

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-B.2010.34.7.665

## 등방성 난류에서 입자의 회전에 의한 분산 특성의 변화<sup>§</sup>

박 용 남\* · 이 창 훈\*,\*\*†

\* 연세대학교 기계공학과, \*\* 연세대학교 계산과학공학과

### Modification of Particle Dispersion in Isotropic Turbulence by Free Rotation of Particle

Yongnam Park\* and Changhoon Lee\*,\*\*†

\* Dept. of Mechanical Engineering, Yonsei Univ.,

\*\* Dept. of Computational Science and Engineering, Yonsei Univ.

(Received December 26, 2008 ; Revised May 18, 2010 ; Accepted June 4, 2010)

**Key Words** : Lift Force(양력), Particle-Laden Turbulence(입자부유난류), Direct Numerical Simulation(직접수치모사)

**초록**: 등방성 난류에서 부유된 무거운 입자의 운동에서, 입자의 회전이 고려되었을 때 입자의 분산 특성에 나타난 변화를 살펴보았다. 입자의 회전을 고려함으로 인해 추가로 고려되는 양력은 그 크기가 작은 것으로 알려져 있고, 따라서 많은 연구에서 회전에 의한 효과는 무시되었다. 본 연구에서는 라그랑지안 기법으로 추적인 입자의 궤적에 미치는 양력의 크기를 속도와 가속도의 자기상관함수 및 확률밀도함수를 통해 정량적으로 살펴보았다. 속도 통계량에서는 양력에 의한 효과가 무시할 만 했으나, 가속도와 관련된 통계는 양력에 의한 영향이 있는 것으로 확인되었다. 난류의 가속도는 간헐성을 띄며, 간헐적인 특성은 난류 구조와 관련이 있다는 것이 알려져 있다. 따라서 입자에 작용하는 양력과 난류구조에 연관성이 있다는 유추가 가능하다.

**Abstract**: The effect of a particle's spin is investigated numerically by taking into account the effect of lift forces originating due to difference between the rotations of a particle and of a fluid, such as the Saffman and Magnus lift forces. These lift forces have been ignored in many previous studies on particle-laden turbulence. The trajectory of the particles can be changed by the lift forces, resulting in a significant modification of the stochastic characteristics of heavy particles. Probability density functions and autocorrelations are evaluated from the velocity of solid particle, acceleration of solid particles, and acceleration of fluid at the position of solid particle. Changes in velocity statistics are negligible but statistics related with acceleration are affected by the rotation of particle. When a laden particle encounters coherent structures during its motion, the particle's rotation might significantly affects the motion due to intermittently large fluid acceleration near the coherent structures.

- 기호설명 -

$\bar{g}$  : 중력가속도  
 $a$  : 부유입자의 반지름  
 $\mu$  : 점성계수  
 $\nu$  : 동점성계수  
 $\rho$  : 밀도  
 $\omega_p$  : 부유입자의 각속도  
 $R_\lambda$  : 레이놀즈수(Taylor micro scale)

$Re_p$  : 입자레이놀즈수  $\frac{2a}{\nu}|\bar{u}-\bar{v}|$   
 $St$  : 스토크스수(Stokes number)  
 $I$  : 관성모멘트(Moment of inertia)  
 $\tau_\eta$  : Kolmogorov 시간 척도(Kolmogorov time scale)  
 $\tau_p$  : 입자의 특성 시간 척도(Characteristic time scale of particle)

### 1. 서론

<sup>§</sup> 이 논문은 대한기계학회 2008년도 추계학술대회(2008. 11. 5.-7., 용평리조트) 발표논문임  
<sup>†</sup> Corresponding Author, clee@yonsei.ac.kr

부유입자가 있는 난류는 대기, 해수 등에서 빈번히 발생하고, 최근 환경 문제가 대두되면서 오

염물질의 확산과 같은 부유입자의 움직임을 예측이 중요해지고 있다. Kolmogorov의 local isotropic 이론에 의하면 충분히 큰 레이놀즈수에서 작은 척도의 난류의 움직임은 통계적으로 등방성을 띠게 된다.<sup>(1)</sup> 따라서 본 논문에서는 등방성 난류에서 부유된 입자의 통계적 특성을 조사함으로써, 입자의 회전이 미치는 보편적 영향을 조사하고자 하였다.

