

단면이 원형인 토로이드 권선의 자속밀도 계산

Magnetic Field Calculation of Toroidal Winding with Circular Section

이상진^{1,*}Sangjin Lee^{1,*}

Abstract: A magnetic field calculation method for toroidal type winding which has circular section was developed. At first, the equation for magnetic field by single filament coil was extended using numerical integration to estimate the entire interesting region of solenoid, especially winding region itself. And then, the magnetic field by toroidal arrangement of solenoids was computed with a coordinate transformation of vector fields. The superconducting magnet with toroidal arrangement can be made up of several tens of solenoid type double pancake windings for some applications such as superconducting magnetic energy storage system(SMES). In this system, the field calculation on the high-Tc superconducting(HTS) tape itself is very important because the entire system can be reached to a fault by magnetic stress of conductor or the critical current of superconducting tape can be dramatically reduced under its self field condition. To make matters worse, 3-dimensional analysis is indispensable for this type of magnet and the most of commercial programs with finite element method can be taken too much time for analysis and design. In this paper, a magnetic field calculation method for toroidal type winding with circular section was induced.

Key Words: coordinate transformation of vector fields, magnetic field calculation, solenoid, toroidal winding.

1. 서 론

최근 분산전원에 대한 관심이 고조되면서 소규모 전력계통에서 에너지 저장 및 주파수 조절이 가능한 초전도 자기에너지 저장장치(Superconducting Magnetic Energy Storage System; SMES)에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다[1,2]. SMES는 일반적으로 단면이 직사각형인 솔레노이드형 권선으로 제작되고 있으나, 용량이 커질 경우 사용되는 선재의 양이 기하급수적으로

증가하기 때문에 같은 체적에 보다 많은 에너지를 저장하기 위하여 토로이드형 권선이 선호되고 있는 실정이다. 토로이드형 초전도권선을 구현하기 위한 방법으로는 먼저 초전도선재를 더블 팬케익 형태로 권선한 다음 이를 토로이드 형태로 만들게 된다.

토로이드형 권선의 자장 계산은 유한요소법 등을 이용하는 상용 프로그램을 이용하여 쉽게 해석할 수 있으나, 권선의 최적 설계나 SMES의 실시간 제어 등 독립된 계산 방법이나 또는 매우 빠른 계산 방법이 필요한 경우 등 상용 프로그램을 이용하기가 어려운 경우가 발생한다. 따라서 본 논문에서는 먼저 단일 더블 팬케익 코일을 해석할 수 있도록 솔레노이드형 권선의 자장 계산방법을 제시하고, 이를 토대로 토로이드형 권선에서의 자장 계산 방법을 벡터의 좌표변환을 이용하여 유도하였다.

2. 본 론

2.1. 솔레노이드에서의 자속밀도 계산

토로이드형 권선을 구성하는 초전도 더블 팬케익 코일은 기본적으로 솔레노이드 형태로, 이러한 형태의 권선에 대한 자장 계산 방법은 솔레노이드를 구성하는 단일 원형 필라멘트에 대한 자장을 계산한 다음 이를 적분을 통하여 단면이 직사각형인 솔레노이드로 확장하는 방법이 일반적으로 사용되고 있다. 원형 필라멘트에 대한 자장 계산은 비오사바르의 실험법칙(Biot-Savart Law)이나 암페어의 주회법칙(Ampere's Circuital Law)을 이용하여 직접 계산하는 방법과, 스칼라 포텐셜이나 벡터 포텐셜을 이용하여 간접적으로 구하는 방법 등이 있으나 본 논문에서는 해가 비교적 상세하게 제시되어 있고, 수치적분 등을 통하여 솔레노이드 전 영역에서 해를 구할 수 있는 벡터 포텐셜을 이용하는 방법을 채택하였다. 즉, 벡터 포텐셜 A 를 구한 다음 $B = \nabla \times A$ 의 관계식을 이용하여 자속밀도를 계산하였다. 이를 이용하면 원통좌표계의 임의의 위치 $P(\rho, \phi, z)$ 에서 $z=0$ 에 위치한 단일 필라멘트에 대한 반경방향 성분의 자속밀도 B_ρ 및 축방향 성분의 자속밀도 B_z 는 다음의 식 (1)과 식 (2)로 주어진다[3].

