

이방성 복합재료 판에서의 램파 방정식

The Lamb Wave Equation in a Composite Plate with Anisotropy

이 상 호*

Sang-Ho Rhee

Abstract

A Lamb wave guided by a plate structure has dispersive characteristics because phase and group velocity change with the variation of frequency and thickness. The Lamb wave has two modes, symmetric and anti-symmetric mode, which propagates symmetrically and non-symmetrically with respect to centerline. In this paper, the derivation of Lamb wave equation with anisotropic material property is investigated. The phase velocity and group velocity dispersion curves are shown using the stiffness matrix of composite materials with the variation of angle.

Keywords : Lamb Wave(램파), Composite Materials(복합재료), Dispersion(분산), Phase Velocity(위상속도), Group Velocity(군속도)

1. 서론

얇은 판재를 전파하며 진행하는 Lamb wave는 비파괴 시험 분야에서 최근 관심을 받고 있으나, 그 특성이 두께와 주파수에 따라 위상속도와 군속도가 변화하는 분산특성(dispersion characteristics)이 있어 비교적 복잡한 양상을 갖고 있다^[1,2]. 이러한 Lamb 파는 입자의 진동이 판에 수직인 방향과 진행방향을 동시에 지니며 판을 따라 전파하는 파로서, guided wave(유도초음파)라 부른다^[3]. 입자의 진동이 판의 중심면에 대해 대칭인 대칭모드와 비대칭인 비대칭모드로 나누어지며, 이러한 모드들 중에서 차수가 가장 낮은 대칭모드와 비대칭 모드를 각각 extensional mode와 flexural mode로

부른다.

최근 유도초음파에 대한 관심이 높아지고 있으며, 다양한 산업 시설물 등에 그 응용 예가 발표되고 있는 추세에 있다. 영국의 Lowe 등은 원통형의 판에 원주방향으로 transmitter를 설치하여 초음파 펄스를 보내는 실험을 하였으며, 전파된 파는 결함이 있을 경우에 파의 일부가 반사되어 오실로스코프 시간축상에 결함의 위치로 표시되며, 이를 통하여 결함의 이상유무 및 제품의 품질을 비파괴 방법으로 판단하는 응용 예를 제시한 바 있다. 이러한 파는 wave guide를 타고 비교적 먼거리를 진행하는 Lamb wave의 특징을 활용한 예로서 현재 활발히 연구되고 있다^[4]. 미국의 Rose 등은 판재 위에 transmitter를 빗(comb)모양으로 설치해서 시간차를 이용하여 펄스를 보내면 최종단계에서는 하나의 탐촉자가 보내는 에너지보다 매우 큰 에너지의 파를 먼거리까지 보내는 방법을 이용해서 판재의 결함 유무 및 제품의 건전성을 비파괴 방법으로 활용

† 2009년 9월 7일 접수~2009년 11월 20일 게재승인

* 국방과학연구소(ADD)

책임저자 : 이상호(muso3234@naver.com)

하는 방법을 발표하였다^[5].

이러한 유도초음파는 복합재료로 제작된 판재 및 압력용기에서도 활용도가 높아지고 있는데, 최근 들어 복합재료로 만들어진 압력용기 및 로켓 모터 케이스에 응용되고 있는데, 설계요건에 따라 제작된 후, 품질보증시험을 통하여 제품의 건전성을 확인하는 시험을 하고 있다. 로켓 모터 케이스 같은 압력용기의 품질보증시험은 주로 수압을 이용하여 작동압력(operating pressure)까지 압력을 가한 후, 정해진 시간(대략 1분) 동안 해당 작동압력에서 정지한 다음, 압력을 내리는 수압보증시험(Hydro-proof test)을 통하여 실시하고 있다. 이러한 모터 케이스는 개발 중에는 여러 센서를 부착하여 실험을 할 수 있지만, 개발이 완료된 다음에는 strain gage같이 재료의 표면을 손상시키는 시험법은 일반적으로 이용되지 않는다^[6-9].

등방성 재료에서 전파되는 Lamb wave 방정식은 이미 널리 알려져 있어 교과서 수준의 문헌을 통하여 알 수 있으나, 이방성 재료의 Lamb wave에 대해서는 널리 알려져 있지 않은 실정이다. 본 논문에서는 이방성 재료에서 전파되는 Lamb wave에 대해서 식의 전개과정에 대해서 보였고, 이를 수치해석을 통해 군속도와 위상속도 분산곡선을 구하였으며, 그 특징들에 대해서 살펴보았다.

