한국항행학회 논문지 제14권 제6호 2010년 12월

하노이의 탑의 새로운 그래프 시각화에 대한 연구

A Study on a Novel Graph Visualization for the Tower of Hanoi

조청운*, 강대기**

Cheung-Woon Jho*, Dae-Ki Kang**

요 약

본 논문에서는 하노이의 탑 (Tower of Hanoi; ToH) 문제를 확장한 문제들을 소개하고, ToH 문제의 상태 공간을 그래프로 표현하기 위한 새로운 방안을 제시하고자 한다. 확장한 문제들로는 기둥의 수를 늘린 경우, 디스크 스택의 수를 늘린 경우, 그리고 일반 상태 간의 이동에 대한 세 가지를 소개하고, 다른 변종 문제들을 소개하고자 한다. 우리가 본 논문에서 제시한 새로운 표현 방안은 기존의 하노이 그래프 표현에 대해 확장된 방식의 그래프 표현을 제시하는 것이다. 제안된 표현에서는 각 디스크마다 하나의 직교좌표를 부여해 줌으로써 링크의 표시와 상태의 변화가 디스크가 어느 기둥에 배치되어 있는가와 시각적으로 일치된 시각화를 가능하게 해 준다. 제안된 표현을 기존의 하노이 그래프와 비교해 보면, 제안된 표현에서 디스크를 옮길 수 없는 링크를 제거하면 기존의 하노이 그래프와 isomorphic하다. 따라서, 제안된 표현은 기존의 하노이 그래프를 확장하여 표현력을 고도화한 것임을 알 수 있다. 제안된 표현에 대한 독자들의 이해를 돕기 위해, 우리는 본 논문에서 디스크의 개수가 2와 3인 경우에 대한 제안된 표현의 시각화 예를 제시하였다.

Abstract

In this paper, we introduce extended problems of Tower of Hanoi (ToH) and propose a novel visualization method to express a state space of ToH. As for the extended problems, we introduce multi-peg ToH, multi-stack ToH, and regular state ToH. The novel visualization method in this paper is a natural extension of Hanoi graph visualization. In the proposed method, we assign one Cartesian coordinate point per each disk to provide an unified visualization that the marks on a link and the changes of a state should correspond with a peg position of a disk. Compared with Hanoi graph, the generated graph by the proposed method is isomorphic if we remove links of forbidden move, which indicates that our method is a generalization of Hanoi graph and thus is more expressive. To help the understanding of the readers, we show the generated graphs by our method when the number of disks is 2 and 3.

Key words : Tower of Hanoi, multi-peg Tower of Hanoi, multi-stack Tower of Hanoi, regular state, Hanoi graph, Sierpinski graph, Frame Stewart conjecture, Tower of London

I. 서 론

하노이의 탑 문제는 프랑스의 수학자 뤼카(É. Lucas)가 발표한 퍼즐[1]로, 인도 베나라스의 한 사원

* 동서대학교 디지털콘텐츠학부 디지털영상제작전공 (ewjho@dongseo.ac.kr)
** 동서대학교 컴퓨터정보공학부 컴퓨터공학전공 (dkkang@dongseo.ac.kr)
· 제1저자 (First Author) : 조청운 · 교신저자 (corresponding author) : 강대기
· 투고일자 : 2010년 12월 3일
· 심사(수정)일자 : 2010년 12월 3일 (수정일자 : 2010년 12월 16일)
· 게재일자 : 2010년 12월 30일

에 있는 3 개의 기둥과 그 중 하나의 기둥에 크기 순서대로 쌓여있는 64 개의 디스크들에 대한 이야기에서 유래한 문제이다. 이 64 개의 디스크은 가장 작은 것이 위에 있고 크기 순서대로 쌓여있는 데, 이들을 한 번에 한 개씩 옮기되, 큰 디스크가 작은 디스크 위에 오지 못하도록 정해진 규칙에 따라 전부 옮기면 세상은 종말을 맞이하게 된다고 전해진다.

이러한 하노이의 탑 문제는 자료 구조 및 알고리즘에서 재귀 호출을 시연하기 위해 많이 쓰이며, 퍼즐을 기반으로 한 컴퓨터 게임의 소재로도 많이 쓰인다. 예를 들어, 최근 닌텐도 DS 라이트 (Nintendo DS Lite) 기반에서 퍼즐풀이와 애니메이션 스토리 텔링을 통합한 새로운 장르의 게임으로 인기를 끈 “레이튼 교수와 이상한 마을”에서도 하노이의 탑이 등장한 바 있다. 또한 하노이의 탑을 실제로 가지고 놀아보게 함으로써 아동 교육학이나 정신분석학에서 활용되기도 한다[2]. 우리는 또한 인터넷을 하나의 거대한 그래프로 간주하는 인터넷 알고리즘 연구에 있어서도 하노이의 탑의 연구가 그래프 이론의 일부로써 기여할 여지가 크다고 보고 있다[3].

학술적으로 볼 때, 하노이의 탑 문제는 컴퓨터 게임에 자주 등장할 정도로 대중적으로 잘 알려져 있으나, 실제로는 다양한 확장과 변형이 있으며 확장된 문제들은 매우 어렵기로 악명 높음에도 불구하고 [4,5], 심지어 대부분의 전산학자들도 하노이의 탑 문제에 대해 깊이 알지 못하고, 자료 구조 관련 서적에 있는 내용 정도인 재귀 호출을 익히기 위한 단순한 문제로만 알고 있는 경우가 많다. 따라서 우리는 본 논문에서 하노이의 탑 문제에 대한 관심사의 저변 확충을 위해 하노이의 탑 문제를 확장한 문제들 중 세 가지 종류를 제시하고, 하노이의 탑 문제는 아니지만 비슷한 문제들에 대해서도 소개하고자 한다.

