

직렬 4기통 엔진용 밸런스 샤프트 모듈의 불평형 질량 및 베어링 위치 선정

이 동 원* · 김 찬 중 · 배 철 용 · 이 봉 현

자동차부품연구원 ICE/EV구동융합연구센터

Optimal Location Issue on both Supporting Bearing and Unbalance Mass of the Balance Shaft Module in a Inline 4-Cylinder Engine

Dong-Won Lee* · Chan-Jung Kim · Chul-Yong Bae · Bong-Hyun Lee

Korea Automotive Technology Institute, 74 Yongjeong-ri, Pungse-myeon, Cheonan-si, Chungnam 330-912, Korea
(Received 12 January 2009 / Accepted 27 January 2010)

Abstract : Large quantity of bending deformation as well as irregular rotating torque fluctuation are the main struggles of the balance shaft module during a high speed rotation. Since two issues are much sensitive to the location of both supporting bearing and unbalance mass at a balance shaft, it is recommended to construct a design strategy on balance shaft at the early stage so as to save developing time and effort before approaches to the detailed design process. In this paper, an optimal design formulation is proposed to minimize the elastic strain energy due to bending as well as the kinematic energy of polar moment of inertia in rotation. Case studies of optimal design are conducted for different mass ratio as well as linear combination of objective function and its consequence reveals that global optimum of balance shaft model is existed over possible design conditions. Simulation shows that best locations of both supporting bearing and unbalance are globally 20% and 80%, respectively, over total length of a balance shaft.

Key words : Optimal design formulation(최적설계 정식화), Objective function(목적함수), Balance shaft(밸런스 샤프트)

1. 서론

밸런스 샤프트는 엔진에서 발생하는 불평형 질량이나 모멘트를 직접적으로 제어하기 위해 고안된 자동차 부품으로서 엔진에서 기인한 진동과 소음을 직접적으로 차단하기 때문에 고급 차종을 중심으로 적용되고 있다. 특히 직렬 4기통 엔진의 경우 엔진 회전수의 2배수에 해당하는 진동 성분이 차량의 상하 방향으로 과도하게 발생되기 때문에 밸런스 샤프트의 적용에 따라 엔진의 NVH 성능이 크게 개선된다.¹⁻⁶⁾ 밸런스 샤프트 모듈이 높은 회전수에서 원하는 성능을 발휘하기 위해서는 밸런스 샤프트의

불평형량에 의한 밸런스 샤프트의 과도한 굽힘 변형 및 엔진의 불규칙한 회전 토크 변화에 의한 회전력 전달부(기어/체인)의 이상 거동 등을 해결해야 한다. 전자의 경우 굽힘 변형에 의해 베어링의 지지 성능을 떨어뜨리고 주변 하우징과 직접적인 접촉이 일어날 가능성이 있다. 후자의 경우에는 회전 구동력을 전달하는 기어나 체인에 원하지 않는 진동이나 소음을 유발시키는 원동력이 된다. 회전체에 관한 기존의 연구는 회전축에 대칭인 로터에 대한 불평형 응답(unbalance response)을 최소화하고 안정성 한계 속도(stability limit speed)를 작동 영역에서 배제시키는데 있었다.⁷⁻⁹⁾ 그러나 밸런스 샤프트의 경우에는 불평형 응답을 임의로 과도하게 발생시키는

*Corresponding author, E-mail: leedw@katech.re.kr

모듈로써 일반적인 회전체 시스템과 다른 거동을 보이기 때문에 기존 문제해결 방안으로 대응하기가 어렵다. 본 논문에서는 초기 설계 단계에서 완성도 높은 모델이 구성되는데 중점을 두어 앞서 언급한 2 가지 문제점들을 해결하고자 하였다. 구성된 최적 설계 목적 함수를 활용하여 지지 베어링 및 불평형 질량 위치를 최적화함으로써 밸런스 샤프트의 굽힘 변형 에너지와 회전 에너지를 동시에 최소화할 수 있도록 하였다. 모듈 시험 평가시 발생하는 윤활 문제는 하우징의 상세설계 과정에 귀속되기 때문에 본 연구 내용에서 배제하였다. 또한 구동부(기어 혹은 체인)에서 발생하는 외력에 의한 영향은 고려하지 않았기 때문에 밸런스 샤프트는 자유 경계 상태로 가정하였다.¹⁰⁻¹³⁾