입자의 확산을 결정하는 변수인 입자의 위치에서 바라본 유체의 적분시간척도(integral time scale)는 유체의 움직임과 입자의 운동의 상호작용이 가장 활발해지게 되는 Stokes 수 1 근방일 때 급격한 변화 양상을 보이는 것으로 알려져 있다.<sup>(2)</sup> 따라서 부유된 입자의 움직임을 해석 할 때에는 Stokes 수 1 근처에서의 엄밀한 해석이 필요하다. 부유된 입자의 분산특성에 대한 연구는 많이 있었으나, 부유입자의 회전을 고려한 경우는 많지 않다. 입자의 회전의 영향이 커질 것으로 예상되는 난류 영역 보다는, 주로 단순한 전단유동 근처에서의 회전 특성을 조사한 연구가 대부분이다. 본 연구에서는 입자와 유체의 회전속도 차이에 의해 생기는 토크와 그로 인해 생기는 양력(Lift force)들을 조사하였다. 유체의 해석을 위해 3 차의 정확도를 가지는 직접수치모사 (Direct Numerical Simulation)를 수행하였다. 공간차분으로는 Fourier spectral 방법이 사용되었고, 시간차분으로는 3 차 Runge-Kutta 방법이 사용되었다. 계산영역은  $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ 의 periodic 경계조건을 설정하였다. 난류의 등방성을 유지하기 위해 Eswaran and Pope(1988)가 제시한 Uhlenbeck-Ornstein random processes에 기초한 forcing 방식을 사용하였다.<sup>(3)</sup> 입자추적기법은 계산 시간과 정확도 측면에서 가장 효과적인 것으로 나타난 4 차의 Hermite 내삽법을 이용하였다.<sup>(4)</sup>

## 2. 지배방정식

### 2.1 부유입자에 대한 운동방정식

부유입자에 대한 운동방정식은 Maxey & Riley<sup>(5)</sup>(1983)에 의해 제안된 식을 사용하였고 다음과 같다.

$$m_p \frac{d\vec{V}}{dt} = (m_p - m_f)\vec{g} + m_f \frac{D\vec{u}}{Dt} - \frac{1}{2}m_f \frac{d}{dt}(\vec{V} - \vec{u}) - 6\pi a \mu (\vec{V} - \vec{u}) \quad (1)$$

$m_p$ 는 부유입자의 질량,  $m_f$ 는 부유입자가 차지한 유체의 질량,  $\vec{V}$ 는 부유입자의 속도,  $\vec{u}$ 는

부유입자의 위치에서 유체의 속도를 나타낸다. 무거운 입자는 입자의 질량이 입자가 차지한 유체의 질량에 비해 매우 크기 때문에 즉,  $m_p \gg m_f$ 로 가정하면, 다음과 같은 간단한 형태로 근사가 가능하다.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{\tau}(\vec{u} - \vec{V}) + \vec{g} \quad (2)$$

$\tau \equiv 2\rho_p a^2 / 9\mu$ 는 입자의 특성시간척도(characteristic time scale)이며 유동에 대한 입자의 상대적인 관성을 나타내는 무차원수인 Stokes 수는 다음과 같이 정의된다.

$$St = \frac{\tau_p}{\tau} \quad (3)$$

입자와 유체의 상대속도에 의해 정의된 입자 레이놀즈수는 다음과 같다.

$$Re_p = \frac{2a}{\nu} |\vec{u} - \vec{V}| \quad (4)$$

입자의 레이놀즈수가 충분히 작지 않으면 선형성을 보장할 수 없기 때문에 레이놀즈수에 따른 보정식이 필요하다. Shiller와 Neumann에 의해 제안된 항력에 대한 보정식은 다음과 같다.

$$F_D = -6\pi a \mu (\vec{V} - \vec{u}) [1 + 0.15 Re_p^{0.687}] \quad (5)$$

따라서 입자의 레이놀즈수에 따른 입자의 특성시간은 다음과 같이 수정된 식을 사용하였다.

$$\tau_p \equiv \frac{2\rho_p a^2}{9\mu} \frac{1}{1 + 0.15 Re_p^{0.687}} \quad (6)$$