또한 하노이의 탑 문제의 상태 공간을 표현하기 위한 하노이 그래프(Hanoi Graph)는 시에르핀스키 그래프(Sierpiński graph)와 유사하나 실제로는 다소 다른 점이 있으며, 하노이의 탑 문제를 다방면으로 이해하기 위해서는 다른 표현이 가능할 수도 있음에도, 하노이의 탑 문제를 표현하는 거의 유일한 방법으로 사용되어 왔다. 따라서, 우리는 본 논문에서 하노이 그래프를 확장하여 하노이의 탑 문제를 표현한 방식을 제시하고, 하노이 그래프와의 장단점을 정성적으로 분석하였다.

Ⅱ. 하노이의 탑 문제 소개

그림 1과 같이 , 하노이의 탑 문제는 다음과 같이 정의된다. 목표는 디스크들을 모두 다른 기둥으로 옮기는 것으로, 다음의 두 가지 조건이 만족되어야 한다.

(1) 한 번에 디스크 하나만 옮긴다.

(2) 어떠한 경우에도, 큰 디스크는 작은 디스크 위에 오면 안된다. 이를 흔히 디바인 룰(divine rule)이라 부른다.

이를 해결하기 위한 재귀 호출 기반의 알고리즘은 다음과 같다.

```
void hanoi(int n, int from, int to, int using)
{
  if (1==n)
    printf("%d->%d\n", from, to)
  else
  {
    hanoi(n-1, from, using, to);
    hanoi(1, from, to, using);
    hanoi(n-1, using, to, from);
  }
}
```

이러한 하노이의 탑 문제는 여러 가지 방향으로 확장이 가능하다. 이러한 확장들 중 가장 많이 연구되는 세 가지를 보도록 하겠다.

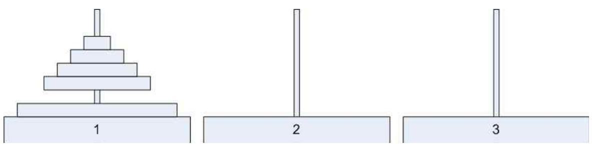

그림 1. 세 개의 기둥을 가진 하노이의 탑
Fig. 1. Tower of Hanoi with three pegs

2-1 기둥 수를 늘린 문제

하노이의 탑은 컴파일러의 재귀호출 테스트와 같은 다양한 용도로 활용되고 있다. 위 그림 1과 같이 기둥이 3개이고 디스크들이 하나의 스택인 기초적인 경우에 대해서는 (메르센 수)라는 최소 움직임의 개수가 이미 증명되어 있다. 그러나, 이 문제에서 추가로 기둥을 더한 문제, 즉 그림 2와 같이 기둥이 네 개 이상인 경우(기둥의 개수를 p라고 하면, p>3인 경우)와 같은 다기둥 하노이의 탑(Multi-Peg Tower of Hanoi) 문제에 대한 최소 움직임은 미해결 문제(open problem)이다. 이러한 최소 움직임을 제시하기 위한 알고리즘 중 하나인 프레임 스튜어트 알고리즘(Frame Stewart Algorithm)이 제시하는 최소 움직임의 개수인 프레임 스튜어트 가정(Frame Stewart Conjecture)은 현재 컴퓨터 알고리즘 연구에서 가장 악명 높은 미해결 문제들 중 하나이다[6,7,8].

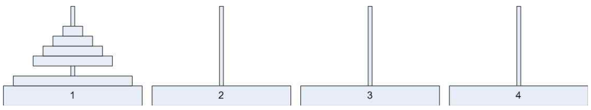

그림 2. 네 개의 기둥을 가진 하노이의 탑
Fig. 2. Tower of Hanoi with four pegs

프레임 스튜어트 가정에 따르면, 그림 2와 같이 네 개의 기둥(p=4)을 가진 하노이의 탑의 경우, 최소의 움직임을 간단히 소개하자면, 다음과 같은 점화식으로 나타내진다.

$$s_n = s_{n-1} + 2^x, s_1 = 1$$

위의 점화식을 풀면 다음과 같은 해가 나온다.

$$s_n = 1 + \left\{ n - \frac{1}{2}x(x-1) - 1 \right\} 2^x$$

여기서 x 는 다음과 같다.

$$x = \left\lfloor \frac{\sqrt{8n-7}-1}{2} \right\rfloor$$

르베의 퍼즐(Reve's puzzles) 이라고도 불리우는, 기둥이 네 개인 경우에 대한 하노이의 탑 문제는 그 문제의 모든 상태를 나타내는 그래프가 시에르핀스키 피라미드(사면체)와 비슷한 형태로 나타낼 수 있으며, 그 해법은 이 피라미드에 대해 너비 우선 탐색(Breadth First Search)이나 최소 가중치 패스를 찾는 데이크스트라(Dijkstra) 알고리즘을 통해 해결될 수 있다. 그러나 주어진 디스크들에 대해 그 생성되는 문제의 상태 공간이 매우 크기 때문에, 현재 가장 빠른 컴퓨터로도 최적의 해법을 검증하는 게 쉽지 않다. 프레임 스튜어트 알고리즘의 해법이 최적인지에 대한 컴퓨터에 의한 검증은, 현재 31 개의 디스크들까지만 완료된 상태이다[9].