2. 최적 위치 결정을 위한 최적 설계 정식화

2.1 상태 변수 수식화

밸런스 샤프트에 적용되는 지지 베어링과 불평형 질량의 위치를 제어하기 위해 설계 정식화에 필요한 상태변수를 도출하도록 한다. 설계 정식화의 궁극적인 목표가 고속에서 발생하는 로터의 굽힘 변형과 구동 토크의 변화를 동시에 최소화시켜야 하기 때문에 굽힘 변형에 의한 변형량 에너지와 회전 관성 우력으로부터 발생하는 기구학적 에너지를 각각 상태 변수로 선정하였다.

2.1.1 굽힘 변형에 의한 변형량 에너지

밸런스 샤프트는 회전축을 기준으로 대칭인 부분과 비대칭인 부분으로 나누어지고, 비대칭인 부분이 불평형 질량으로서 회전 속도에 따른 불평형량을 도출시키게 된다. 본 최적화 단계에서 대칭인 부분의 상세 설계는 이루어지지 않기 때문에 단면적인 균일한 보로 가정하였으며, 불평형 질량 부분은 집중 질량으로 가정하였다. 실제 밸런스 샤프트의 상세 설계가 이루어지는 경우에도 불평형 질량은 동적 측면에서 장점이 있을 뿐만 아니라 가공 단계에서 유리하기 때문에 일반적으로 집중질량 형태로 설계가 이루어진다.¹⁴⁻¹⁷⁾ 로터 모델로부터 밸런스 샤프트 굽힘 변형에 의한 변형량 에너지를 얻어내기 위해 Fig. 1의 등가 모델을 구성하였다. 또한 이와 같은 조건에서 회전에 의해 발생하는 원심력이 단일

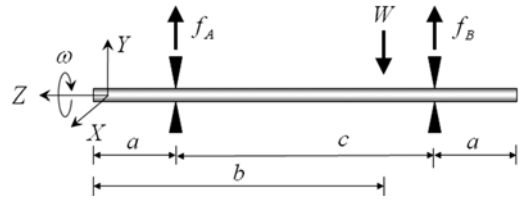


Fig. 1 Equivalent balance shaft model with bearing reaction in inline 4-cylinder engine

평면에 작용하여 동적 불평형 요소를 유발하지 않으며, 이는 Fig. 1의 정적 로터 모델로 밸런스 샤프트를 표현할 수 있는 근거가 된다.^{14,15)}

Fig. 1의 등가 로터 모델로부터 경계 조건을 설정하고 재료역학에서 사용되는 일반적인 보 이론을 적용하면 위치 $y(0 \leq y \leq L)$ 에서의 밸런스 샤프트 굽힘 변형에 의한 우력($M(y)$)은 아래 식 (1-a)로 표현되며 이에 따른 변형량 에너지($V(y)$)는 식 (1-b)이다.^{18,19)}

$$M(y) = \frac{1}{EI} [W\langle y-b \rangle^1 - f_A\langle y-a \rangle^1 - f_B\langle y-c \rangle^1] \tag{1-a}$$

$$V = \int_0^L \frac{M(y)^2}{2EI} dy \tag{1-b}$$

여기서, E 는 탄성비례계수, I 는 등가 로터 단면적에 대한 2차 관성 모멘트, L 은 등가 로터의 길이이다.