2. 이방성 재료에서의 운동방정식과 Lamb wave의 일반해

탄소섬유 강화 복합재료(CFRP : Carbon Fiber Reinforced Plastic)는 탄소섬유 주위에 epoxy가 둘러싼 구조를 하고 있으며, 비강성, 비강도가 우수하고, 충격 흡수 특성이 금속재료보다 우수하다. 섬유방향과 섬유의 수직 방향으로의 물성이 다른 이방성 재료 특성을 나타내므로, 탄성파의 위상속도와 군속도는 방향에 따라 다른 값을 나타낸다. 이러한 이방성 매질에서의 응력-변형률(stress-strain)관계는 Hooke's law로 표현된다^[10-13].

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1)$$

C_{ijkl} 는 탄성계수를 나타내며, 변형률(ε_{ij})은 tensor로서 다음과 같이 정의 된다.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

여기서, ε_{ij} 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{1,1} \\ \varepsilon_{22} &= u_{2,2} \\ \varepsilon_{33} &= u_{3,3} \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} (u_{2,3} + u_{3,2}) \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) \end{aligned} \quad (3)$$

이러한 재료가 3면에 대칭인 orthotropic anisotropic material일 때, 응력과 변형율과의 관계는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4)$$

이를 변형율과의 관계를 이용하여 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} = C_{11}u_{1,1} + C_{12}u_{2,2} + C_{13}u_{3,3} \\ \sigma_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33} = C_{12}u_{1,1} + C_{22}u_{2,2} + C_{23}u_{3,3} \\ \sigma_{33} &= C_{13}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} = C_{13}u_{1,1} + C_{23}u_{2,2} + C_{33}u_{3,3} \\ \sigma_{23} &= C_{44}2\varepsilon_{23} = C_{44}(u_{2,3} + u_{3,2}) \\ \sigma_{13} &= C_{55}2\varepsilon_{13} = C_{55}(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \sigma_{12} &= C_{66}2\varepsilon_{12} = C_{66}(u_{1,2} + u_{2,1}) \end{aligned} \quad (5)$$

그리고, 탄성매질에서 입자의 운동방정식은 등방성 매질이나, 이방성 매질에 관계없이 입자의 변위가 탄성의 선형영역에 있다면, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma_{i,j} = \rho \ddot{u}_i, (i=1,2,3) \quad (6)$$

식 (4)의 응력-변형률 관계식과 식 (6)의 운동방정식

으로부터 이방성을 지닌 판에서 전파하는 Lamb wave의 해를 구하기 위해 과거 진행하는 방향을 x 축으로, 판의 두께 방향을 z 축으로 정하고, x 축 방향으로 plane wave 형태의 Lamb wave가 전파한다면, y축에 관계없이 (6)식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= \rho \ddot{u}_1 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= \rho \ddot{u}_3 \end{aligned} \quad (7)$$

따라서 식 (5)를 식 (7)에 대입하여 입자 변위의 x와 z방향 성분으로 운동방정식을 풀어 쓰면,

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_1 &= C_{11}u_{1,11} + C_{13}u_{3,31} + C_{55}(u_{1,33} + u_{3,13}) \\ \rho \ddot{u}_3 &= C_{33}u_{3,33} + C_{13}u_{1,13} + C_{55}(u_{1,13} + u_{3,11}) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $u_{k,jj} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_j}$ 이다.

평면파(plane wave) 형태의 Lamb wave가 판을 진행할 때 입자의 변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10} \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] \\ u_3 &= u_{30} \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 u_{10} , u_{30} 은 각각 입자 변위에 대한 x와 z방향 성분의 진폭을 나타내며, k_x 와 k_z 는 각각 종파와 횡파의 파수 벡터 x 방향과 z 방향 성분을 나타낸다. 또한, k_x 는 판에서 전파하는 Lamb wave의 wave number와 같은 값이 된다. 이러한 입자의 변위를 식 (8)에 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \rho u_{10} \omega^2 &= C_{11}k_x^2 u_{10} + (C_{13} + C_{55})k_x k_z u_{30} + C_{55}k_z^2 u_{10} \\ \rho u_{30} \omega^2 &= C_{33}k_z^2 u_{30} + (C_{13} + C_{55})k_x k_z u_{10} + C_{55}k_x^2 u_{30} \end{aligned} \quad (10)$$

