-based method to design an integral sliding mode controller for a class of uncertain systems with mismatched unstructured uncertainties. The uncertain system under consideration may have mismatched parameter uncertainties in the state matrix as well as in the input matrix. Using LMIs we derive an existence condition of a sliding surface. And we give a switching feedback control law. Finally, we give a numerical design example in order to show that the proposed method can be better than the existing results.

Key Words : Linear Matrix Inequality(LMI), Uncertain System, Integral Sliding Mode Control

1. 서론

슬라이딩 모드 제어 이론은 불확실성의 높 크기가 알려진 시스템을 위한 강인한 궤환 제어기 설계에 성공적으로 적용되었다[1-6]. 대부분의 슬라이딩 모드 제어기는 슬라이딩 동작이 시작된 후에 원하는 성능을 제공하는데 즉 리칭모드가 슬라이딩모드 이전에 존재하는데 만약 슬라이딩 모드가 시작부터 존재한다면 리칭모드가 존재하는 일반적인 슬라이딩 모드 제어기보다 더 강인한 특성을 보일 것이다. 최근에 [7]에서는 리칭모드가 존재하지 않고 시작시간부터 슬라이딩 모드가 존재하는 적분 슬라이딩 모드 제어기를 설계하는 방법이 제시되었다. 그리고 [8]에서는 비정합 불확실성이 존재하는 시스템으로 확장하였다. 본 논문에서는 [7], [8]의 결과를 보조하고 대체할 수도 있는 적분 슬라이딩 모드 제어기 설계법을 제안한다. [8]에서처럼 비정합 불확실성이 존재하는 시스템을 대상으로 슬라이딩 평면이 존재할 조건을 LMI 형태로 제시하고 스위칭 궤환 제어기를 제시한다. 마지막으로 기존 방법을 보조하고 보다 나아 수 있음을 보이기 위해 설계 예를 제시한다.

2. 문제 설정

본 논문에서는 다음과 같은 동역학 방정식으로 표현 가능한 시스템을 다룬다[9].

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]u(t) \quad (1)$$

여기에서 $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m$ 로 각각 상태, 입력을 가리키며 다음을 만족시킨다고 가정한다.

* 정회원 : 동국대학교 전기공학과 교수

E-mail : hhchoi@dongguk.edu

접수일자 : 2010년 3월 4일

최종완료 : 2010년 7월 7일

- A1: (A, B) 로 안정가능하다.
- A2: $\text{rank}(B) = m < n$
- A3: $\|\Delta A(t)\| \leq \rho_A, \|\Delta B(t)\| \leq \rho_B$ 을 만족시키는 상수 ρ_A, ρ_B , 가 알려져 있다.

다음의 보조정리는 제안된 방법을 유도하고 이와 비교를 위해 논술하는 것이다.

보조정리 1: 임의의 적절한 차원을 갖는 행렬 X, Y 와 양수 δ 에 대하여 다음이 항상 성립한다.

$$2X^T Y \leq \delta X^T X + \frac{1}{\delta} Y^T Y$$

보조정리 2:[8] 아래와 같은 불확실한 시스템을 고려해 보자.

$$\dot{x} = (A + B E [I - D E]^{-1} C) x$$

여기에서 $x \in R^n$ 는 상태이며 E 는 $\|E\| \leq \eta$ 를 만족시키는 불확실성이다. 위의 시스템은 다음의 LMI를 만족시키는 X 가 존재하면 안정하다. 아래에서 *는 행렬의 대칭성에 의해 유추될 수 있는 블록행렬을 의미한다.

$$\begin{pmatrix} AX + * & * & B \\ \eta CX & -I & \eta D \\ * & * & -I \end{pmatrix} < 0, \quad X > 0$$

3. 주요 결과

다음 LMI를 고려하자.

$$\begin{pmatrix} AX - BY + * & * & * & * & * & 0 \\ \rho_B Y & -I & * & * & 0 & 0 \\ -\Phi \Phi^T & -\rho_B B_g^T & -I & 0 & 0 & 0 \\ \gamma \rho_A \Phi \Phi^T & \gamma \rho_A \rho_B B_g^T & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X \end{pmatrix} < 0 \quad (2)$$

여기에서 $X \in R^{m \times n}, Y \in R^{m \times n}, \gamma \in R$ 는 결정변수이며 *는 행렬의 대칭성에 의해 구해질 수 있는 블록행렬을 의미하고 $B_g = (B^T B)^{-1} B^T$ 이며 Φ 는 $B^T \Phi = 0, \Phi^T \Phi = I$ 를 만족시키는 임

의의 $n \times (n-m)$ 행렬이다. 그러면 다음의 정리를 얻을 수 있다.