2.1.2 회전 관성 우력에 의한 기구학적 에너지

밸런스 샤프트는 불평형 질량을 가지는 로터가 고속으로 회전하기 때문에 관성 모멘트를 최소화시키는 것이 베어링의 지지 반력의 부담을 줄이고 진동 측면에서도 유리하다. 전자의 경우 상하 방향의 진동 성분에 기인한 모멘트 성분을 최소화시키기 위해서는 베어링을 회전 반경(radius of gyration)에 위치시키는 경우에 축 관성 모멘트가 최소가 되기 때문에 유리하다.^{12,13)} 질량이 M 이고 회전반경이 R 인 회전축 대칭의 로터 형상으로부터 발생하는 관성 모멘트($I_M = M(3R^2 + L^2)/12$)와 불평형 질량으로부터 유발된 모멘트 성분($m(r^2 + x^2)$)을 고려하면, 회전축 대칭 및 불평형 질량을 동시에 가지고 있는 밸런스 샤프트는 Fig. 2의 등가 로터 모델로

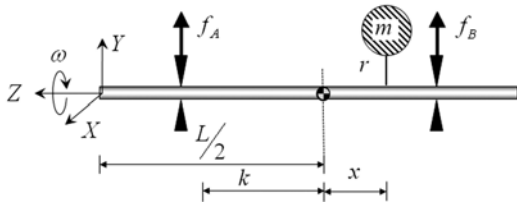


Fig. 2 Radius of gyration in the simple rotor model

부터 식 (2-a)의 회전 반경($k(x)$)을 가진다. 여기서, $x(=b-L/2)$ 는 로터 중심으로부터 등가 불평형 질량까지의 거리를 나타낸다. β 는 I_M 의 값이 불평형 질량으로부터 유발된 모멘트보다 매우 크다는 가정 아래 (2-b)의 부등식으로 표현이 가능하다.

$$k(x) = \sqrt{\frac{I_M + m(r^2 + x^2)}{(M+m)}} \quad (2-a)$$

$$= \sqrt{\frac{I_M + mr^2}{(M+m)}} \times \sqrt{1 + \beta x^2}$$

$$\beta = \frac{m}{(M(3R^2 + L^2)/12 + mr^2)} < \frac{12m}{ML^2} \quad (2-b)$$

회전축 대칭의 로터 질량(M)과 불평형 질량(m)이 아래 식 (3)의 조건으로 관계된다고 가정하자.

$$\frac{M}{m} = \gamma (> 1) \quad (3)$$

이 경우 식 (2-a)의 회전반경은 x 가 증가 로터 길이의 절반 이상으로 커질 수 없는 기하학적 조건 ($0 < x < 2/L$)을 만족하여야 하기 때문에, 아래 식 (4)로 근사화가 가능하다.

$$k(x) \approx \sqrt{\frac{I_M + mr^2}{(M+m)}} (1 + (\sqrt{1 + 3/\gamma} - 1)x) = p_0 + p_1 x \quad (4)$$

여기서, p_1 과 p_0 는 $k(x)$ 를 나타내기 위한 1차 및 0차의 테일러급수 계수들이다. 밸런스 샤프트의 관성 모멘트는 축 관성 모멘트(I_p)와 회전축과 직각인 방향의 모멘트 성분($I_{p\tau}$)으로 나눌 수 있으며 식 (3) 및 식 (4)를 이용하여 표현하면 아래 식 (5-a) 및 (5-b)와 같다.

$$I_p = m[(1 + \gamma)(p_0 + p_1 x)^2 - (\gamma L^2/12 + x^2)] \quad (5-a)$$

$$I_{p\tau} = m(1 + \gamma)(p_0 + p_1 x)^2 \quad (5-b)$$

식 (5-a)의 경우 밸런스 샤프트의 구동 토크와 관계되며, 식 (5-b)는 베어링에서 지지해야 하는 모멘트 성분과 관계된다. $I_{p\tau}$ 의 경우, 베어링 위치를 회전 중심에 둬으로써 우력 발생에 따른 부정적인 영향이 최소화되었기 때문에 본 기구학적 에너지 계산에서 생략하였다. 밸런스 샤프트가 ω 의 각속도로 회전축을 중심으로 회전한다고 가정하면 I_p 의 우력으로부터 식 (6)의 기구학적 에너지(T)가 발생한다.

$$T = \frac{1}{2} I_p \omega^2 \quad (6)$$

2.2 상태변수 범위 설정

앞서 수식화된 상태변수들은 Fig. 1의 위치 변수에 의한 함수이며, 위치 변수들은 로터의 형상 조건에 의해 구속을 받기 된다. 그러므로 앞서 수식화된 상태변수들은 밸런스 샤프트의 형상 조건에 의해 범위가 제한된다.