그리고, 입자 변위의 각 방향 성분의 비를 $R = \frac{u_{30}}{u_{10}}$ 로 정의하고 식 (10)에서 R을 소거하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{C_{33}C_{55}}{\rho^2} k_z^4 + \left\{ \frac{C_{11}C_{33}}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} (2C_{35}C_{13} + (C_{13})^2) - \frac{\omega^2}{\rho k_x^2} (C_{33} + C_{55}) \right\} k_x^2 k_z^2 \\ + \left\{ \frac{C_{11}C_{55}}{\rho^2} - (C_{11} + C_{55}) \frac{\omega^2}{\rho k_x^2} + \frac{\omega^2}{k_x^4} \right\} k_x^4 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

이 식을 k_z 에 대해 간단히 쓰면,

$$k_z^4 + M k_x^2 k_z^2 + N k_x^4 = 0 \quad (12)$$

이 된다. 여기서 M과 N은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M &= \frac{\left\{ \frac{C_{11}C_{33}}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} (2C_{35}C_{13} + (C_{13})^2) - \frac{\omega^2}{\rho k_x^2} (C_{33} + C_{55}) \right\}}{\frac{C_{33}C_{55}}{\rho^2}} \\ N &= \frac{\left\{ \left(\frac{\omega^2}{k_x^2} - \frac{C_{11}}{\rho} \right) \left(\frac{\omega^2}{k_x^2} - \frac{C_{55}}{\rho} \right) \right\}}{\frac{C_{33}C_{55}}{\rho^2}} \end{aligned} \quad (13)$$

식 (12)은 k_z^2 에 대한 2차 방정식이므로, 이를 풀면 다음과 같다.

$$k_z^2 = \left[\frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4N}}{2} \right] k_x^2 \quad (14)$$

위 식은 k_x 와 k_z 의 관계를 나타내며, k_x 를 알면 k_z 를 알 수 있다. 아래 첨자로 쓰여진 부호, ±는 우변의 제곱근 앞에 있는 부호의 순서를 따른다.

이러한 파수의 관계를 입자의 변위를 나타내는 식 (9)에 대입하여 정리하면 일반해(general solution)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u_1 &= \exp[i(k_x x - \omega t)] [A e^{ik_z z} + B e^{-ik_z z} + E e^{ik_z z} + F e^{-ik_z z}] \\ u_3 &= \exp[i(k_x x - \omega t)] [R_+ \{A e^{ik_z z} - B e^{-ik_z z}\} + R_- \{E e^{ik_z z} - F e^{-ik_z z}\}] \end{aligned} \quad (15)$$

가 된다. 여기서 A, B, E, F는 임의의 상수이며, 입자 변위 진폭의 방향 성분 비인 R_{\pm} 는

$$R_{\pm} = \frac{u_{30}}{u_{10}} = \frac{(\rho \omega^2 - C_{11}k_x^2 - C_{55}k_z^2)}{(C_{55} + C_{13})k_x k_z} \quad (16)$$

인 관계가 있으며, R_+ 는 k_z+ 이 적용되었을 때의 값이고, R_- 는 k_z- 가 적용되었을 때의 값이다. 앞에서 유도한 식은 경계가 없는 매질(unbounded medium)에서 전파되는 체적파(bulk wave)에 관한 식이며, 판재료에서

전파되는 유도초음파(guided wave)는 매질의 경계조건을 적용하여 유도하여야 한다.

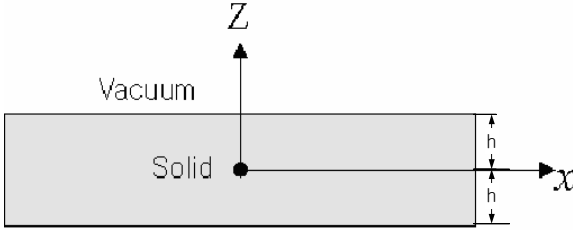


Fig. 1. Coordinate system

Fig. 1에서 보는 바와 같이 판의 두께를 $2h$, 판의 표면 좌표를 $z = \pm h$ 로 하고, 양 표면이 stress free condition에 있다면, 양 표면에서의 경계조건은 $\sigma_{33} = 0$, $\sigma_{31} = 0$ 이 되며, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= C_{33}u_{3,3} + C_{13}u_{1,1} = 0 \\ \sigma_{31} &= C_{55}u_{1,3} + C_{55}u_{3,1} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