$$B_\rho(\rho, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{z}{\rho \sqrt{(a+\rho)^2 + z^2}} \times \left[-K + \frac{a^2 + \rho^2 + z^2}{(a-\rho)^2 + z^2} E \right] \quad (1)$$

¹정 회 원 : 위덕대학교 에너지전기공학부 교수

*교신저자 : sjlee@uu.ac.kr

원고접수 : 2009년 09월 24일

심사완료 : 2010년 02월 06일

게재확정 : 2010년 02월 06일

$$B_z(\rho, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(a+\rho)^2 + z^2}} \times \left[K + \frac{a^2 - \rho^2 - z^2}{(a-\rho)^2 + z^2} E \right] \quad (2)$$

여기서, μ_0 : 공기에서의 투자율(permeability)
 a : 원형 필라멘트의 반경
 I : 원형 필라멘트에 흐르는 전류
 ρ, z : 원형 필라멘트의 중심으로부터 점 P 까지의 반경 및 축 방향 거리
 K, E : 제1형 및 제2형 타원적분(elliptic integral of the first and second kind)

특히 반지름이 0인 곳에서는 $K=E=\frac{\pi}{2}$ 가 되어 반경 방향의 자속밀도는 $B_\rho(0, z)=0$ 이 된다[4]. 원형 필라멘트에 대한 자속밀도 식 (1)과 식 (2)를 솔레노이드 권선으로 확장하기 위해서는 수치적분을 이용하였으며, 그림 1과 같은 분할형 솔레노이드를 해석하기 위하여 다음의 식 (3) 및 식 (4)와 같이 솔레노이드의 입의 위치 $P(\rho, \phi, z)$ 에서 자속밀도를 계산할 수 있는 rzBI()와 rzBJ()라는 함수를 만들었다. 솔레노이드의 경우 축대칭이기 때문에 자속밀도의 원주방향 성분은 $B_\phi=0$ 이 된다.

$$[B_\rho, B_z] = \text{rzBI}(I, Nt, a_1, a_2, b_1, b_2, \rho, z) \quad (3)$$

$$[B_\rho, B_z] = \text{rzBJ}(J, a_1, a_2, b_1, b_2, \rho, z) \quad (4)$$

여기서, B_ρ, B_z : 자속밀도의 반경 및 축 방향 성분
 I, J : 솔레노이드에 흐르는 전류 및 전류밀도
 Nt : 솔레노이드의 턴수(Number of turns)
 a_1, a_2 : 솔레노이드의 내반경 및 외반경
 b_1, b_2 : 솔레노이드의 축 방향 거리
 단일 솔레노이드인 경우 $b_1=0$

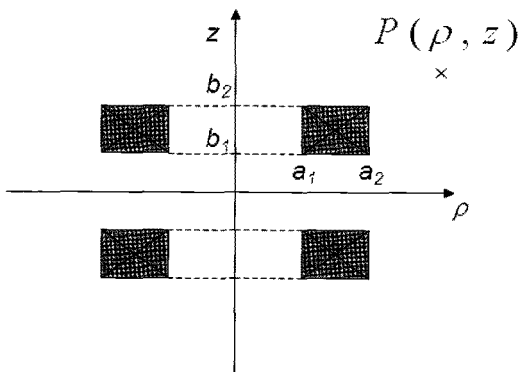


Fig. 1. Generalization of analysis model and input parameters for solenoid.