Fig. 1의 위치 정보를 (4)의 식으로 표현하면 $a(=L-c)$ 와 b 는 각각 식 (7-a), (7-b)로 표현이 가능하다.

$$a = -p_1 x + \frac{L}{2} - p_0 \quad (7-a)$$

$$b = \frac{L}{2} + x \quad (7-b)$$

위치 변수들($a(=L-c), b$)은 밸런스 샤프트의 형상 조건을 만족해야 하며, 아래 식 (8-a)와 (8-b)의 부등 조건으로 표현된다. 본 조건은 Fig. 1의 로터가 좌우 대칭이기 때문에 계산의 중복을 피하기 위해 설정한 것이다.

$$0 \leq a \leq L/2 \quad (8-a)$$

$$L/2 \leq b \leq L \quad (8-b)$$

식 (7-a)를 식 (9-a)로 변환한 다음, 식 (7-b)를 활용하여 부등식 (8-a)과 (8-b)를 테일러급수 계수들 (p_0, p_1)에 대한 부등식 (9-b)와 (9-c)로 각각 표현할 수 있다.

$$x = \frac{L/2 - p_0 - a}{p_1} \quad (9-a)$$

$$\frac{L}{2} \leq \frac{L}{2} + \left(\frac{L/2 - p_0 - a}{p_1} \right) \Leftrightarrow p_0 \leq \frac{L}{2} - a \quad (9-b)$$

$$L \geq \frac{L}{2} + \left(\frac{L/2 - p_0 - a}{p_1} \right) \Leftrightarrow p_1 \geq -\frac{L}{2} p_0 + \left(1 - \frac{L}{2} a \right) \quad (9-c)$$

부등식 (9-a), (9-b)와 함께 식 (4)의 계사간의 관계를 이용하여 각각의 테일러급수 계수를 축으로 하는 Fig. 3의 그래프가 도출된다.

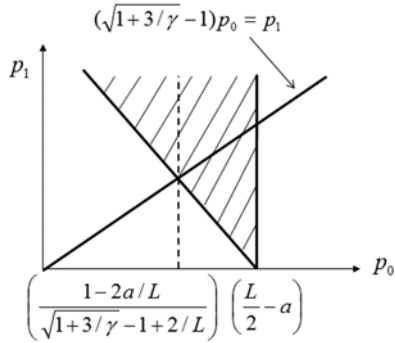


Fig. 3 Feasible region for the coefficients of Taylor series

3가지 조건을 모두 만족하는 부분에 대응하는 테일러급수 계수들의 조합이 물리적으로 가능한 밸런스 샤프트의 설계 조건들이다. Fig. 3의 공통부분에 대한 계수들의 관계는 식 (10-a)와 같고 변수 범위는 식 (10-b)와 같다.

$$(\sqrt{1+3/\gamma}-1)p_0 = p_1 \quad (10-a)$$

$$\left(\frac{1-2a/L}{\sqrt{1+3/\gamma}-1+2/L} \right) \leq p_0 \leq \left(\frac{L}{2} - a \right) \quad (10-b)$$

식 (10-b)의 변수 범위에 a 가 존재하기 때문에 테일러급수 계수들의 범위는 위치 정보에 종속적인 값이다. 그러므로 a 의 변화에 따라 상태변수의 값의 변화도 달라진다.

2.3 밸런스 샤프트에 대한 최적 설계 정식화

본 연구에서의 밸런스 샤프트 설계 목표는 동일한 관성력이 밸런스 샤프트에 작용할 때, 회전 관성 우력에 의한 기구학적 에너지 및 굽힘 변형에 의한 변형량 에너지를 최소화하는 것이다.