위 식에 대입되는 변형율은 식 (15)로부터 미분하여 다음과 같이 표현되며,

$$\begin{aligned} u_{3,3} &= \frac{\partial u_3}{\partial z} = e^{j(k_x x - \omega t)} \left\{ R_+ [A i k_x e^{j(k_z z)} - B(-i k_x) e^{-j(k_z z)}] + R_- [E i k_x e^{j(k_z z)} - F(-i k_x) e^{-j(k_z z)}] \right\} \\ u_{1,1} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = i k_x e^{j(k_x x - \omega t)} \left\{ A e^{j(k_z z)} + B e^{-j(k_z z)} + E e^{j(k_z z)} + F e^{-j(k_z z)} \right\} \\ u_{1,3} &= \frac{\partial u_1}{\partial z} = e^{j(k_x x - \omega t)} \left\{ i k_x A e^{j(k_z z)} - i k_x B e^{-j(k_z z)} + i k_x E e^{j(k_z z)} - i k_x F e^{-j(k_z z)} \right\} \\ u_{3,1} &= \frac{\partial u_3}{\partial x} = i k_x e^{j(k_x x - \omega t)} \left\{ R_+ (A e^{j(k_z z)} - B e^{-j(k_z z)}) + R_- (E e^{j(k_z z)} - F e^{-j(k_z z)}) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

식 (18)을 (17)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\sigma_{33} = \left[\begin{aligned} &C_{33} e^{j(k_x x - \omega t)} \left\{ R_+ [A i k_x e^{j(k_z z)} - B(-i k_x) e^{-j(k_z z)}] + R_- [E i k_x e^{j(k_z z)} - F(-i k_x) e^{-j(k_z z)}] \right\} \\ &+ C_{13} i k_x e^{j(k_x x - \omega t)} \left\{ A e^{j(k_z z)} + B e^{-j(k_z z)} + E e^{j(k_z z)} + F e^{-j(k_z z)} \right\} \end{aligned} \right] = 0 \quad (19)$$

$$\sigma_{31} = \left[\begin{aligned} &C_{55} e^{j(k_x x - \omega t)} \left\{ i k_x A e^{j(k_z z)} - i k_x B e^{-j(k_z z)} + i k_x E e^{j(k_z z)} - i k_x F e^{-j(k_z z)} \right\} + \\ &C_{55} i k_x e^{j(k_x x - \omega t)} \left\{ R_+ (A e^{j(k_z z)} - B e^{-j(k_z z)}) + R_- (E e^{j(k_z z)} - F e^{-j(k_z z)}) \right\} \end{aligned} \right] = 0 \quad (20)$$

식 (19)에서 i 와 $e^{j(k_x x - \omega t)}$ 를 소거하고, 정리하면 식 (21)식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \left[\begin{aligned} &A(C_{33}R_+k_x)e^{ik_z z} + B(C_{33}R_+k_x)e^{-ik_z z} + E(C_{33}R_-k_x)e^{ik_z z} + F(C_{33}R_-k_x)e^{-ik_z z} \\ &+ A(C_{13}k_x)e^{ik_z z} + B(C_{13}k_x)e^{-ik_z z} + E(C_{13}k_x)e^{ik_z z} + F(C_{13}k_x)e^{-ik_z z} \end{aligned} \right] \\ &= \left[\begin{aligned} &A(C_{33}R_+k_x + C_{13}k_x)e^{ik_z z} + B(C_{33}R_+k_x + C_{13}k_x)e^{-ik_z z} \\ &+ E(C_{33}R_-k_x + C_{13}k_x)e^{ik_z z} + F(C_{33}R_-k_x + C_{13}k_x)e^{-ik_z z} \end{aligned} \right] = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$P_{\pm} = C_{33}R_{\pm}k_{\pm} + C_{13}k_x$ 로 놓고 경계조건을 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(z = +h) &= AP_+ e^{ik_z h} + BP_+ e^{-ik_z h} + EP_- e^{ik_z h} + FP_- e^{-ik_z h} = 0 \\ \sigma_{33}(z = -h) &= AP_+ e^{-ik_z h} + BP_+ e^{ik_z h} + EP_- e^{-ik_z h} + FP_- e^{ik_z h} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

식 (20)에서 i 와 $e^{j(k_x x - \omega t)}$ 를 소거하고, C_{55} 을 소거하여 정리하면 (23)식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{31} &= \left[\begin{aligned} &Ak_{z+} e^{ik_{z+} z} - Bk_{z+} e^{-ik_{z+} z} + Ek_{z-} e^{ik_{z-} z} + Fk_{z-} e^{-ik_{z-} z} \\ &+ AR_+ k_x e^{ik_{z+} z} - BR_+ k_x e^{-ik_{z+} z} + ER_- k_x e^{ik_{z-} z} - FR_- k_x e^{-ik_{z-} z} \end{aligned} \right] \\ &= \left[\begin{aligned} &A(R_+ k_x + k_{z+}) e^{ik_{z+} z} - B(R_+ k_x + k_{z+}) e^{-ik_{z+} z} \\ &+ E(R_- k_x + k_{z-}) e^{ik_{z-} z} - F(R_- k_x + k_{z-}) e^{-ik_{z-} z} \end{aligned} \right] = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$Q_{\pm} = R_{\pm} k_x + k_{z\pm}$ 로 놓고, 앞식에서 보여주는 바와 같이 경계조건을 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{31}(z = +h) &= AQ_+ e^{ik_z h} - BQ_+ e^{-ik_z h} + EQ_- e^{ik_z h} - FQ_- e^{-ik_z h} = 0 \\ \sigma_{31}(z = -h) &= AQ_+ e^{-ik_z h} - BQ_+ e^{ik_z h} + EQ_- e^{-ik_z h} - FQ_- e^{ik_z h} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