2-2 디스크 스택의 수를 늘린 문제

하노이의 탑의 다른 확장으로는 n 개의 디스크를 하나의 집합으로 볼 때, 여러 개의 디스크 집합을 사용하는 다중 스택 하노이의 탑 (Multi-Stack Tower of Hanoi) 문제이다. 그림 3은 세 개의 기둥과 두 개의 스택을 가진 하노이의 탑 문제이다. 목표는 원래 문제의 조건들을 그대로 지키면서 양 쪽의 스택을 가운데로 모으는 것이다.

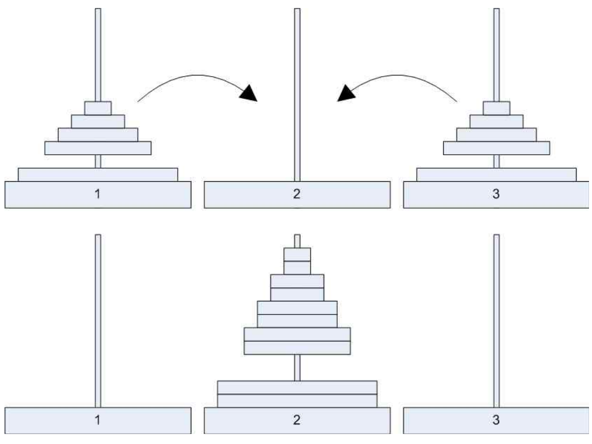

그림 3. 세 개의 기둥과 두 개의 스택을 가진 하노이의 탑
Fig. 3. Tower of Hanoi with three pegs and two stacks

참고로, 그림 3의 문제는 음악 그룹 UN의 전 멤버였던 연예인 김정훈이 등장한 일본의 모 TV 프로그

램에서도 등장한 적이 있다.

또한 빅터 마스콜로(Victor Mascolo)는 그림 4와 같이 네 개의 기둥을 가진 두 개 이상의 디스크들의 스택을 가지는 다중 스택 하노이의 탑을 개발하고, 이를 미국 특허 번호 7566057로 특허를 획득했다[10].

이러한 점들을 고려해 보면, 하노이의 탑 문제의 대중성과 상업적 가능성이 충분히 있음을 가늠할 수 있다.

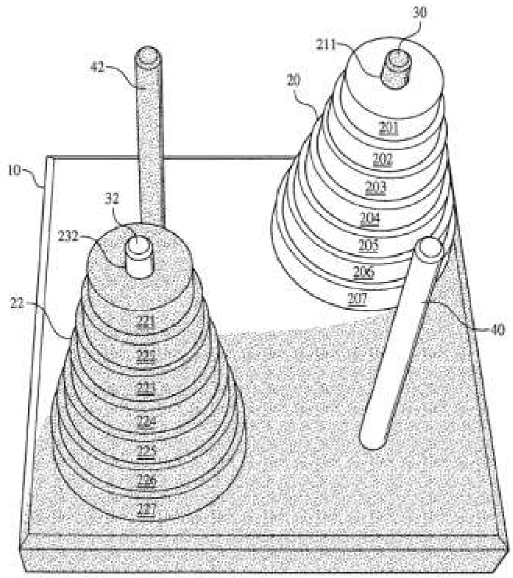

그림 4. 빅터 마스콜로의 네 개의 기둥과 두 개의 스택을 가진 하노이의 탑 [10]
Fig. 4. Victor Mascolo's Tower of Hanoi with four pegs and two stacks [10]

2-3 정규 상태에서 정규 상태로 가는 문제

세 번째 확장의 예는, 하노이 탑의 디스크들이 모두 한 기둥에 쌓여있는 경우에서 출발하여 다른 한 기둥으로 보내는 전통적인 문제가 아니라, 디스크들이 여러 기둥에 (기존의 조건을 그대로 지키면서) 임의로 쌓여 있는 경우에서 역시 디스크들이 (기존의 조건을 그대로 지키면서) 여러 기둥에 쌓여 있는 다른 경우로 옮기는 문제이다[2,11,12,13]. Hinz[11]의 정의에 따르면, 이는 디스크들이 한 쪽 기둥에만 쌓여있는 경우는 완전 상태(perfect state)이며, 디스크들이 기존의 조건을 지키면서 여러 기둥에 쌓여있는 경우는 정규 상태(regular state)로 규정한다. 이 문제는 저명한 인지심리학자이며 노벨상 수상자인 Simon[2]의 연구에 사용되었다. 그림 5는 이러한 세 개의 기둥을 가지는 하노이의 탑 문제의 정규 상태 문제를 Psychology Experiment Building Language (PEBL)로 구현한 것이다. 이 문제는 Simon이 했던 것처럼 현재도 인지심리 연구에 활발히 사용되고 있다.