목적 함수는 식 (11-a)에서 나타낸 바와 같이 베어링의 위치(a)를 설계 변수로 두고 밸런스 샤프트의 굽힘 변형에 의한 변형량 에너지(V , 식 (1-b) 참고)

및 회전관성 우력에 으기한 기구학적 에너지(T , 식 (6) 참고)를 각각의 상태변수로 지정하여 선형적인 2개의 조합 중에서 최소의 값을 얻어내도록 하였다. 여기서 α 는 2개의 상태변수의 선형조합의 가중치를 조절하는 인자이며, a 와 α 의 범위는 식 (11-b)와 같다. 서로 다른 설계 변수들의 에너지 크기 차이의 영향을 배제하기 위해 정식화 과정에서 정규화(normalization) 하였다.

$$J = \min \left[\alpha \left(\frac{V(a)}{\text{norm}(V(a))} \right) + (1-\alpha) \left(\frac{T(a)}{\text{norm}(T(a))} \right) \right] \quad (11-a)$$

$$0 \leq a \leq L/2, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (11-b)$$

2.4 밸런스 샤프트 최적 설계 조건

식 (11-a)의 설계 정식화를 이용하여 a 의 변화에 따른 테일러급수 계수들의 가능한 조합들(식 (10-a) 및 (10-b) 참고)을 얻어낸 다음 각의 경우에 대해 J 값을 도출하였다. 최적 조합을 도출하기 위해 각각의 a 값에 대한 국부 최적점(local optimum)들을 도출한 후, 전체 a 에 대한 전체 최적점(global optimum)을 도출하는 순서로 진행하였다.

아래 Fig. 4에서 Fig. 7은 식 (11-c) 및 (11-d)의 변수에 대해 각각 γ 의 변화에 따른 국부 최적점을 나타낸 것이다. b 의 위치는 회전 중심점으로 한정하였기 때문에 a 의 변화에 따른 불연속의 국부 최적점들이 도출되었다. $V(a)$ 의 경우 베어링의 위치($c=L-a$)와 불평형량의 위치가 대부분 일치되는 경우에 최적의 조건이 도출되었다. $T(a)$ 의 경우 a 값이 증가함에 따라 불평형 질량의 위치가 샤프트 끝단에서 중간으로