#### 2.1.1 입자의 회전에 대한 운동방정식

부유입자에 가해지는 토크는 부유입자 표면에 미치는 전단응력의 분포에 의해 발생된다. 레이놀즈수가 작을 때 즉, Stokes 유동 영역에서 구형 입자에 가해지는 토크의 크기는 다음과 같다. (Happel and Brenner, 1973)<sup>(6)</sup>

$$\vec{T} = 8\pi \mu a^3 \left( \frac{1}{2} \nabla \times \vec{u} - \vec{\omega}_p \right) \quad (7)$$

또한 균질한 구형 입자가 받는 토크는 입자의 관성모멘트와 각가속도의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$\vec{T} = I \vec{\alpha} = \frac{8}{15} \pi \rho_p a^5 \vec{\alpha} \quad (8)$$

식 (7)과 식 (8)을 연립하면 부유한 구형입자의 각가속도에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}_p}{dt} = \frac{10}{3\tau_p} \left( \frac{1}{2} \nabla \times \vec{u} - \omega_p \right) \quad (9)$$

식 (2)와 식 (9)의 적분을 통해서 부유한 입자의 속도와 각속도를 각각 구할 수 있다. 미분 방정식의 수치 적분 위해서 유체의 시간차분과 같은 차수인 3 차의 Runge-Kutta 방식을 사용하였다.

식 (2)와 식 (9)를 비교해 보면, 회전에 대한 특성 시간 척도는 병진 운동에 대한 특성 시간 척도의 1/3 배임을 알 수 있다. 특성 시간 척도는 정지한 입자가 유속의  $1 - e^{-1}$  배가 될 때까지 걸리는 시간을 의미하는 것으로, 병진 운동에 비해 회전운동이 더 빠르게 평형 상태에 도달함을 유추할 수 있고, 이 사실은 Bagchi & Balachandar (2002) 에 의해 수치적으로 증명 된 바 있다.

### 2.1.2 Magnus lift force

부유입자의 회전에 의해 입자 주변의 전단유동이 발생하고, 그 전단유동의 영향으로 인해 부유입자에 양력이 발생하게 된다. 이 양력은 마그누스 힘으로 잘 알려져 있고, 입자의 레이놀즈수가 작을 때 입자에 작용하는 양력은 Rubinow 와 Keller (1961)에 의해 유도되었다.<sup>(7)</sup>

$$\vec{F}_{Mag} = \pi a^3 \rho \left[ \left( \frac{1}{2} \nabla \times \vec{u} - \vec{\omega}_p \right) \times (\vec{u} - \vec{V}) \right] \quad (10)$$

$\frac{1}{2} \nabla \times \vec{u} - \vec{\omega}_p$  는 유체와 부유입자의 회전속도 차이이고, 따라서 마그누스 힘은 유체와 부유입자와의 상대 각속도와 상대속도의 벡터곱으로 구해 짐을 알 수 있다.

### 2.1.3 Saffman lift force

부유입자 주변 유체의 속도구배(velocity gradient)로 인한 입자표면의 압력분포가 달라지게 되고 이로 인한 양력이 발생하게 된다. Saffman(1965)에 의해 제안된 전단유동에 의한 양력은 다음과 같다.<sup>(8)</sup>

$$\vec{F}_{Saff} = 6.46a^2 \left( \frac{\mu\rho}{|\nabla \times \vec{u}|} \right)^{1/2} [(\vec{u} - \vec{V}) \times (\nabla \times \vec{u})] \quad (11)$$

위 식과 같이 Saffman 양력은 유체와 부유입자의 상대속도와, 와도(vorticity)의 벡터곱으로 나타낼 수 있다. 상대속도는 입자의 관성으로 인하여 항

상 평형상태를 유지하려 하기 때문에 Stokes 수가 1 근처일 때 가장 크게 나타난다.

유체의 가속도는 속도와는 달리 간헐성(Intermittency)을 보이며, 매우 큰 가속도의 방향은 항상 난류 구조의 중심을 향한다.<sup>(12)</sup> 중심을 향하는 구심 가속도의 존재는 난류구조 근처에서 회전운동이 강하게 발생하고 있음을 나타내며 유체의 와도 또한 매우 큰 값을 보이게 된다. 양력은 많은 경우에 무시되어 왔지만, Stokes 수가 1 근처인 입자가 난류 구조 근처에서 움직이고 있을 때, 입자에 작용하는 양력의 영향력이 상대적으로 커지게 되며, 이러한 양력의 영향이 입자의 궤적을 따라가면서 축적되면 결과적으로 입자의 분산 특성에 영향을 미칠 것으로 기대할 수 있다.