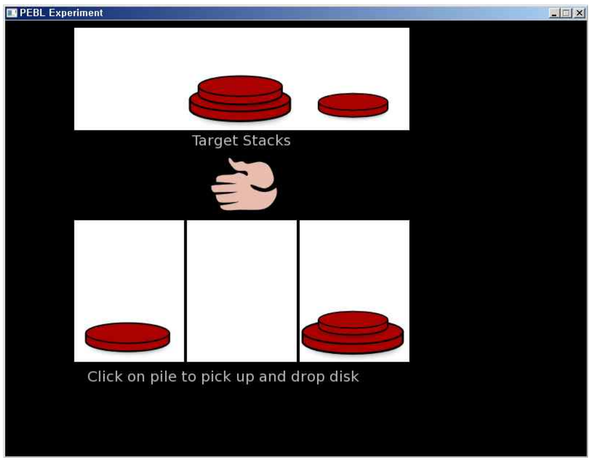

그림 5. PEBL 시스템의 테스트로 구현되어 있는 정규 상태 하노이의 탑 문제 (출처: PEBL 시스템)
Fig. 5. Regular state Tower of Hanoi as a test in PEBL system (from PEBL system)

이 문제를 컴퓨터 알고리즘으로 푸는 경우는 세 개의 기둥을 가지는 경우는 Hinz[11]에 의해서 비결정적 알고리즘(non-deterministic algorithm)이 주어졌고, Romik[13]이 이에 오토마타를 추가하여 결정적 알고리즘(deterministic algorithm)으로 해결하였다.

2-4 런던 탑 및 다른 탑 문제

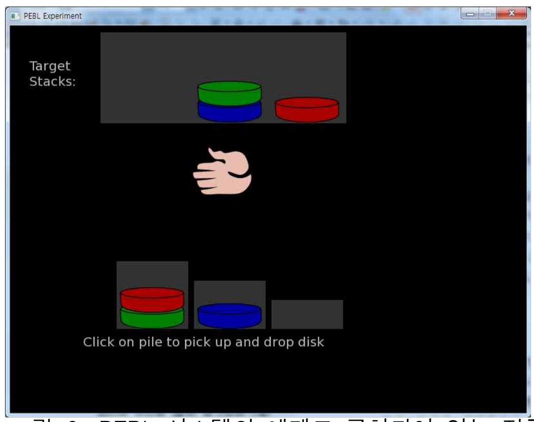

그림 6. PEBL 시스템의 예제로 구현되어 있는 정규 상태 런던 탑 문제 (출처: PEBL 시스템)
Fig. 6. Regular state Tower of London as a test in PEBL system (from PEBL system)

하노이의 탑 외에도 기존적인 가정을 조금씩 바꾼 문제들이 있다[14]. 대표적인 문제는 그림 6과 같은 런던 탑 (Tower of London; ToL) 문제이다. ToL의 경우 여러 변종이 있을 수 있지만, 대표적인 특징은 각각의 기둥들에 쌓을 수 있는 디스크들의 개수에 제한이 있고, 기존의 ToH가 가지고 있는 작은 디스크 위에 큰 디스크가 오지 못하는 이른바 디바인 룰이 없다는 것이다.

Ⅲ. 다기둥 하노이의 탑의 그래프

다기둥 하노이의 탑 (Multi-Peg Tower of Hanoi) 문제에서는 각각의 디스크들이 기둥에 놓여 있는 상태를 그래프의 노드로 표현하고 각 상태에서 다른 상태로 직접 이동할 수 있는 관계를 그래프의 링크로 표현함으로써 문제를 그래프로 시각화한다. 이러한 시각화 방법의 대표적인 방법으로 기둥의 개수가 3인 경우(p=3) 시에르핀스키 그래프 형태와 유사한 그래프 형태인 하노이 그래프가 가장 보편적으로 많이 사용된다. 또한 p > 3인 경우에도 시에르핀스키와 연관된 형태로 해석해서 그래프를 도식화하려는 경향이 있다. 여기에는 대표적으로 시에르핀스키 카펫(Sierpiński carpet)의 형태와 시에르핀스키 피라미드 형태가 대표적이다.

3-1 다기둥 하노이의 탑 문제

형식적으로 다기둥 하노이 탑 문제를 다시 살펴보면, p개의 기둥에 대해 n개의 디스크를 옮기는 문제로 볼 수 있다. 일반적인 경우를 보면 그림 7에 나타낸 것과 같이 (n, p) 공간에서 n은 1보다 크면서 p가 2보다 큰 경우에 하노이 탑 문제가 정의된다.

이 때 기둥이 디스크 개수보다 많지 않은 경우(n>p 또는 n=p)에 대해 최소의 움직임을 고민해야 하는 경우(그림 7에서 원으로 나타낸 부분)이고, 그렇지 않은 경우(n<p)에는 단순하게 해결된다(그림 7에서 사각형으로 나타낸 부분). 즉, 기둥이 디스크보다 많아지면 디스크를 각각의 빈 기둥에 옮겨서 기둥마다 하나의 디스크가 되게 만든 후(n-1번 옮김) 가장 큰 디스크를 옮긴다(+1번). 그리고 다시 각 기둥의 디스크를 반대로 쌓아 올리면 된다(n-1번). 따라서 기둥의 수가 디스크의 수보다 많은 경우 최소의 움직임은 다음과 같다.

$$(n-1)+1+(n-1)=2n-1,\ p>n, p>2, n>1$$

기둥의 수가 디스크의 수보다 많지 않은 경우에는 최소의 움직임은 Frame-Stewart 넘버 S(n, p)로 알려져 있고 다음과 같다.