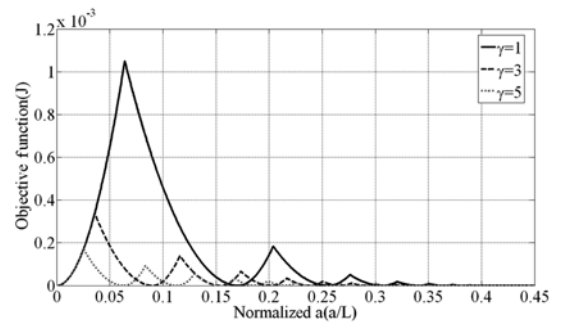


Fig. 4 Objective function against mass ratio, $\alpha = 1$

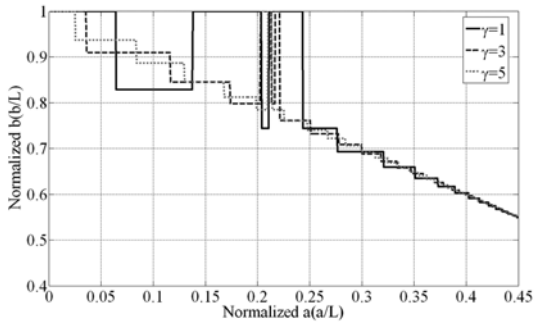


Fig. 5 Local optimal location of b against mass ratio, $\alpha = 1$

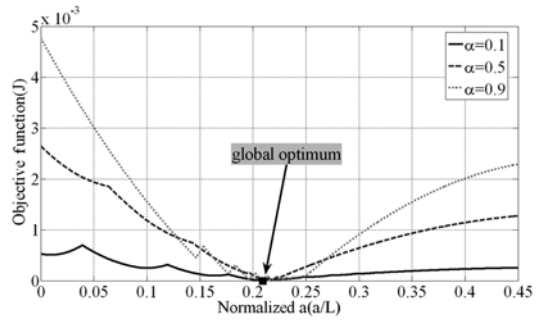


Fig. 8 Global optimum for objective function at $\gamma = 3$

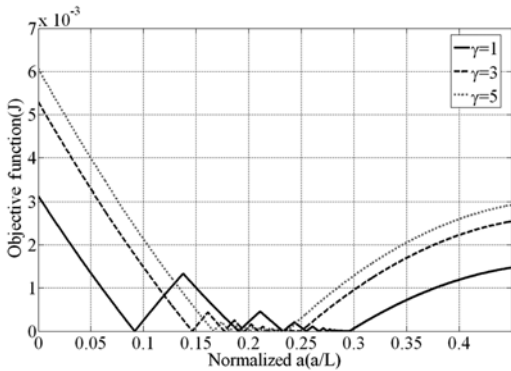


Fig. 6 Objective function against mass ratio, $\alpha = 0$

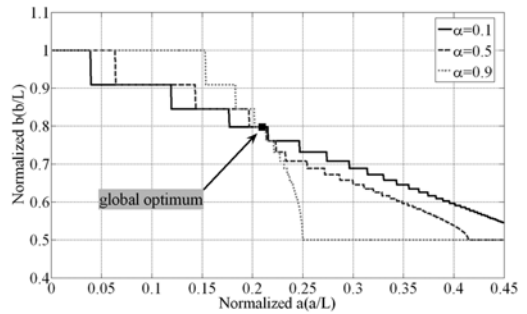


Fig. 9 Global optimum location for b at $\gamma = 3$

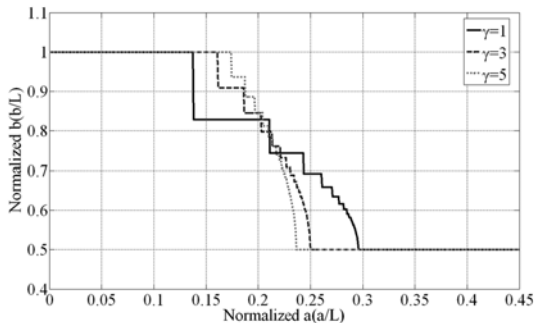


Fig. 7 Local optimal location of b against mass ratio, $\alpha = 0$

급격하게 최적 위치가 변화되는 것을 볼 수 있다.

아래 그림은 질량비가 일정($\gamma=3$)한 특정 경우에 대해 2개의 상태변수를 모두 선형적으로 고려한 3가지 경우($\alpha=0.1, 0.5, 0.9$)에 대한 국부 최적 값을 나타낸 것으로, Fig. 6은 J 값, Fig. 7은 이에 따른 불평형 질량의 위치를 각각 나타낸 것이다. a 의 변화에 따라 국부 최적 값들의 경향은 다르지만 유사한 부분에서 최적 점이 도출되었다.

Fig. 6의 경우 도출된 값을 정확하게 비교해 보면 3가지의 선형 조건에서 얻어진 최적 점이 분산이 있음을 확인할 수 있다. 보다 세부적으로 최적의 조건을 알아보기 위해 3가지의 선형 조건 및 질량비를 물리적으로 가능한 1에서부터 6까지로 선정한 후 후 각각의 경우에 대한 정규화된 a 와 b 의 값을 도출하여 아래 Fig. 8에 나타내었다.