2.2. 토로이드형 권선의 자속밀도 계산

일반적으로 단면이 원형인 토로이드 권선은 그림 2와 같이 여러 개의 솔레노이드를 이용하여 구성할 수 있다. 따라서 토로이드형 권선에서의 자속밀도는 하나

1/10/2009 11:15:37

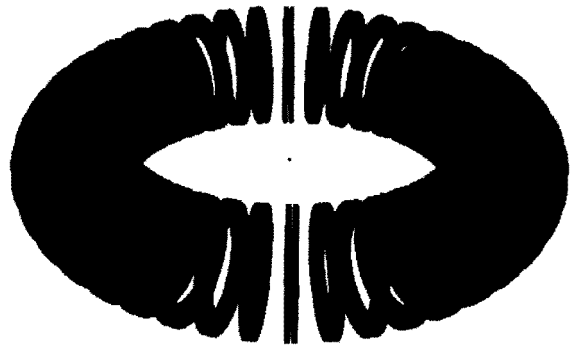


Fig. 2. Toroidal winding composed of several tens of solenoids.

의 솔레노이드에 의한 자속밀도를 계산한 다음 이를 중첩의 원리에 의해 서로 합쳐 주면 된다. 이 경우 토로이드를 해석하기 위해서 3차원적인 접근을 하지 않아도 되지만, 2.1절에서 작성한 함수나 일반적인 2차원 상용 프로그램을 사용하여 솔레노이드를 해석하기 위해서는 자속밀도를 계산하기 위한 토로이드 좌표계에서의 점 $P(\rho, \phi, z)$ 를 각 솔레노이드 시스템에서의 점 $P(\rho', z')$ 으로 변환해야 하며, 역으로 각 솔레노이드 좌표계에서 구한 자속밀도 $B'(B'_\rho, B'_z)$ 은 다시 토로이드 좌표계에서의 자속밀도 $B(B_\rho, B_\phi, B_z)$ 로 변환해서 더해 주어야만 한다.

그림 3은 토로이드 좌표계에서 하나의 솔레노이드 권선이 $O(\rho_0, \phi_0, 0)$ 에 위치하고 있을 때 점 $P(\rho, \phi, z)$ 에서의 자속밀도를 계산하기 위한 해석영역을 보여주고 있다. 여기서 ρ_0 는 토로이드 중심으로부터 솔레노이드 중심까지의 거리이며, ϕ_0 는 x 축으로부터 솔레노이드 중심까지의 각도를 의미한다. 그림 4는 토로이드 좌표계로 주어진 점 $P(\rho, \phi, z)$ 에서 자속밀도를 계산하는 순서를 나타내고 있다.

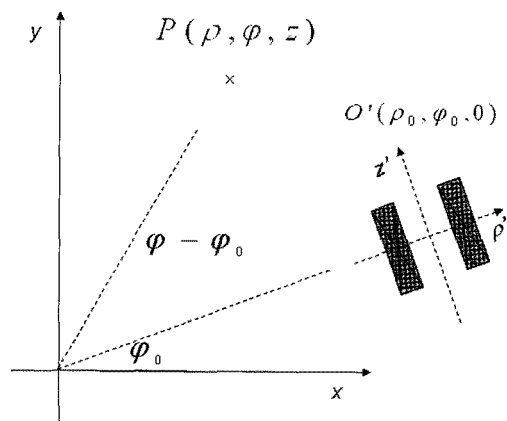


Fig. 3. Toroidal coordinate system vs. solenoid coordinate system.

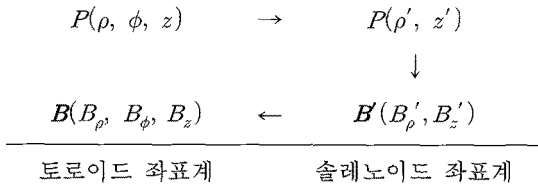


Fig. 4. Flow chart for obtaining the magnetic flux densities at toroidal coordinate system through solenoid coordinate system.