$$s(n,p)=\min\{2S(n_1,p)+S(n-n_1,p-1)|n,n-n_1\in Z+\}$$

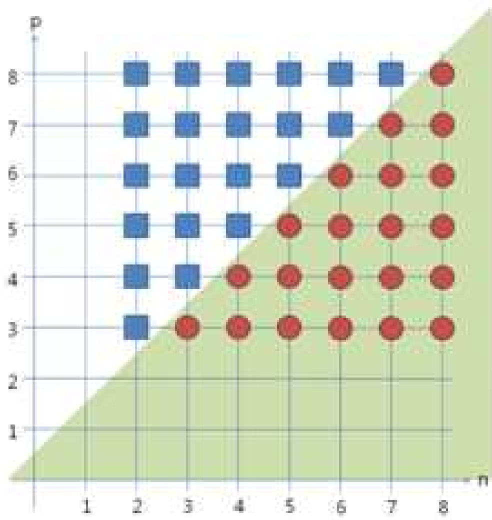

그림 7. 디스크 수 n과 기둥의 수 p에 따라 하노이 탑 문제를 (n, p)공간에 표시
Fig. 7. Tower of Hanoi problems by the number of disks (n) and the number of pegs (p) displayed in (n,p) space

3-2 시에르핀스키 그래프와 하노이 그래프

하노이 탑 문제(p=3인 경우)에 대해서는 하노이 그래프가 가장 대표적인 시각화 방법이고 디스크의 수 n이 증가 함에 따라 시에르핀스키 그래프와 유사한 형태로 그래프가 만들어 진다. 그림 8에서 시에르핀스키 그래프와 하노이 그래프를 비교하여 나타내었다. 기본적으로 삼각형 형태가 차수가 증가함에 따라 재귀적으로 형태가 만들어진다는 점은 유사하나 노드의 수와 에지의 수가 전혀 다르게 구성됨을 알

수 있다. 이제 시에르핀스키 그래프와 하노이 그래프를 비교해 보면 어떤 차이가 있는지 설명하겠다.

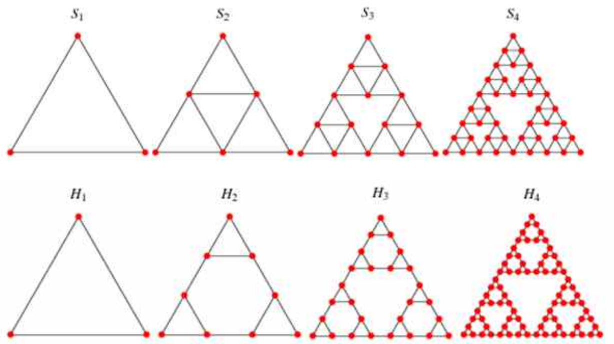

그림 8. 시에르핀스키 그래프와 하노이 그래프
Fig. 8. Sierpiński graph and Hanoi graph

n차의 시에르핀스키 그래프는 시에르핀스키 체(sieve)의 연결로부터 얻어진다. 1차부터 4차 시에르핀스키 그래프까지 그림 8에 나타내었다. n차 시에르핀스키 그래프 Sn은 $3(3^{n-1}-1)/2$ 개의 정점으로 구성되며 3n개의 에지를 갖는다. 반면, 하노이 그래프는 기둥의 수가 p=3이고 디스크의 수가 n인 경우 ToH 문제에서 이동 가능한 움직임에 해당하는 그래프다. 그림 8에는 n이 1에서 4인 경우의 하노이 그래프를 나타내었다. 그래프 Hn은 3n개의 정점과 3(3n-1)/2개의 에지로 구성된다.

이렇게 p=3인 경우의 하노이의 탑 문제가 시에르핀스키 그래프와 유사한 형태임이 알려지자 자연스럽게 시에르핀스키의 다른 형태들과 연관성을 찾기 시작하였다. 그림 9에서는 시에르핀스키와 연관된 시에르핀스키 카펫과 시에르핀스키 피라미드를 나타내었다. 시에르핀스키 카펫은 삼각형에서 사각형 형태로 적용한 경우고 시에르핀스키 피라미드는 3차원 형태로 적용한 경우다.

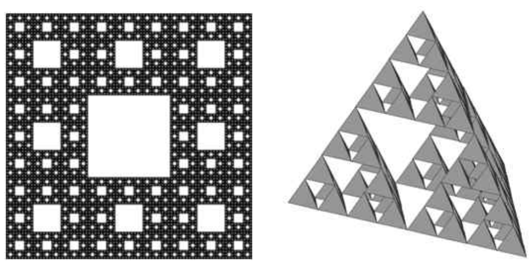

그림 9. 시에르핀스키 카펫과 시에르핀스키 피라미드
Fig. 9. Sierpiński carpet and Sierpiński pyramid

시에르핀스키 카펫이나 시에르핀스키 피라미드에 그래프를 맞춰 시각화시키려고 시도한 예를 들면 [15]가 있고 그림 10에 나타내었다. p=4인 경우에 대해 시에르핀스키 카펫의 형태나 시에르핀스키 피라미드에 맞춰 그래프를 생성한 경우다.