정리 1 : 시스템 (1)을 고려하자. LMI (2)를 만족시키는 해 X, Y, δ, γ 가 존재한다고 가정하고 다음의 스위칭 제어기를 고려하자.

$$u = -\rho(t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (3)$$

여기에서 슬라이딩 평면은 다음처럼 정의된다.

$$\sigma = B_y x + z \quad (4)$$

$z \in R^m$ 은 다음의 동역학을 만족하며

$$\dot{z} = -B_y A x + K \dot{x}, \quad z(0) = -B_y x(0) \quad (5)$$

$\rho(t)$ 는 다음처럼 정의된다.

$$\rho(t) = \frac{1}{1-\psi} [(\rho_A \|B_y\| + \|K\|)\|x\| + \epsilon] \quad (6)$$

그리고 $\epsilon > 0, K = YX^{-1}, \psi = \rho_B \|B_y\|$ 을 만족시킨다. 그러면 슬라이딩 모드 동역학은 안정하며 슬라이딩 모드는 처음부터 즉 $t=0$ 에서부터 시작된다.

증명 : 슬라이딩 모드 동역학의 안정성을 보이기 위해 먼저 $\psi < 1$ 을 보이고 [1-2]에서의 방법을 사용하여 등가입력을 구하고 이를 이용하여 슬라이딩 모드 동역학을 구하고 리아푸노프 정리를 이용하여 안정함을 보이겠다. [9]의 Schur complement 보조정리를 사용하면 (2)의 LMI는 다음을 의미함을 알 수 있다.

$$I - \rho_B^2 B_y B_y^T > 0, \quad X > 0 \quad (7)$$

(7)식은 $1 > \rho_B \|B_y\| = \psi$ 를 뜻한다. 결국 $I + B_y \Delta B(t)$ 는 항상 역행렬이 존재한다. (1), (4), (5)를 이용하여 다음 동역학을 구할 수 있다.

$$\dot{\sigma} = [B_y \Delta A(t) + K]x + [I + B_y \Delta B(t)]u \quad (8)$$

결국 [1-2]를 참조하여 $\dot{\sigma} = \sigma = 0$ 으로 하여 (8)식으로부터 다음의 등가입력을 구할 수 있다.

$$u_{eq}(t) = -[I + B_y \Delta B(t)]^{-1} [B_y \Delta A(t) + K]x(t) \quad (9)$$

결국 (9)를 이용하여 다음과 같은 슬라이딩 모드 동역학식을 구할 수 있다.

$$\dot{x} = A_1(t)x + A_2(t)x \quad (10)$$

여기에서 $A_1(t), A_2(t)$ 는 다음처럼 주어진다.

$$\begin{aligned} A_1(t) &= A + \Phi \Phi^T \Delta A(t) - BK, \\ A_2(t) &= -\Phi \Phi^T \Delta B(t) [I + B_y \Delta B(t)]^{-1} [B_y \Delta A(t) + K] \end{aligned} \quad (11)$$

(10)의 동역학식은 보조정리 2에 의해 다음을 만족시키는 리아푸노프 행렬 $P > 0$ 가 존재하면 안정하다.

$$\begin{pmatrix} (A + \Phi \Phi^T \Delta A)P - BKP + * & * & -\Phi \Phi^T \\ \rho_B B_y \Delta AP + \rho_B KP & -I & -\rho_B B_y \\ * & * & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (12)$$

[9]의 Schur complement 보조정리, 보조정리 1과 가정 A3를 이용하여 다음이 성립하면 (12)가 만족됨을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} AP - BKP + * & * & * & * & * \\ \rho_B KP & -I & * & * & 0 \\ -\Phi \Phi^T & -\rho_B B_y^T & -I & 0 & 0 \\ \gamma \rho_A \Phi \Phi^T & \gamma \rho_A \rho_B B_y^T & 0 & -\gamma I & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

위식은 (2)가 성립하면 $P = X$ 에 의해 만족됨을 의미한다. 즉 (10)이 안정함을 의미한다.