먼저 그림 3에서 토로이드 좌표계에서 주어진 점 $P(\rho, \phi, z)$ 는 솔레노이드 좌표계에서는 다음의 식 (5)와 식 (6)과 같이 변환할 수 있다. 여기서 솔레노이드 좌표계에서의 원주각 ϕ' 은 축대칭이기 때문에 어떠한 값을 대입해도 자속밀도 값은 변화하지 않기 때문에 구할 필요가 없다.

$$\rho' = \sqrt{(\rho_0 - \rho \cos(\phi - \phi_0))^2 + z^2} \quad (5)$$

$$z' = \rho \sin(\phi - \phi_0) \quad (6)$$

이렇게 구한 솔레노이드 좌표계에서의 점 $P(\rho', z')$ 를 앞에서 제작한 rzBI() 또는 rzBJ() 함수에 대입하면 솔레노이드 좌표계에서의 자속밀도 $B'(B'_\rho, B'_z)$ 을 얻을 수 있다. 한편 벡터를 한 좌표계에서 다른 좌표계로 변환할 경우 벡터의 투영(projection)을 사용하면 새로운 좌표계에서의 성분을 쉽게 구할 수 있다[5]. 즉, 일반적으로 벡터 X 의 Y 방향 성분 X_Y 는 벡터 X 와 Y 방향으로의 단위벡터 a_Y 의 내적(inner product)으로 표시된다. 따라서 토로이드 좌표계에서의 자속밀도 B 의 각 성분 B_ρ, B_ϕ, B_z 는 다음의 식 (7), (8), (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$B_\rho = B' \cdot a_\rho = (B'_\rho a'_\rho + B'_z a'_z) \cdot a_\rho \quad (7)$$

$$B_\phi = B' \cdot a_\phi = (B'_\rho a'_\rho + B'_z a'_z) \cdot a_\phi \quad (8)$$

$$B_z = B' \cdot a_z = (B'_\rho a'_\rho + B'_z a'_z) \cdot a_z \quad (9)$$

- 여기서, B_ρ, B_ϕ, B_z : 토로이드 좌표계에서의 자속밀도 성분
- B'_ρ, B'_ϕ, B'_z : 솔레노이드 좌표계에서의 자속밀도 성분
- a_ρ, a_ϕ, a_z : 토로이드 좌표계에서의 기본 단위벡터
- a'_ρ, a'_z : 솔레노이드 좌표계에서의 기본 단위벡터

따라서 토로이드 좌표계에서 자속밀도의 각 성분을 구하기 위해서는 먼저 솔레노이드 좌표계에서의 기본 단위벡터 a'_ρ, a'_z 와 토로이드 좌표계에서의 기본 단위벡터인 a_ρ, a_ϕ, a_z 의 내적을 계산하여야만 한다. 이를 위해 먼저 a'_ρ, a'_z 를 토로이드에서의 직각 좌표계로 표시한 다음 이를 원통 좌표계에서의 기본 단위벡터와의 내적을 계산하였고, 그 결과를 다음의 식 (10)부터 식 (15)에 나타내었다.

$$a'_\rho \cdot a_\rho = -\cos\theta \cos\phi_0 \cos\phi - \cos\theta \sin\phi_0 \sin\phi \quad (10)$$

$$a'_z \cdot a_\rho = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi + \phi_0\right) \quad (11)$$

$$a'_\rho \cdot a_\phi = -\cos\theta \cos\phi_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) - \cos\theta \sin\phi_0 \sin\phi \quad (12)$$

$$a'_z \cdot a_\phi = \cos(\phi - \phi_0) \quad (13)$$

$$a'_\rho \cdot a_z = \sin\theta \quad (14)$$

$$a'_z \cdot a_z = 0 \quad (15)$$

$$\text{여기서, } \theta = \tan^{-1} \frac{z}{\rho_0 - \rho \cos(\phi - \phi_0)}$$

따라서 식 (10)부터 식 (15)를 이용하여 식 (7), (8), (9)를 다시 쓰면 다음의 식 (16), (17), (18)을 얻을 수 있다.