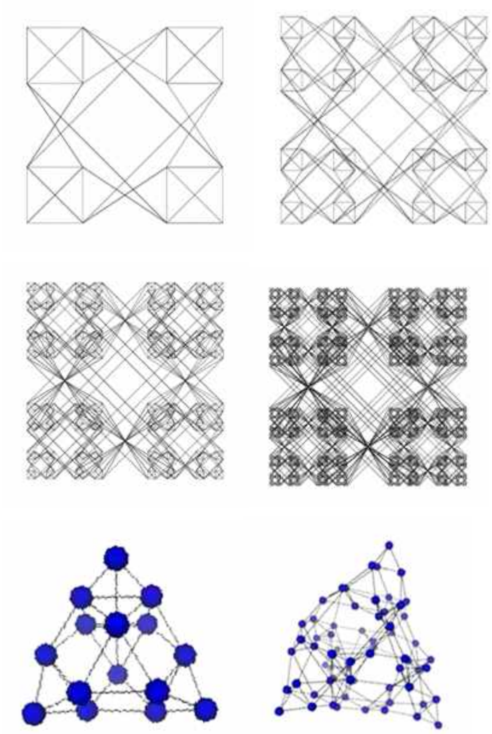

그림 10. 시에르핀스키 카펫과 시에르핀스키 피라미드와 유사한 형태로 그래프를 시각화한 경우
Fig. 10. Graph visualization in a similar way of Sierpiński carpet and Sierpiński pyramid

IV. 제안된 상태 그래프

본 논문에서는 디스크의 개수 n이 증가함에 따라서 표시되는 차원이 증가하는 형태로 하노이의 탑의 상태를 표현하고자 한다. 기존의 시에르핀스키 형태에 맞추어 시각화하려는 방법에서 탈피하여 하노이 탑의 문제를 접근할 수 있게 하고자 한다.

4-1 직교 좌표 방식의 상태 노드 표시

하노이 탑 문제의 상태를 표현하는 방법은 다양하다. 각 기둥에 대해 놓여 있는 디스크의 번호를 표시하는 방법을 사용하기도 하지만 작은 디스크가 큰 디

스크 위에 항상 놓인다는 가정을 이용하면 큰 디스크부터 현재 놓여 있는 기둥의 번호를 순서대로 적는 방법으로 상태를 구분할 수 있다. 본 논문에서는 사용하는 기둥에 A, B, C 순서로 알파벳 문자를 부여하여 상태를 구분하는 방법을 사용할 것이다. 이렇게 하면 상태는 디스크의 개수 n에 따라 n개의 알파벳 문자로 표현할 수 있으며 사용할 수 있는 알파벳의 종류는 기둥의 개수 p에 따라 결정된다. 따라서 n개의 디스크와 p개의 기둥을 사용한 하노이 탑의 문제는 pn개의 상태로 표현할 수 있다. 이렇게 표시할 경우 n차원의 직교 좌표 형태로 상태 노드들이 배열되며 각 차원에서 p개의 좌표가 구분되어 나타나게 된다.

그림 11은 n=2인 경우의 예를 나타내며 x축 방향이 큰 디스크가 현재 위치하고 있는 기둥을 나타내며 y축 방향이 작은 디스크가 현재 위치하고 있는 기둥을 나타낸다. 따라서 2차원의 직교 좌표의 형태를 갖게 된다. 이 경우 p가 증가하더라도 각 축 방향으로 좌표만 추가되기 때문에 차원이 증가하지는 않는다. 그림 12에서는 n=3인 경우를 나타내며 디스크 하나마다 하나의 축을 할당하기 때문에 3차원이 된다. 그림 12에서는 3차원을 orthographic 프로젝션 방법으로 표시하고 있다. Perspective 프로젝션을 사용할 경우의 예는 그림 13에 나타내었다.

그래프에서 인접한 상태 노드들 간에 링크로 서로 모두 연결된 경우에는 각각의 노드가 연결된 상태를 독립된 선으로 표시하면 링크의 수가 증가하면서 가독성이 떨어지게 된다. 따라서 인접한 상태 노드가 서로 모두 연결된 경우에는 하나의 선으로 연결한 후 상태 노드를 원으로 감싸서 표시하는 방법을 사용해서 표시하기로 한다. 그림 14에서 왼쪽은 AA와 AB가 연결되어 있고 AB와 AC가 연결되어 있고 AA와 AC도 연결된 상태를 나타내며 오른쪽은 같은 연결상태를 하나의 직선과 원으로 표시한 것이다. 오른쪽의 표시 방법이 상태 노드가 많아져서 링크가 많아질 경우 링크를 보다 간결하게 표시할 수 있다.

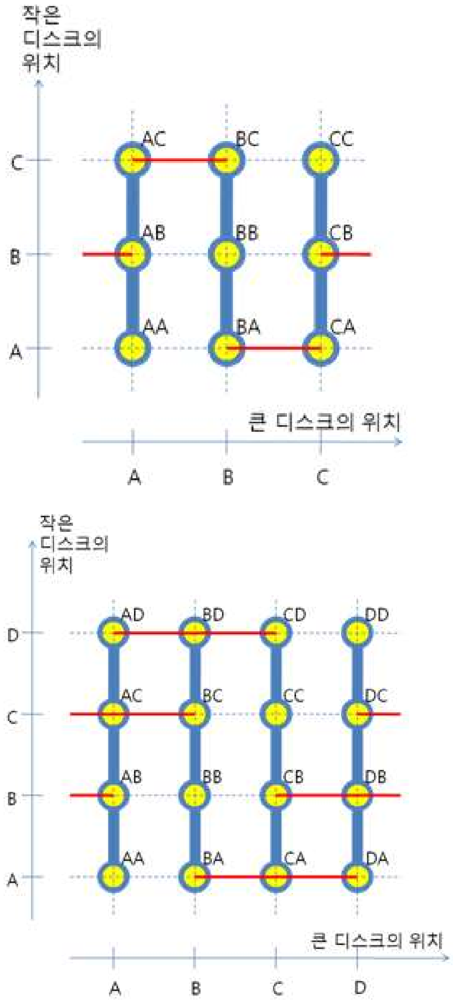

그림 11. n=2인 경우 제안된 방법으로 상태를 표시한 예 (상: p=3, 하: p=4)