$t=0$ 에서부터 슬라이딩모드가 존재함을 보이기 위해 $\sigma(0)=0$ 이며 $\sigma^T \dot{\sigma} < 0$ 이 아닌 σ 에 대하여 성립함을 보이기만 하면 된다. (4)와 (5)는 $\sigma(0)=0$ 을 의미하므로 $\sigma^T \dot{\sigma} < 0$ 만 보이면 된다. (8)식에 스위칭 입력 (3)을 대입하고 가정 3과 $1 > \rho_B \|B_y\| = \psi$ 을 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma^T \dot{\sigma} &\leq -(1-\psi)\rho\|\sigma\| + \|\sigma\|[(\rho_A \|B_y\| + \|K\|)\|x\|] \\ &\leq -\epsilon\|\sigma\| \end{aligned}$$

결국 동역학은 안정하며 슬라이딩 모드는 $t=0$ 에서부터 시작됨을 알 수 있다. ▽▽▽

주 1 : [9]의 결과를 이용하면 (A, B) 쌍이 안정가능하지 않으면 LMI (2)의 해가 존재하지 않음을 알 수 있다. 그리고 위의 증명과정을 통해 $\rho_B \|B_y\| < 1$ 가 성립하지 않아도 LMI (2)의 해가 존재하지 않음을 알 수 있다.

주 2 : [8]의 방법은 $n(n+1)/2+5$ 개의 LMI 최적화 변수를 요구하고 본 논문에서 제안된 방법은 $n(n+1)/2+mn+1$ 개의 최적화 변수를 요구해 계산량에 있어서는 [8]의 방법이 우월하다. 보수성에서는 아래 예제에서 보인 것과 같이 [8]의 방법이 열등하다. [8]에 주어진 과정과 비슷하게 다음의 과정을 통해 주어진 LMI (2)의 해가 존재할 (ρ_A, ρ_B) 를 쉽게 구할 수 있다.

Step 1: $\rho_A = 0$ 으로 한다.

Step 2 : ρ_B 를 0부터 차차 증가시켜 가는 방식의 선 탐색법을 사용하여 (2)의 해가 존재할 최대 ρ_B 를 찾는다.

Step 3 : ρ_A 를 조금 증가시킨다.

Step 4 : 증가된 ρ_A 에 대하여 (2)의 해가 존재할 최대 ρ_B 를 선 탐색법을 사용하여 찾는다.

Step 5 : 만약 최대 ρ_B 가 0에 가까우면 멈춘다. 그렇지 않으면 Step 3으로 간다.

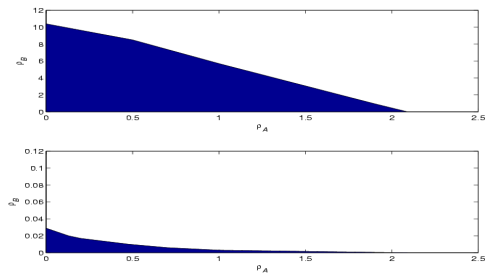


Fig. 1. Feasible regions (Top) our method. (Bottom) Choi[8].
그림 1. 해가 존재하는 (ρ_A, ρ_B) 영역 (위) 제안된 방법. (아래) [8]의 방법.

4. 수치적 예

[10]에 주어진 F4E 팬텀 전투기의 5000피트에서의 동역학 모델을 고려해보자. 다음의 데이터로 표현될 수 있다.

$$A = \begin{bmatrix} -0.990 & 17.410 & 96.150 \\ 0.265 & -0.851 & -11.390 \\ 0 & 0 & -30.000 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -97.780 \\ 0 \\ 30.000 \end{bmatrix} \quad (14)$$

주2에 주어진 알고리즘을 이용해 LMI (2)의 해가 존재할 (ρ_A, ρ_B) 를 그린 것이 그림 1의 위쪽에 있다. 비교를 위해 [8]에 주어진 존재 조건의 해가 존재할 (ρ_A, ρ_B) 도 구했는데 그림 1의 아래쪽은 [8]의 조건의 해가 존재할 영역이다. 아

래쪽 그림과 위쪽 그림에서 수직 축의 축척이 100배 차이가 있음에 유의해야 한다. 그림 1을 통해 본 논문에서 제안된 방법이 [8]보다는 훨씬 좋은 결과를 줄 수 있음을 알 수 있다. $\Delta A(t), \Delta B(t), f(t)$ 가 다음처럼 주어진다 가정하자.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} p_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기에서 p_i 는 불확실한 매개변수로 $|p_1| \leq 0.6, |p_2| \leq 0.8, |p_3| \leq 5$ 을 만족한다. 그러면 $\rho_A = 1, \rho_B = 5$ 로 할 수 있다. (14)의 자료와 $\rho_A = 1, \rho_B = 5$ 에 대하여 LMI (2)를 풀어 다음과 같은 제어를 얻을 수 있다.