식 (11)은 전단률에 의해 정의된 유체의 레이놀즈수  $Re_G \equiv \frac{4a^2 d\vec{u}}{\nu dy}$  가 상대속도에 의해 정의된

입자의 레이놀즈수의 제곱보다 매우 큰 경우에만 성립한다. McLaughlin(1991)은 Saffman 의 식을 확장하여 상대속도에 의해 정의된 레이놀즈수가 전단률에 의해 정의된 레이놀즈수보다 큰 경우에는 양력이 급격히 줄어들음을 보였고,<sup>(9)</sup> Mei (1992)에 의해 레이놀즈수에 따른 Saffman 양력의 보정식이 제시되었다.<sup>(10)</sup>

$$F_L / F_{Saff} = (1 - 0.3314^{1/2}) e^{(-Re_p/10)} + 0.3314\beta^{1/2} \quad Re_p \leq 40$$

$$= 0.0524(\beta Re_p)^{1/2} \quad Re_p > 40 \quad (12)$$

### 2.2 가속도항

입자는 유체에 영향을 주지 않는 것으로 가정하였고, 중력은 고려하지 않았다. 따라서 식 (2)는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{\tau_p} (\vec{u} - \vec{V}) + \vec{a}_{saff} + \vec{a}_{mag} \quad (13)$$

$$\vec{a}_{saff} = \frac{\vec{F}_{saff}}{m_p} = 0.726 \frac{\rho_f}{\rho_p} \sqrt{\frac{1}{\tau_p |\vec{\omega}|}} [((\vec{u} - \vec{V}) \times \vec{\omega})] \quad (14)$$

$$\vec{a}_{mag} = \frac{\vec{F}_{mag}}{m_p} = \frac{3}{4} \frac{\rho_f}{\rho_p} \left[ \left( \frac{1}{2} \vec{\omega} - \vec{\omega}_p \right) \times (\vec{u} - \vec{V}) \right] \quad (15)$$

무거운 입자의 경우  $\rho_p \gg \rho_f$  이기 때문에 식 (14) 및 식 (15)에서 나타난 바와 같이 Saffman 과

Magnus 양력의 크기는 매우 작아질 수 있다. 따라서 Maxey & Riley 에 의해 제안된 운동 방정식에서 유체와 입자의 큰 밀도비 때문에 무시된 다른 힘들과 마찬가지로 양력 또한 무시 될 수 있다. 하지만 본 연구에서는 항력에 대한 양력의 영향만을 독립적으로 파악하기 위해 지배방정식의 다른 항들은 무시하고 양력의 영향만을 보기 위해 수치해석을 수행하였다. 수치해석에 사용한 유체와 입자의 밀도비는 1:1000 으로 고정하였다.

### 3. 결과 및 고찰

#### 3.1 확률밀도함수

양력의 영향을 조사하기 위해 입자의 속도와 가속도에 대한 자기상관함수(autocorrelation function), 확률밀도함수(probability density function), 분산(dispersion) 등의 통계량을 조사하였다. 예상한 바와 같이 양력의 영향은 매우 작기 때문에 양력이 있을 때와 없을 때 통계량의 변화는 크지 않았다. 자기상관함수에서는 유의미한 변화를 관찰할 수 없었지만, 로그 스케일로 표시된 확률밀도함수에서는 의미 있는 차이가 관찰되었다.

유체나 입자의 속도분포는 표준정규분포(Gaussian distribution)를 나타낸다. 이러한 특징은 양력이 작용하는 경우에도 동일하게 나타났다. 하지만 난류에서 유체나 입자의 가속도는 정규분포에 비해서 매우 넓은 분포를 보이는 데, 이를 간헐성(intermittency) 라고 한다. 간헐성이 크게 나타날수록, 표준편차의 수십 배 이상의 사건이 자주 발생하는 것으로, 입자나 유체의 통계적인 특성에 영향을 미치게 된다.