Fig. 11. Proposed visualization of states when n=2 (the upper graph: p=3, the lower graph: p=4)

4-2 기존의 방법과 제안된 시각화 방법의 비교

하노이 그래프로 ToH 문제를 시각화하는 방법의 단점은 그래프의 노드의 배치에서 방향이 기둥의 위치와 연관성이 없다는 점이다. 반면 제안된 방법은 각 디스크가 현재 위치하고 있는 기둥이 2차원이나 3차원 공간에서 각 축 방향(x, y, z)으로 배치되기 때문에 이웃하는 상태가 수평, 수직으로 나타나기 때문에 항상 링크가 축과 평행한 방향으로 만들어지며 상태의 변화가 직관적으로 이해하기 쉽다.

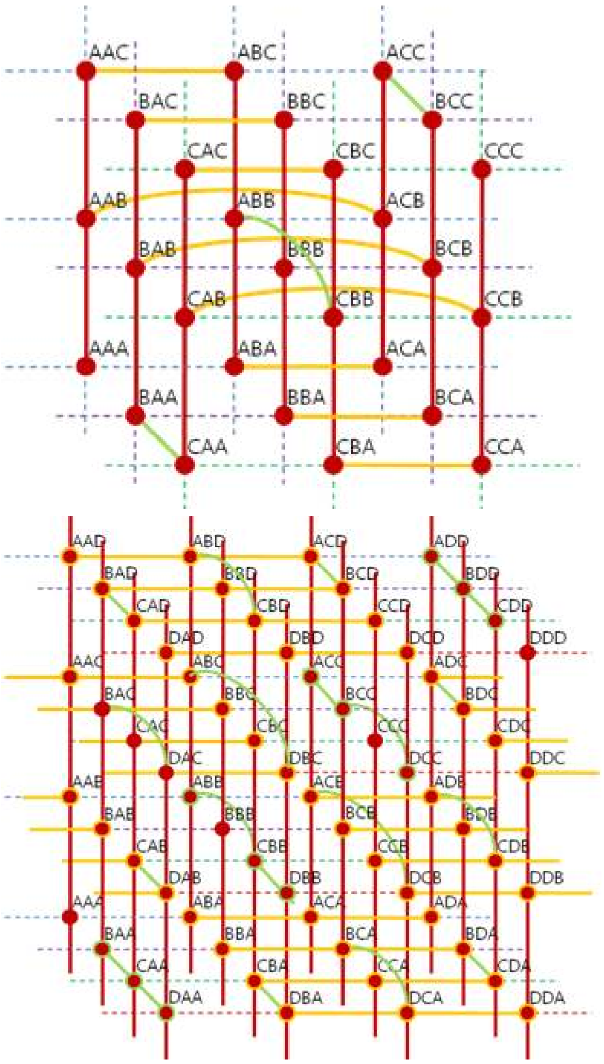

그림 12. n=3인 경우 제안된 방법으로 상태를 표시한 예(위: p=3, 아래: p=4)

Fig. 12. Proposed visualization of states when n=3 (the upper graph: p=3, the lower graph: p=4)

V. 결 론

본 논문에서는 기존의 하노이의 탑 문제와 관련되어 상태를 표시하는 방법으로 주로 사용되어 왔던 시에르핀스키 그래프의 형태와 다른 새로운 형태의 시각화 방안을 제안하였다. 기존의 시각화 방안은 p=3인 경우가 시에르핀스키 그래프와 유사하다는 점 때문에 이후 p>3인 일반적인 경우의 문제의 경우에도 시에르핀스키와 관련된 시각화 방법으로만 접근해 왔다. 그러나 하노이 그래프는 n의 크기와 p의 크기에 따라 상태가 정해지는 형태로 일반적인 (n, p)에 대해서는 시에르핀스키로 해석하는 것이 무리가 있다. 제안된 방법은 디스크의 개수에 따라 차원이 증가하고 기둥의 수에 따라 축 방향으로 개수만 증가하는 형태의 하노이 그래프에 대해 제안하고 n이 2인 경우와 3인 경우에 시각화 하는 방법을 제시하였다. n이 4이상인 경우에 대한 시각화는 4차원의 그래프이므로 이를 다시 2차원이나 3차원의 형태로 표현하는 방법을 고려할 수 있다.

향후 연구 방향으로는 런던 탑 문제(ToL)나 유사한 문제에 대한 시각화를 고려해 볼 수 있다.