$$B_\rho = -B'_\rho \cos(\cos\phi_0 \cos\phi + \sin\phi_0 \sin\phi) + B'_z \sin(\phi - \phi_0) \quad (16)$$

$$B_\phi = B'_\rho \cos(\cos\phi_0 \sin\phi - \sin\phi_0 \cos\phi) + B'_z \cos(\phi - \phi_0) \quad (17)$$

$$B_z = B'_\rho \sin\theta \quad (18)$$

위의 식 (16), (17) 및 (18)을 이용하고, 또한 앞에서 구한 rzBI()와 rzBJ()를 부함수로 호출하는 토로이드 권선의 임의의 위치 $P(\rho, \phi, z)$ 에서 자속밀도를 계산할 수 있는 toroidI()와 toroidJ()라는 함수를 식 (19) 및 식 (20)과 같이 만들었다. 여기서 N_c 는 토로이드를 구성하는 솔레노이드 권선의 수를 나타낸다.

$$[B_\rho, B_\phi, B_z] = \text{toroidI}(N_c, \rho_0, I, Nt, a_1, a_2, b_1, b_2, \rho, \phi, z) \quad (19)$$

$$[B_\rho, B_\phi, B_z] = \text{toroidJ}(N_c, \rho_0, J, a_1, a_2, b_1, b_2, \rho, \phi, z) \quad (20)$$

3. 검증 및 해석 예

앞에서 구한 toroidI() 함수를 이용하여 그림 5(a)와 같이 5개의 솔레노이드로 이루어진 토로이드 권선의 자장을 해석하였고, 이를 FEM(finite element method)을 사용하는 상용 프로그램의 결과와 비교하였다. 그림 5(b)는 $y=0, z=0$ 인 직선의 $-1 \leq x \leq 1$ 인 구간에서 자속밀도를 비교한 그래프이고, 그림 5(c)는 $\rho_0=500\text{mm}, z=0$ 인 직선에서 각도를 0° 부터 360° 까지 변화시키면서 자속밀도를 비교한 그래프이다. 그림 5(b)는 전 구간에서 비교하였고, 그림 5(c)에서는 상용 프로그램에 의한 결과는 $0^\circ \leq \phi \leq 135^\circ$ 인 구간에서만 나타내었고, toroidI() 함수에 의한 결과는 $0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$ 전체 구간에서 표시하여 비교하였다.

이러한 결과를 이용하여 그림 6에는 그림 2와 같은 형태인 24개의 초전도 팬케익 권선으로 이루어진 토로이드에 대하여 해석한 예를 나타내었다. 이를 보면 그림 5(c)와는 달리 자속밀도의 최대값에 대한 최소값의 비율이 90% 이상으로, 각각의 권선이 서로 쇄교되어 자속을 공유하고 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

권선의 최적 설계나 SMES의 실시간 제어 등 독립된 계산 방법이나 또는 매우 빠른 계산 방법이 필요한 경우를 위해 토로이드형 권선의 자속밀도를 계산할 수 있는 프로그램을 제작하였다. 이를 위해 먼저 단일 더블 팬케익 코일을 해석할 수 있도록 솔레노이드형 권선의 자장 계산방법을 제시하고, 이를 토대로 토로이드형 권선에서의 자장 계산 방법을 벡터의 좌표변환을 이용하여 유도하였다. 프로그램의 검증을 위하여 상용 프로그램의 결과와 비교하였고, 잘 일치하는 것을 확인하였다. 향후 본 논문의 결과를 이용하여 초전도 선재에 가해지는 수직자장을 계산한다면 SMES의 교류 손실, 스트레스, 임계전류 등을 계산하는데 적용할 수 있을 것으로 예상된다.

감사의 글

본 연구는 전력산업연구개발 사업의 연구비 지원에 의해 수행되었습니다.