Fig. 1 은 Stokes 수가 0.5, 0.7, 1.0, 2.0 일때의 유체와 입자의 가속도의 확률 밀도함수이다. 난류의 레이놀즈수  $R_\lambda$  는 47 이고, 통계량 계산에 사용된 입자의 수는  $10^8$  개 수준이다. 유동의 직접수치모사에 사용된 forcing parameter 는 J.D Jung 등<sup>(2)</sup>에 의해 수행된 수치해석과 동일한 값을 사용하였다. 각각의 그래프에서 가장 안쪽의 점선은 표준정규분포를 나타내고, 가장 바깥 쪽 실선은 유체의 라그랑지안 가속도의 확률밀도함수이다. 입자의 가속도와, 입자의 위치에서 관측한 유체의 가속도(seen by particle)의 확률밀도함수는 양력을 고려할 때와, 고려하지 않았을 때를 비교해서 나타내었다. 안쪽에 있는 두 쌍의 그래프 중, 아래쪽 그래프가 입자의 가속도이고, 위쪽에 위치한 그래프가 입자의 위치에서 바라본 유체의 가속도이다. 점선은 양력을 고려하지 않은 경우, 실선은 양력을 고려

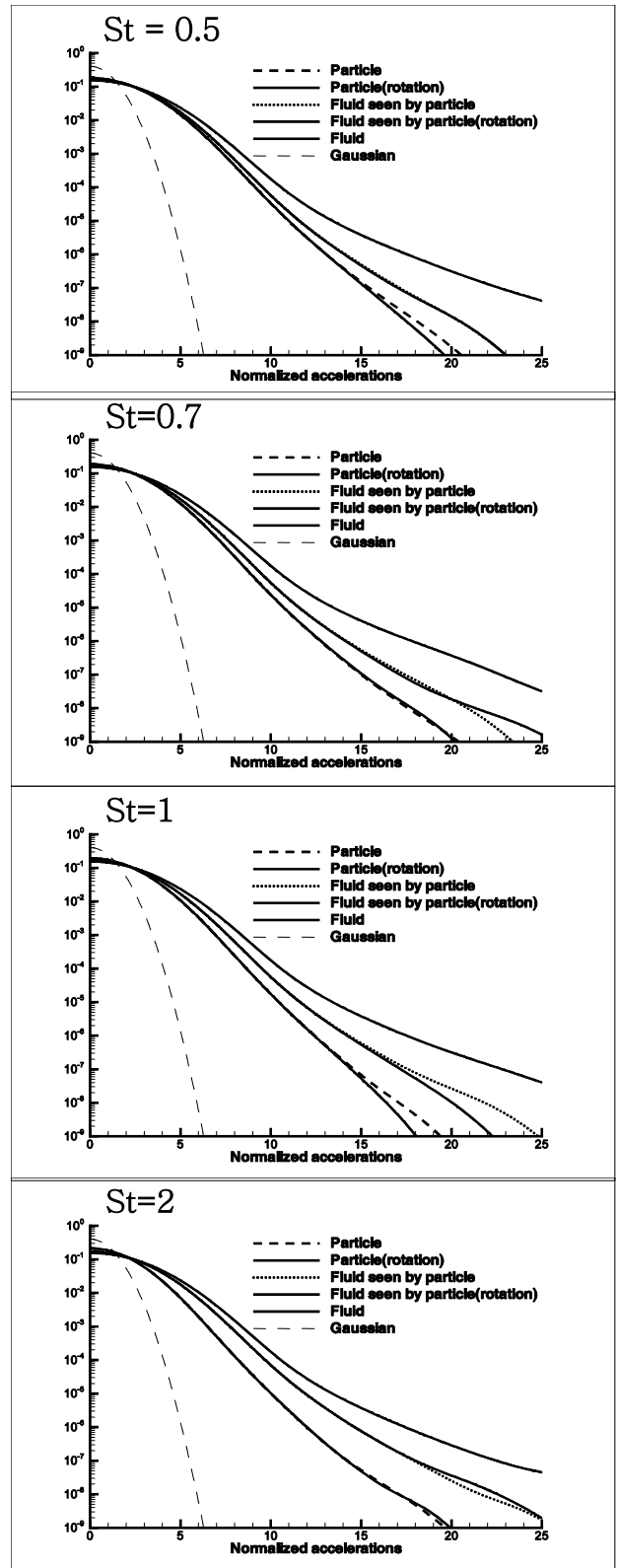


Fig. 1 PDF of acceleration of particle, seen by fluid and lagrangian fluid when Stokes number is 0.5, 0.7, 1, 2 from top to bottom