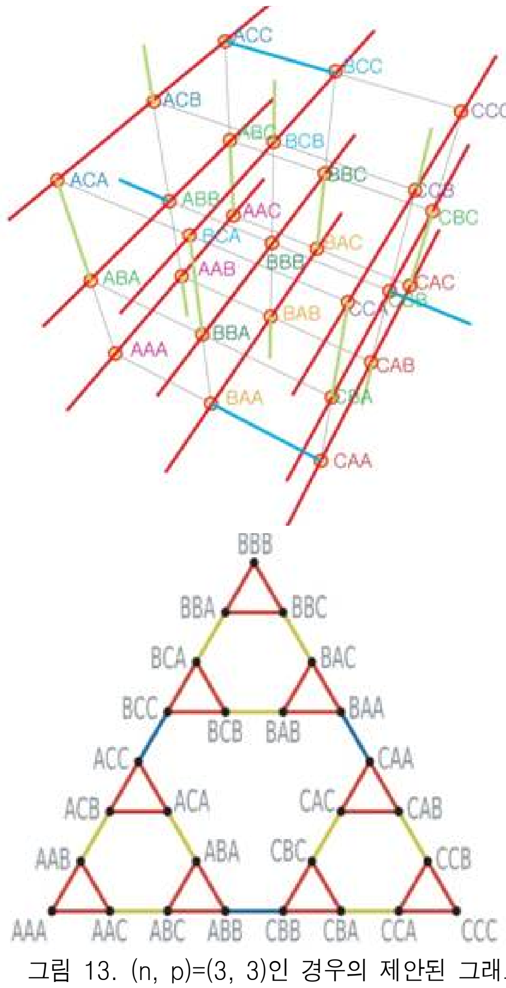

그림 13. (n, p)=(3, 3)인 경우의 제안된 그래프와 기존의 하노이 그래프

Fig. 13. The proposed graph and Hanoi graph when (n,p)=(3,3)

그림 14. 노드들이 서로 연결된 경우 표시 방법

Fig. 14. Proposed notation when all the nodes are fully connected

참 고 문 헌

[1] É. Lucas, “Nouveaux Jeux Scientifiques de M. Édouard Lucas,”, *La Nature, 17, 2e semestre,* pp. 301-303, 1889.

[2] A. Newell, H. A. Simon, Human problem solving, Englewood Cliffs, NJ: *Prentice-Hall*, 1972.

[3] M. Faloutsos, P. Faloutsos and C. Faloutsos, “On power-law relationships of the Internet topology,” *ACM SIGCOMM Computer Communication Review, 29(4),* 1999.

[4] J.-P. Bode, A. M. Hinz, “Results and Open Problems on the Tower of Hanoi,” *Congressus Numerantium, 139*, pp. 113-122, 1999.

[5] P. K. Stockmeyer, “Variations on the Four-Post Tower of Hanoi Puzzle,” *Congressus Numerantium, 102,* pp. 3-12, 1994.

[6] J. S. Frame, B. M. Stewart, “A Solution to Monthly Problem 3918 [1939, p.363],” *American Mathematical Monthly, 48*, pp. 216-219, 1941.

[7] X. Chen, J. Shen, “On The Frame-Stewart Conjecture about the Towers of Hanoi,” *Siam Journal of Computing, 33(3)*, pp. 584-589, Mar. 2004.

[8] A. M. Hinz, “An Iterative Algorithm for the Tower of Hanoi with Four Pegs,” *Computing, 42,* pp. 133-140, 1989.

[9] R. E. Korf, “Linear-Time Disk-Based Implicit Graph Search,” *Journal of the ACM, 55(6), Article 26,* pp. 1-40, Dec. 2008.

[10] V. Mascolo, “Stacking puzzle and method for playing same,” *United States Patent #7566057*, 2009.

[11] A. M. Hinz, “Shortest Paths Between Regular States of the Tower of Hanoi,” *Information Sciences, 63,* pp. 173-181, 1992.

[12] D. G. Poole, “The Towers and Triangles of Professor Claus (or, Pascal Knows Hanoi),” *Math. Mag. 67,* pp. 323-344, 1994.

[13] D. Romik, “Shortest Paths in the Tower of Hanoi and Finite Automata,” *Siam Journal of Discrete Math, 20(3),* pp. 610-622, Aug. 2006.

[14] A. M. Hinz, A. Kostav, F. Kneißl, F. Sürer, A. Danek, “A Mathematical Model and a Computer Tool for the Tower of Hanoi and Tower of London Puzzles,” *Information Sciences, 179,* pp. 2934-2947, 2009.

[15] Ben Houston and Hassan Masum. "Explorations in 4-peg Tower of Hanoi." *Carleton University Technical Report TR-04-10,* November 2004.

조 청 운 (趙靑雲)

1992년 2월 : 중앙대학교 전자계산학과 졸업
1994년 2월 : 중앙대학교 컴퓨터공학과 석사
2000년~2003년 : 중앙대학교 첨단영상대학원 영상공학과 연구교수
2004년～현재 : 동서대학교 디지털콘텐츠학부 조교수
관심분야: 컴퓨터 그래픽스

강 대 기 (姜大基)

1992년 2월 : 한양대학교 전자계산학과 졸업
1994년 2월 : 서강대학교 전자계산학과 석사
1994년~1999년 : 한국전자통신연구원 연구원
2006년 : Iowa State University (PhD in Computer Science)
2007년2월～2007년8월 : 국가보안기술연구소(선임연구원)
2007년9월～현재 : 동서대학교 컴퓨터정보공학부 조교수
관심분야: 기계학습, 관계학습, 통계적그래피컬모델, 온톨로지학습, 소셜 네트워크 서비스 및 게임, 행위자 연결망 이론, 침입탐지, 웹방화벽, 웹마이닝, 하노이의 탑, 컴퓨터비전