식 (22)와 (24)를 같이 행렬 형태로 정리하면 다음과 같은 연립방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} P_+ e^{ik_{z+} h} & P_+ e^{-ik_{z+} h} & P_- e^{ik_{z-} h} & P_- e^{-ik_{z-} h} \\ P_+ e^{-ik_{z+} h} & P_+ e^{ik_{z+} h} & P_- e^{-ik_{z-} h} & P_- e^{ik_{z-} h} \\ Q_+ e^{ik_{z+} h} & -Q_+ e^{-ik_{z+} h} & Q_- e^{ik_{z-} h} & -Q_- e^{-ik_{z-} h} \\ Q_+ e^{-ik_{z+} h} & -Q_+ e^{ik_{z+} h} & Q_- e^{-ik_{z-} h} & -Q_- e^{ik_{z-} h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ E \\ F \end{bmatrix} = 0 \quad (25)$$

여기서, 식 (15)에서 $A = B$ 이고, $E = F$ 이면 입자 변위의 z 방향 성분은 $\pm z$ 에서 $u_3(z) = -u_3(-z)$ 가 되어, Lamb wave의 대칭 모드가 되며, 식 (15)는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} u_3(+z) &= R_+ A(e^{ik_{z+}z} - e^{-ik_{z+}z}) + R_- E(e^{ik_{z-}z} - e^{-ik_{z-}z}) \\ -u_3(-z) &= R_+ A(-e^{ik_{z+}z} + e^{-ik_{z+}z}) + R_- E(-e^{ik_{z-}z} + e^{-ik_{z-}z}) \end{aligned} \quad (26)$$

또한, 식 (15)에서 $A = -B$ 와 $E = -F$ 의 조건과, $u_3(+z) = u_3(-z)$ 임을 고려하면 식 (15)는 비대칭 모드가 되어 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u_3(+z) &= R_+ A(e^{ik_{z+}z} + e^{-ik_{z+}z}) + R_- E(e^{ik_{z-}z} + e^{-ik_{z-}z}) \\ u_3(-z) &= R_+ A(e^{ik_{z+}z} + e^{-ik_{z+}z}) + R_- E(e^{ik_{z-}z} + e^{-ik_{z-}z}) \end{aligned} \quad (27)$$

식 (25)에서 $A = B$ 및 $E = F$ 로 놓고 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [AP_+ e^{ik_{z+}h} + BP_+ e^{-ik_{z+}h} + EP_+ e^{ik_{z-}h} + FP_+ e^{-ik_{z-}h}] &= 0 \\ [AP_- e^{-ik_{z+}h} + BP_- e^{ik_{z+}h} + EP_- e^{-ik_{z-}h} + FP_- e^{ik_{z-}h}] &= 0 \\ [AQ_+ e^{ik_{z+}h} - BQ_+ e^{-ik_{z+}h} + EQ_- e^{ik_{z-}h} - FQ_- e^{-ik_{z-}h}] &= 0 \\ [AQ_- e^{-ik_{z+}h} - BQ_- e^{ik_{z+}h} + EQ_- e^{-ik_{z-}h} - FQ_- e^{ik_{z-}h}] &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

(28)식의 첫 번째와 두 번째 식을 더하면 다음과 같다.

$$2A(P_+ e^{ik_{z+}h} + P_+ e^{-ik_{z+}h}) + 2E(P_- e^{ik_{z-}h} + P_- e^{-ik_{z-}h}) = 0 \quad (29)$$

(28)식의 세 번째에서 네 번째 식을 빼면 다음과 같다.

$$2A(Q_+ e^{ik_{z+}h} - Q_+ e^{-ik_{z+}h}) + 2E(Q_- e^{+ik_{z-}h} - Q_- e^{-ik_{z-}h}) = 0 \quad (30)$$