질량비가 1인 경우를 제외하고는 정규화된 a 와 b 의 값이 유사한 값으로 도출되었으며, 2개의 위치 정보의 합은 1의 근방의 값을 나타내었다. 2개의 변

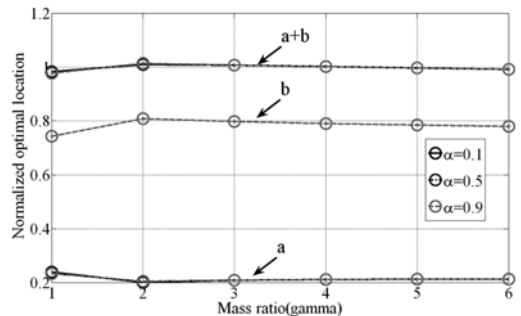


Fig. 10 Optimal location of a and b against a mass ratio

수 값의 합이 1인 조건은 굽힘 변형에 의한 변형량 에너지의 값이 최적인 국부 최적값(local optimum) 들 중 하나의 경우이며, 회전 관성 우력에 의한 기구학적 에너지 영향에 의해 전체 최적값(global optimum)이 도출되었다.

또한 Fig. 8의 해석 결과들에 대한 $I_T(=I_p+I_{p'})$ (식 (6) 참고)의 값의 변화들도 알아보았다. 이 값은 밸런스 샤프트 모멘트 성분의 합으로 높은 값을 가질수록 동일한 불평형 질량 대비 대칭의 로터 질량이 증가하기 때문에 가공의 단가 및 재료의 사용량이 증가한다. 서로 다른 선형비(α)에 대한 모멘트 성분의 합을 Fig. 9에 도시하였다. 여기서, 모멘트의 합은 물리적인 값보다는 서로 다른 경우에 대한 비교만이 필요하기 때문에 정규화 과정을 거쳐서 나타낸 것이다.

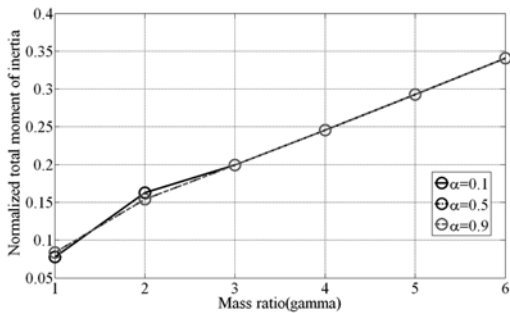


Fig. 11 Total moment of inertia of balance shaft against a mass ratio

Fig. 8의 경우 2개의 상태변수들이 모두 고려된 경우에는 선형의 가중치에 무관하게 최적 위치가 결정될 수 있지만, 모멘트의 합을 고려한 Fig. 9의 결과를 고려한 경우 질량비가 높을수록 모멘트 합이 증가하는 것을 알 수 있다. 물론 질량비를 작게 할 경우에는 우력의 합이 감소하지만 로터 자체의 강성을 보강하기 위해 상세 설계 과정에서 많은 부담을 가지게 된다. 그러므로 질량비의 선택은 2-4 범위 정도에서 설계자의 경험에 의해 선정하는 것이 바람직하다.

3. 결론

본 연구는 밸런스 샤프트 모듈의 하부 부품인 벨

런스 샤프트의 베어링과 불평형 질량의 위치 결정에 대한 연구를 수행하였다. 밸런스 샤프트 모듈이 고속 회전에서 문제점으로 지적되어 온 굽힘 변형과 모멘트 성분을 최소화시키기 위한 정식화를 수행한 바, 대칭인 밸런스 샤프트의 질량과 불평형 질량 사이의 비에 종속적인 최적화 결과를 도출하였다. 본 연구 결과를 통해 얻어진 주요 결과는 다음과 같다.

- 1) 직렬 4기통 엔진용 밸런스 샤프트의 굽힘 변형과 모멘트 성분들을 동시에 최소화할 수 있는 최적화 정식화를 수행하였다.
- 2) 최적 설계 정식화 결과 밸런스 샤프트의 최적 설계 조건이 성립함을 확인하였다.
- 3) 밸런스 샤프트의 굽힘 변형과 모멘트 성분들을 최소화하기 위해서는 지지 베어링 및 불평형 질량의 위치는 최적화 선형비에 무관하게 각각 20% 및 80% 근방임을 도출하였다.

후 기

본 논문은 산업자원부가 주관하는 자동차기반기술개발사업(“저진동 친환경 차량을 위한 밸런싱 샤프트 개발”)의 성과물로서 관계자분들에게 감사드립니다.

