

Misalignment가 있는 유한한 선접촉 EHL 문제의 수치해석

박 태 조*

경상대학교 기계항공공학부·공학연구원

Numerical Analysis of Misaligned Finite Line Contacts EHL Problem

Tae-Jo Park[†]

School of Mechanical & Aerospace Engineering, ERI, Gyeongsang National University
(Received July 25, 2010; Revised August 14, 2010; Accepted August 15, 2010)

Abstract – The rollers of cylindrical roller bearing are axially profiled to relieve high edge stress concentration caused by mainly their finite length and by misalignment. In this paper, a numerical analysis is carried to study the EHL of misaligned (tilted) rollers with axially profiled ends. Using a finite difference method with non-uniform grids and the Newton-Raphson method, the highly nonlinear EHL problems are systematically solved. Physically consistent solutions are obtained for moderate load, material parameters and very small misalignment. For different misalignment angles, contours and sectional plots of pressure and film shape near both edge regions are compared. The asymmetric pressure distributions and film shapes show that the EHL results of finite line contacts are highly dependent upon very small amounts of roller misalignment. Especially, the effect of misalignment on the EHL pressure distribution is much higher than the film shapes.

Keywords – EHL, finite line contact(유한한 선접촉), roller profile(로울러 프로파일), misalignment, Newton-Raphson method(뉴우튼-랩슨 방법)

1. 서 론

원통 및 테이퍼 로울러 베어링의 로울러는 길이가 유한하고 베어링이 지지하는 축의 Misalignment 등으로 인하여 로울러 양단부에는 아주 높은 응력이 작용한다. 실제에서는 이로 인한 수명저하를 방지하기 위하여 로울러의 길이방향으로 프로파일링(Profiling)하고 있다. 지금까지 로울러의 프로파일을 결정하는 이론적인 방법은 탄성접촉해석으로 로울러 양단부에서의 접촉압력이 국부적으로 크게 되지 않도록 하는 것이다[1]. 하지만 베어링은 탄성유체윤활(EHL) 상태로 운전되기 때문에 로울러에 작용하는 응력은 탄성접촉인 경우와 크게 차이가 날 뿐만 아니라 베어링의 피로수명에 큰 영향을 미치는 최소유막의 크기는 추정할 수가 없다. 따라서, 피로수명이 최대인 최적의 로울러 프로파일을 설계하기

위해서는 EHL 해석이 요구된다.

Dowson & Higginson[2]이 무한장으로 가정한 선접촉 문제의 해석에 성공한 이후, 지난 반세기 동안 EHL 문제에 대하여 집중적인 연구가 수행되었다. 하지만 대부분이 무한장 선접촉이거나 타원접촉[3] 문제이며, 로울러 베어링과 같이 접촉길이가 유한한 선접촉 문제에 대한 연구는 극소수에 불과한 실정이다. 이는 탄성접촉 부의 폭에 비하여 길이가 100배 정도이어서 실험뿐만 아니라 수치해석도 아주 어렵기 때문이다[4]. Optical interferometry를 사용하여 유막형상을 성공적으로 측정 한 Wymer & Cameron[5]의 결과에서 최소유막은 항상 로울러 양단부에서 발생하며, 이의 크기는 프로파일에 따라서 큰 차이를 보였다. Mostofi & Gohar[6]는 참고 문헌[3]의 수치해석 방법을 사용하여 프로파일링을 한 로울러에 대한 EHL 문제를 처음으로 해석하였지만 해석과정이 시행착오적이기에 수렴해를 구하기가 어려울

[†]주저자 · 책임저자 : tjpark@gnu.ac.kr

뿐만 아니라 해석결과도 물리적으로 타당하지 않았다. 한편, Park & Kim[7-10]은 유한한 선접촉 EHL 문제 해석에 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 처음으로 적용하여 체계적이고도 정확하게 해석하였다. 특히, 균일한 격자계를 사용한 참고문헌[6]과는 달리 상대적으로 소수인 불균일한 격자를 적용하고도 물리적으로 타당한 결과를 구하였다[10]. 또한, 본 논문의 저자[11]는 프로파일의 미세한 차이가 양단부에서의 EHL 특성에 는 아주 큰 영향을 미침을 보였다.