(29)와 (30)을 같이 정리하면 다음과 같은 행렬형태로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} P_+(e^{ik_{z+}h} + e^{-ik_{z+}h}) & P_-(e^{ik_{z-}h} + e^{-ik_{z-}h}) \\ Q_+(e^{ik_{z+}h} - e^{-ik_{z+}h}) & Q_-(e^{ik_{z-}h} - e^{-ik_{z-}h}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} = 0 \quad (31)$$

이 식이 해를 찾기 위해서는 determinant 값이 0이 되어야 하므로, 이를 계산하여 정리하면 다음과 같이 대칭모드 분산방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} (C_{33}R_+k_{z+} + C_{13}k_x)(R_+k_x + k_{z+})\sin(k_{z+}h)\cos(k_{z-}h) \\ - (C_{33}R_+k_{z+} + C_{13}k_x)(R_-k_x + k_{z-})\sin(k_{z-}h)\cos(k_{z+}h) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

또한 식 (15)에서 $A = -B$ 이고, $E = -F$ 이면 입자 변

위의 z 방향 성분은 $\pm z$ 에서 $u_3(z) = u_3(-z)$ 가 되어, Lamb wave의 비대칭 모드가 된다. 식 (25)에서 $A = -B$ 이고, $E = -F$ 로 놓고 식 (26)부터 식 (30)까지 과정과 같이 계산하면, 식 (25)는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{bmatrix} P_+(e^{ik_{z+}h} - e^{-ik_{z+}h}) & P_-(e^{ik_{z-}h} - e^{-ik_{z-}h}) \\ Q_+(e^{ik_{z+}h} + e^{-ik_{z+}h}) & Q_-(e^{ik_{z-}h} + e^{-ik_{z-}h}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} = 0 \quad (33)$$

이 식도 앞에서와 같이 해를 찾기 위해서는 determinant 값이 0이 되어야 하므로, 이를 계산하여 정리하면 다음과 같이 비대칭모드 분산방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} (C_{33}R_+k_{z+} + C_{13}k_x)(R_-k_x + k_{z-})\sin(k_{z+}h)\cos(k_{z-}h) \\ - (C_{33}R_-k_{z-} + C_{13}k_x)(R_+k_x + k_{z+})\sin(k_{z-}h)\cos(k_{z+}h) = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

판재를 따라 진행하는 대칭모드와 비대칭 모드의 형태는 Fig. 2에 보였다.

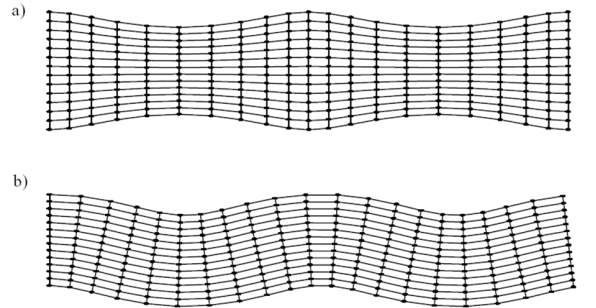


Fig. 2. Symmetric (a) and anti-symmetric mode (b) of Lamb wave

3. 군속도 및 위상속도 분산곡선

앞장에서 유도한 대칭 및 비대칭 모드 방정식은 파수(wave number)와 주파수(frequency)와의 관계로 표현된 식이며, 이 식에 Table 1 복합재료(CU-125NS)의 탄성계수를 대입하고 수치해석방법(Bi-section method)을 이용해서 풀면, Fig. 3과 같은 복합재료 판에 대한 주파수와 파수와의 관계를 나타내는 곡선을 얻을 수 있다. 이러한 선도를 0도 방향에서 군속도의 정의 $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ 를 이용하여 정리하면, Fig. 4와 같이 군속도와 fd (frequency×thickness) (MHz-mm)값을 보여주는 분산

Table 1. CU-125NS Material property

Property	Symbol	Value
Elastic modulus in fiber direction	E1	135.4GPa
Elastic modulus in transverse directions	E2, E3	9.6GPa
Shear modulus in 1-2	G12	4.8GPa
Poisson's ratio	ν_{12}, ν_{13}	0.31

선도를 나타낼 수 있다. 이러한 곡선에서 1st cut-off frequency이하의 영역에서는 단지 S0대칭모드와 A0 비대칭모드만이 존재하며, S0 대칭모드의 속도는 탄성계수의 크기에 따라 다르기는 하지만 A0 비대칭모드의 속도에 비하여 3배에서 5배 정도의 매우 큰 값을 갖는다. 그리고 이 영역에서의 S0 대칭모드는 분산이 적어 속도 변화가 거의 없기 때문에 비파괴검사에 주로 사용되고 있는 모드이기도 하다. 이후에는 A1 및 S1 등이 순서대로 존재하면서 주파수에 따라 속도가 다른 분산 특성을 갖는다.