References

- 1) C.-Y. Bae, C.-J. Kim, B.-H. Lee, S.-J. Kwon, B.-C. Na and H.-C. Kim, “The Dynamic Characteristic Evaluation of Balance Shaft using Module Experiment,” Spring Conference Proceeding, KSAE, KSAE06-S0348, 2006.
- 2) J.-M. Ahn, Y.-C. Shin and S.-H. Kim, “A Study of Engine and Vehicle NVH Improvement for In-line 4 Cylinder Diesel Engine with Balance Shaft,” Fall Conference Proceedings, KSAE, KSAE05-F0164, 2005.
- 3) C.-J. Kim, B.-H. Lee, D.-C. Kim and I.-O. Jung, “Element Design of Balancing Shaft for Reducing the Vibration in Engine Module,” Transactions of the KSNVE, Vol.15, No.11, pp. 1268-1275, 2005.
- 4) K.-H. Suh, Y.-K. Lee and H.-S. Yoon, “A Study

- on the Balancing of the Three-Cylinder Engine with Balance Shaft,” SAE 2000-01-0601, 2000.
- 5) D. Meek and M. Roberts, “Balance Shaft Conversion of a Four Cylinder Engine,” SAE 981084, 1998.
 - 6) St. Huegen, G. Warren and R. Menne, “A New 2.3L DOHC Engine with Balance Shaft Housing,” SAE 970921, 1997.
 - 7) K. C. Panda and J. K. Dutt, “Optimum Support Characteristics for Rotor-shaft System with Preloaded Rolling Element Bearings,” Journal of Sound Vibration, Vol.260, pp.731-755, 2003.
 - 8) K. C. Panda and J. K. Dutt, “Design of Optimum Support Parameters for Minimum Rotor Response and Maximum Stability Limit,” Journal of Sound Vibration, Vol.223, No.1, pp.1-21, 1999.
 - 9) B. Xu, L. Qu and R. Sun, “The Optimization Technique-based Balancing of Flexible Rotors without Test Runs,” Journal of Sound Vibration, Vol.238, No.5, pp.877-892, 2000.
 - 10) F. Pfeiffer and W. Prestl, “Hammering in Diesel-Engine Driveline Systems,” Nonlinear Dynamics, Vol.5, pp.477-492, 1994.
 - 11) J. Jerrelind and A. Stensson, “Nonlinear Dynamics of Parts in Engineering Systems,” Chaos, Solitons and Fractals, Vol.11, pp.2413-2428, 2000.
 - 12) T. Fujimoto and T. Kizuka, “An Improvement of the Prediction Method of the Idling Rattle in Manual Transmission,” SAE 2001-01-1164, 2001.
 - 13) T. Fujimoto and T. Kizuka, “Predictive Calculation of Idling Rattle in Manual Transmissions,” SAE 2003-01-0678, 2003.
 - 14) D.-W. Lee, C.-J. Kim, C.-Y. Bae, B.-H. Lee, S.-J. Kwon and H.-C. Kim, “Behavior of a Balance Shaft Regarding Unbalance Mass Distribution,” KSNVE 2006 Fall Conference, KSNVE06A-04-04, 2006.
 - 15) D.-W. Lee, C.-J. Kim, C.-Y. Bae, S.-J. Kwon, B.-H. Lee and D.-C. Kim, “Fatigue Analysis of Balance Shaft Housing Considering Non-Linear Force Condition,” KSNVE 2007 Spring Conference, KSNVE07S-13-02, 2007.
 - 16) W. T. Thomson and M. D. Dahleh, Theory of Vibration with Application, 5th Edn, Prentice Hall, 1997.
 - 17) W. F. Riley and L. D. Sturges, Engineering Mechanics: Dynamics, 2nd Edn, John Wiley & Sons, Inc., 1996.
 - 18) J. M. Gere and S. P. Timoshenko, Mechanics of Materials, International Thomson Editors, 1999.
 - 19) E. Kramer, Dynamics of Rotors and Foundations, Springer-Verlag, 1993.