참 고 문 헌

- [1] 최명규, "전력 솔루션으로의 패러다임 변화", ESE, No.14, 2009년 5월.
- [2] Sangyeop Kwak *et al*, "Design of HTS Magnets for a 2.5 MJ SMES", IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Vol. 19, No. 3, pp. 1985~1988, June 2009.
- [3] 진홍범, "능동 차폐형 초전도 MRI 마그네트의 설계 및 제작에 관한 연구", 성균관대학교 박사학위논문, 1996.
- [4] W.H. Press *et al*, Numerical Recipes, Cambridge University Press.
- [5] William H. Hayt, Jr., John A. Buck, Engineering Electromagnetics, Chap.1, McGraw-Hill.

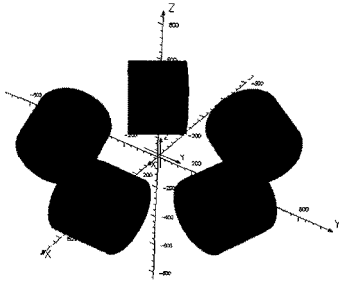
저 자 소 개



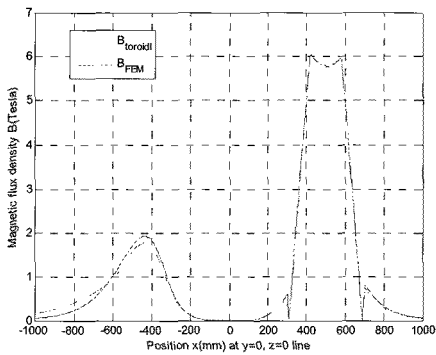
이상진(李相鎭)

1962년 3월 3일생, 1989년 연세대 공대 전기공학과 졸업, 1995년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박사), 1996년~1997년 한국고속철도 차량연구실 선임연구원, 2008년 8월~2009년 7월 MIT Francis Bitter Magnet Laboratory 객원연구원, 1998년~현재 위덕대학교 에너지전기공학부 교수.

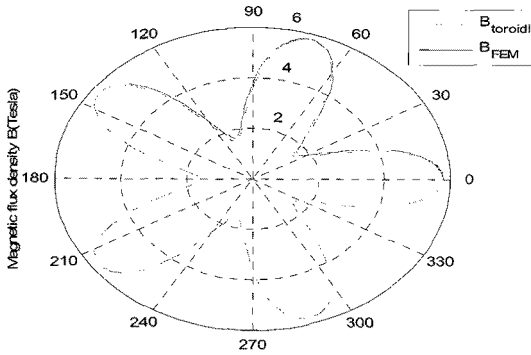
079/2009 16:31:09



(a) analysis model for the verification of toroidI() function



(b) magnetic flux density B w.r.t. x at y=0, z=0 line



(c) magnetic flux density B w.r.t. phi at rho_0=500mm, z=0 line

Fig. 5. Toroidal winding composed of 5 solenoids for testing purpose($N_c=5$, $\rho_0=500\text{mm}$, $I=100\text{A}$, $N_t=18,000$ turn, $a_1=80\text{mm}$, $a_2=200\text{mm}$, $b_1=0$, $b_2=150\text{mm}$).

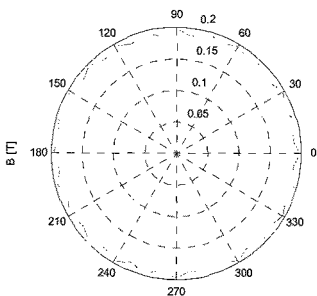


Fig. 6. Results for the toroid composed of 24 superconducting pancake winding($N_c=24$, $\rho_0=200\text{mm}$, $I=100\text{A}$, $N_t=80$ turn, $a_1=40\text{mm}$, $a_2=60\text{mm}$, $b_1=1\text{mm}$, $b_2=5\text{mm}$).