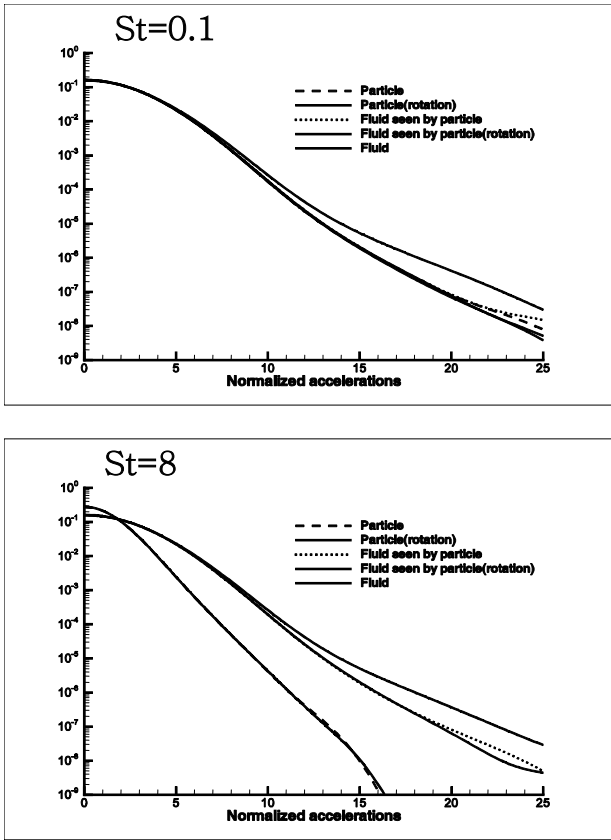


Fig. 2 PDF of acceleration of particle, seen by fluid and lagrangian fluid when Stokes number is 0.1 and 8

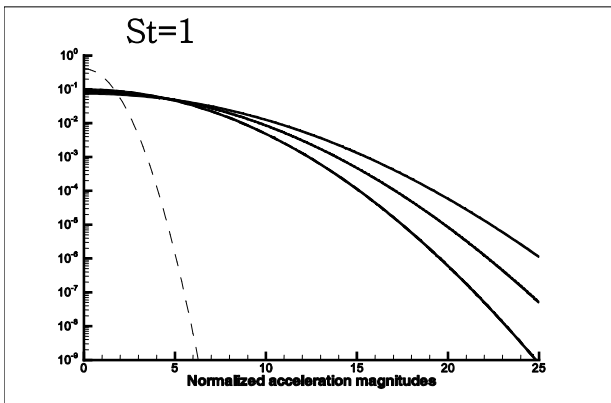


Fig. 3 PDF of acceleration magnitude of particle, seen by fluid and lagrangian fluid when  $St=1$ . There are no significant changes of PDF by lift forces

했을 때의 결과이다. 그래프에서 보는 바와 같이, Stokes 수가 1 일 때 양력이 고려된 경우와 고려하지 않은 경우에 가장 큰 차이를 나타내는 것을 알 수 있다. 표준정규분포와 비교해 보았을 때, 유체 및 입자의 가속도의 간헐성이 상당히 크게 나타남을 알 수 있다.

Fig 2 는 Stokes 수가 0.1, 8 일 때의 가속도의 확률밀도 함수이다. 이 경우는 양력에 의한 영향은 매우 작게 나타났다. 따라서 양력의 영향은 Stokes 수가 1 근처일 때에만 고려할 만 하다고 볼 수 있다.

Fig 3 은 Stokes 수가 1 일 때 가속도 크기의 확률밀도함수이다. 가속도의 확률밀도함수는 1 일 때 양력의 효과가 가장 유의미하게 나타났지만, 가속도 크기의 확률밀도함수는 양력에 의한 효과가 거의 나타나지 않는다. Fig 3 의 그래프상에는 양력을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우가 중첩되어 구분되지 않는다. 지면 관계상 본 논문에는 첨부하지 않았으나, Stokes 수가 1 인 경우뿐 아니라 수치 해석을 수행한 모든 영역에서 가속도 크기의 확률밀도함수는 양력의 영향을 받지 않는 것으로 나타났다.