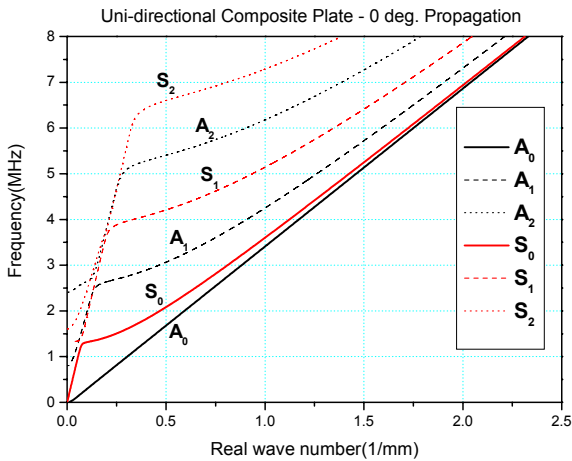


Fig. 3. Frequency and wave number graph for unidirectional composite plate - 0deg. wave propagation

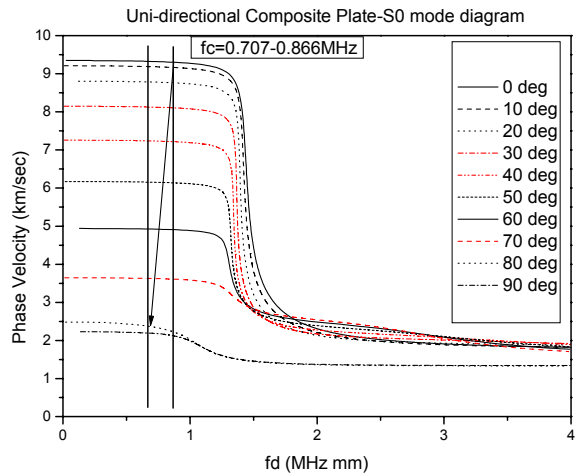


Fig. 5. Phase velocity dispersion curves of S0 symmetric mode in an unidirectional CFRP plates

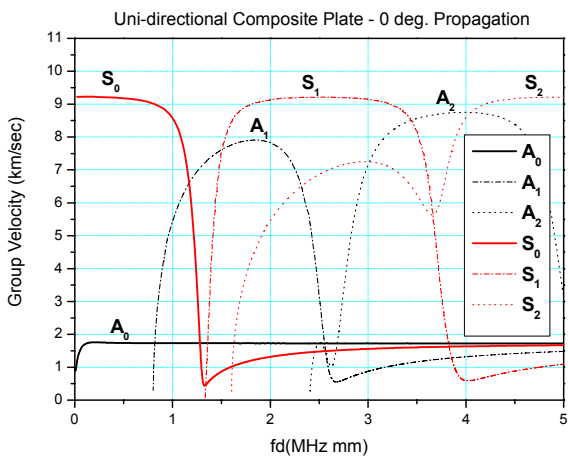


Fig. 4. Group velocity dispersion curves of Lamb wave propagation for unidirectional composite plate - 0deg. wave propagation

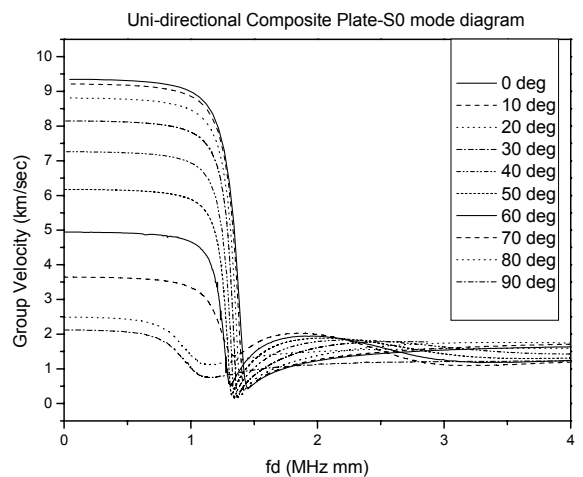


Fig. 6. Group velocity dispersion curves of S0 symmetric mode in an unidirectional CFRP plates

Fig. 5에서는 0도부터 90도까지 각도를 변화시키면서 계산한 S0모드 위상속도와 fd의 분산곡선을 보였다. 섬유방향으로 전파하는 Lamb wave의 1st cut-off frequency에 대응되는 fd는 0.866 MHz-mm이고, 약 1MHz-mm까지 S0대칭모드의 군속도는 fd값이 증가함에 따라 약간 감소하는 현상을 보여주고 있으며, 1MHz-mm이상의 범위에서는 S0대칭모드의 군속도가 크게 감소하면서 진행하지만, 주파수에 따라 속도변화는 거의 없이 전파하는 현상을 보여준다. Fig. 6에서는 Fig. 5와 같이 각도를 변화시켜가며 S0모드 군속도와 fd의 분산곡선을 보였다.