만일, 로울러에 Misalignment가 작용하면 로울러 길이방향의 EHL 압력분포는 중앙에 대하여 비대칭[12]이기 때문에 수치해석은 더욱 어려울 것으로 예상된다. 이러한 이유 등으로 지금까지 이 문제에 대한 수치해석은 Kushwaha 등[13]의 연구가 유일하다. 그들은 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 적용한 결과, Misalignment는 EHL 압력분포와 유막형상을 크게 변화시키며, 특히, 최소유막두께의 크기는 크게 감소시켰다. 하지만 균일한 격자계를 채용하였기에 양단부에서의 압력분포와 유막형상은 부정확하였다. 이와 같이 지금까지의 결과로는 Misalignment가 EHL 특성에 미치는 영향을 정확하게 이해하기에는 자료가 너무나 부족한 실정이다.

본 논문에서는 프로파일링을 한 원통형 로울러에 Misalignment가 작용하는 경우에 대한 EHL 문제를 수치해석하고자 한다. 이때, 불균일한 격자계를 채용한 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하여 Misalignment 각도의 변화에 따른 로울러 양단부 부근에서의 EHL 특성변화를 중점적으로 조사하였다.

2. 지배방정식

2-1. 레이놀즈 방정식

로울러의 구름방향이 x방향일 때, 유막내에서 발생하는 EHL 압력은 다음의 레이놀즈 방정식을 만족시킨다[2,3].

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12u \frac{\partial(\bar{\rho} h)}{\partial x} \quad (1)$$

여기서, u 는 로울러와 궤도면의 구름방향 평균속도이다.

$$X = x/R, Y = y/R, P = p/E, H = h/R, \rho = \bar{\rho}/\rho_0,$$

$\eta = \bar{\eta}/\eta_0, U = \eta_0 u/ER$ 과 같은 무차원변수를 사용하여 식(1)을 무차원화하면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 12U \frac{\partial(\rho H)}{\partial X} \quad (2)$$

2-2. 윤활유의 상태방정식

EHL 상태에서는 압력에 따라서 윤활유의 점도와 밀도가 변화하므로 이들의 무차원식으로 표현하면 각각 다음식과 같다[2].

$$\eta = \exp(GP) \quad (3)$$

$$\rho = 1 + \frac{0.58EP}{1+1.68EP} \quad (4)$$

여기서, $G = \alpha E$ 이고 E 의 단위는 [GPa]이다.

2-3. 유막두께식

EHL 상태에서의 유막두께는 다음식과 같이 정의할 수 있다[3].

$$h(x, y) = h_o + h_g(x, y) + h_d(x, y) \quad (5)$$

여기서, h_o 는 상수, $h_g(x, y)$ 와 $h_d(x, y)$ 는 각각 로울러의 형상에 따른 유막과 발생압력에 의한 탄성변형량이다.

Fig. 1과 같이 Dub-off 프로파일링을 한 로울러가 반시계방향으로 θ 만큼 Misaligned된 경우에 $h_g(x, y)$ 는 다음식과 같이 나타내어진다.

$$h_g(x, y) = \frac{x^2}{2R} + y \tan \theta + \frac{(b_1 - y_d)^2}{2R_d} \quad (6)$$

여기서, 프로파일링을 하지 않은 위치에서는 마지막 항의 값은 0이다.