$$u = -[16.51\|x\| + 1] \frac{\sigma}{|\sigma|} \quad (16)$$

여기에서 σ, z 는 다음처럼 주어진다.

$$\sigma = [-0.0093, 0, 0.0029]x + z$$

$$\dot{z} = [-3.05, -14.61, -3.35]x, \quad z(0) = [0.0093, 0, -0.0029]x(0)$$

초기값은 $x(0) = [0, 1, 0]^T$ 이고 $p_1 = 0.6\sin 10t, p_2 = 0.8\sin 20t, p_3 = 5\sin 30t$ 이라고 가정하였다. 그림 2는 (16)을 사용하였을 경우 시뮬레이션 결과를 보여주고 있다.

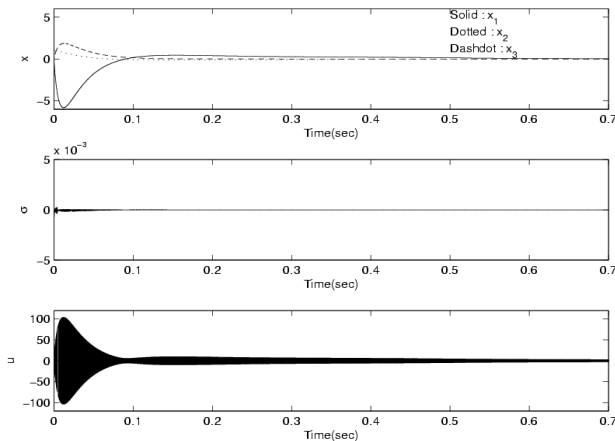


그림 2. 시뮬레이션 결과. (위) x . (가운데) σ . (아래) u .
Fig. 2. Simulation results. (Top) x . (Middle) σ . (Bottom) u .

5. 결 론

본 논문에서는 이전의 결과를 보조하고 대체할 수도 있는 적분 슬라이딩 모드 제어기 설계법을 제안하였다. 비정합 불확실성이 존재하는 시스템을 대상으로 슬라이딩 평면이 존재할 조건을 LMI 형태로 제시하고 스위칭 궤환 제어를 제시하였다. 마지막으로 수치적인 예를 제시하여 보조하고 대체할 수 있음을 보였다.

참 고 문 헌

[1] R.A. DeCarlo, S.H. Zak, and G.P. Mathews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial," IEEE Proceedings, vol. 76, pp. 212-232, 1988

[2] V.I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 22, pp. 212-222, 1977

[3] C. Edwards, "A practical method for the design of sliding mode controllers using linear matrix inequalities," Automatica, vol. 40, pp. 1761-1769, 2004

[4] C. Edwards, A. Akoachere, and S. K. Spurgeon, "Sliding mode output feedback controller design using linear matrix inequalities," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 46, pp. 115-119, 2001.

[5] 최한호, "선형 슬라이딩 평면의 개선된 존재 조건" 제어자동화 시스템 공학회 논문지, 13권, 9호, pp. 851-855, 2007

[6] 최한호, "전차수 슬라이딩 모드 관측기를 대체하는 축소차수 관측기의 LMI 기반 설계," 제어로봇시스템학회 논문지, 14권, 3호, pp. 232-235, 2008

[7] J. Ackermann and V.I. Utkin, "Sliding mode control design based on Ackermann's formula", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 43, no. 2, pp. 234-237, 1998

[8] H.H. Choi, "LMI-based sliding surface design for integral sliding mode control of mismatched uncertain systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 52. no. 4, pp. 736-742, 2007

[9] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory, Philadelphia, SIAM, 1994.

[10] U. Shaked "An LPD approach to robust H_2 and H_∞ static output-feedback design," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 48, no.5, pp.866-872, 2003

저 자 소 개



최 한 호 (崔 漢 浩)

1966년 8월 25일생. 1988년 서울대학교 제어계측 공학과 졸업. 1994년 한국과학기술원 전기및전자공학과 졸업(공학). 2003년~현재 동국대학교 교수
Tel : 02-2260-3777
Fax : 02-2275-6013
E-mail : hhchoi@dongguk.edu