본 연구 및 선행연구에서 나타난 바와 같이, 무거운 입자에 미치는 양력의 크기는 매우 작기 때문에 양력이 통계량의 크기에 미치는 영향은 미미한 것으로 보인다. 그러나 Fig 2 에서 나타난 바와 같이 양력에 의해 가속도의 분포가 변화된 결과로부터, 양력이 가속도의 방향에 영향을 미치는 것으로 유추가 가능하다.

#### 4. 결론

입자의 회전을 고려함으로써 추가로 발생하는 양력이 난류 영역에서 입자의 분산 특성을 어떻게 변화시키는지에 대한 연구를 수행 하였다. 직접수치모사를 통해서 얻어진 입자의 속도 및 가속도의 확률밀도함수(Probability Density Function) 를 조사하였다. 속도의 확률밀도함수는 입자의 회전에 관계 없이 항상 표준정규분포를 보였다. 즉, 회전의 효과는 입자의 속도 분포에는 영향을 미치지 않았다.

입자 및 입자의 위치에서 바라본 유체의 가속도는 Stokes 수가 1 근처일 때 양력의 영향에 의해 가장 크게 변화였고, Stokes 수가 1 보다 매우 작거나 큰 경우에는 양력의 효과를 살펴볼 수 없었다. 가속도 크기의 확률밀도함수의 경우는 모든 Stokes 수 영역에서 양력에 의한 효과가 무시할 정도로 작게 나타났다. 위 결과로부터, 무거운 입자에 미치는 양력의 크기는 매우 작지만 가속도의 방향에 영향을 미친다는 것을 유추해 낼 수 있다.

레이놀즈수가 높을수록 가속도의 간헐성은 심하게 나타나며, 본 연구에서 양력에 의한 분포의 변화는 높은 레이놀즈수에서 더 커질 것으로 기대된다. 본 연구는 비교적 레이놀즈수가 낮은 영역

의 수치해석이기에 때문에 향후 더 높은 레이놀즈수에서의 시뮬레이션을 통해서 레이놀즈수와 양력의 영향에 대한 해석이 요구된다. 따라서 향후 높은 레이놀즈수의 난류에 부유된 입자의 해석에서, Stokes 수가 1 근처일 경우에는 양력을 고려해야 한다는 결론을 내릴 수 있다.

### 후 기

본 연구는 핵심연구 중견연구 지원사업 (2010-0000169) 지원에 의해 수행되었으면 이에 감사 드립니다.

### 참고문헌

- (1) Pope, S.B., 2000, *Turbulent Flow*, Cambridge University press, Cambridge, p.184.
- (2) Jung, J.D, Yeo, K.M. and Lee, C, 2008, "Behavior of Heavy Particles in Isotropic Turbulence," *Physical Review E*, Vol.77, 016307.
- (3) Eswaran, V. and Pope, S.B, 1988, "An Examination of Forcing in Direct Numerical Simulation of Turbulence," *Comp. Fluids*, Vol.16, p.257.
- (4) Choi, J. I. and Lee, C., 2003, "Lagrangian Statistics in Turbulent Channel Flow," *Phys. Fluids*, Vol.26, pp.883.
- (5) Maxey, M. R. and Riley, J. J., 1983, "Equation of Motion for a Small Rigid Sphere in a Non-Uniform Flow," *Phys. Fluids*, Vol.26, No.4, p.883.
- (6) Happel, J. and Brenner, H., 1973, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Noordhoff Intl. Pub. Leiden.
- (7) Rubinow, S. I. and Keller, J. B., 1961, The Transverse Force on Spinning Sphere Moving in a Viscous Fluid, *J. Fluid Mech.*, Vol.11, p.447.
- (8) Saffman, P. G., 1965, "The Lift on a Small Sphere in a Slow Shear Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol.22, p.385.
- (9) Mclauhlin, J. B., 1991, "Inertial Migration of a Small Sphere in Linear Shear Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol.224, p.262.
- (10) Mei, R., 1992, "An Approximate Expression for the Shear Lift on a Spherical Particle at Finite Reynolds Number," *Intl. J. Multiphase Flow*, Vol.18, p.145.
- (11) Crowe, C., Sommerfeld, M. and Tsuji, Y., 1998, *Multiphase Flows with Droplets and Particles*, CRC press.
- (12) Lee, S. and Lee, C., 2005, "Intermittency of Acceleration in Isotropic Turbulence," *Physical Review E*, Vol. 71, 056310.