4. 결론

관계를 따라 전파하는 유도초음파의 일종인 Lamb wave는 대칭모드와 비대칭모드로 전파하는데, 재료의 주파수와 두께에 따라 위상속도 및 군속도의 값이 복잡하게 변화하는 분산특성을 갖는다. Fiber와 matrix로 구성된 섬유강화 복합재료는 재료의 물성값이 방향에 따라 다른 이방성(anisotropy) 특성을 나타낸다. 이러한 이방성 재료에서는 방향에 따라 물성값이 다르므로, 전파하는 초음파 속도 값도 변화하는 특성을 갖는다. 본 논문에서는 이방성 재료에서의 Lamb wave방정식을 선형탄성 관계를 이용하여 유도하였으며, 복합재료의 물성값을 이용하여 일방향 복합재료 관재에서 파수와 주파수의 관계 및 0-90도까지 각도에 따라 변화하는 군속도와 위상속도의 그래프를 살펴 보았다. 위상속도 및 군속도의 변화는 0도부터 90도로 변화함에 따라 1MHz-mm이하에서는 주파수에 따라 속도값의 변화가 없으나, 1MHz-mm대역에서 속도값이 크게 감소하다가, 이후에서는 일정값으로 수렴하며 전파함을 알 수 있었다.

Reference

[1] H. Lamb, "On Waves in an Elastic Plate", Proc. of the Royal Soc. London, Series A. Vol. 93, pp. 114 ~128, 1917.

[2] D. C. Worlton, "Experimental Confirmation of Lamb Waves at Megacycle Frequencies", J. Appl. Phys., Vol. 32(6), pp. 967~971, 1961.

[3] 조윤희, 유도초음파에 대한 이해와 응용, 한국비파괴검사학회지, Vol. 21(4), pp. 446~460, 2001.

[4] M. J. S. Lowe, D. N. Alleyne, P. Cawley, "Defect Detection in Pipes using Guided Waves", Ultrasonics, Vol. 36, pp. 147~154, 1998.

[5] J. L. Rose, S. P. Pelts, M. J. Quarry, "A Comb Transducer Model for Guided Wave NDE", Ultrasonics, Vol. 36, pp. 163~169, 1998.

[6] E. V. K. Hill, T. J. Lewis, "Acoustic Emission Monitoring of a Filament-Wound Composite Rocket Motor Case during Hydroproof", Materials Evaluation, Vol. 43(7), pp. 859~863, 1985.

[7] D. J. McNally, "Inspection of Composite Rocket Motor Case Using Acoustic Emission", Materials Evaluation, Vol. 43(6), pp. 728~732, 1985.

[8] M. A. Hamstad and T. T. Chiao, "Structural Integrity of Fiber/Epoxy Vessels by Acoustic Emission", SAMPE Quarterly, Oct., pp. 31~45, 1976.

[9] M. R. Gorman, "Burst Prediction by Acoustic Emission in Filament Wound Pressure Vessels", J. of Acoustic Emission, Vol. 9(2), pp. 131~139, 1990.

[10] V. Dayal and V. K. Kinra, "Leaky Lamb Waves in an Anisotropic Plate I : An Exact Solution and Experiments", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 85(6) pp. 2268~2276, 1989.

[11] D. E. Chimenti and A. H. Nayfeh, "Leaky Lamb Waves in Fibrous Composite Laminates", J. Applied Physics, Vol. 58 (12) pp. 4531~4538, 1985.

[12] R. L. Weaver and Y. H. Pao, "Axisymmetric Elastic Waves Excited by a Point Source in a Plate", J. Applied Mechanics, Vol. 49, pp. 821~836, 1982.

[13] W. R. Rose, S. I. Rokhlin and L. Adler, "Evaluation of Anisotropic Properties of Graphite-Epoxy Composite Using Lamb Waves", Rev. of Prog. Quantitative NDE, Vol. 6B, pp. 1111~1118, 1987.