한편, Fig. 2와 같이 크기가 $(b_1 + b_2) \times (a_1 + a_2)$ 인 사각형 미소압력요소에 의한 (\bar{x}, \bar{y}) 점에서의 탄성변형량은

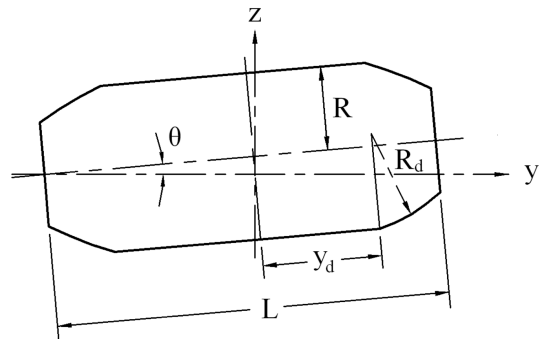


Fig. 1. Misaligned dub-off profiled cylindrical roller.

다음식으로 구할 수 있다.

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{2}{\pi E} \int_{-a_1}^{a_2} \int_{-b_1}^{b_2} \frac{p(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(\bar{x}-x_1)^2 + (\bar{y}-y_1)^2}} \quad (7)$$

만일, 미소압력요소내의 압력이 일정하다면 위식은 해석적으로 적분할 수 있으며, 다음과 같이 표현된다 [9,10,14].

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) = P\bar{D} \quad (8)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \bar{D} = \frac{2}{\pi} & \left[(\bar{x}+b_1) \ln \left(\frac{\bar{y}+a_1 + \sqrt{(\bar{x}+b_1)^2 + (\bar{y}+a_1)^2}}{\bar{y}-a_2 + \sqrt{(\bar{x}+b_1)^2 + (\bar{y}-a_2)^2}} \right) \right. \\ & + (\bar{x}-b_2) \ln \left(\frac{\bar{y}-a_2 + \sqrt{(\bar{x}-b_2)^2 + (\bar{y}-a_2)^2}}{\bar{y}+a_1 + \sqrt{(\bar{x}-b_2)^2 + (\bar{y}+a_1)^2}} \right) \\ & + (\bar{y}+a_1) \ln \left(\frac{\bar{x}+b_1 + \sqrt{(\bar{x}+b_1)^2 + (\bar{y}+a_1)^2}}{\bar{x}-b_2 + \sqrt{(\bar{x}-b_2)^2 + (\bar{y}+a_1)^2}} \right) \\ & \left. + (\bar{y}-a_2) \ln \left(\frac{\bar{x}-b_2 + \sqrt{(\bar{x}-b_2)^2 + (\bar{y}-a_2)^2}}{\bar{x}+b_1 + \sqrt{(\bar{x}+b_1)^2 + (\bar{y}-a_2)^2}} \right) \right] \quad (9) \end{aligned}$$

따라서, 중첩의 원리를 적용하면 임의위치에서의 탄성변형량은 다음식과 같이 나타낼 수 있다[3].

$$h_d(x, y) = \sum_k \sum_l \bar{D}_{i,j,k,l} P_{k,l} \quad (10)$$

여기서, 하첨자 i, j 는 (x, y) 에서의 격자번호이며, $\bar{D}_{i,j,k,l}$ 는 영향계수로 (k, l) 에서의 단위압력요소 에 의한 (i, j) 에서의 탄성변형량을 나타낸다.

따라서, 식(5)는 다음과 같은 무차원형태로 표현할 수 있다.

$$H(X, Y) = H_o + \frac{X^2}{2} + Y \tan \theta + \frac{(|Y| - Y_d)^2}{2R_d^*} \sum_k \sum_l D_{i,j,k,l} P_{k,l} \quad (11)$$

여기서, $Y_d = y_d/R$, $R_d^* = R_d/R$, $\bar{D}_{i,j,k,l}/R$ 이다.

2.4. 하중조건식

로울러에 작용하는 하중은 다음식과 같이 유막내에서 발생하는 유체압력의 합과 동일하다.

$$w = \iint p \, dx \, dy \quad (12)$$

위의 식은 다음과 같이 무차원화된다.

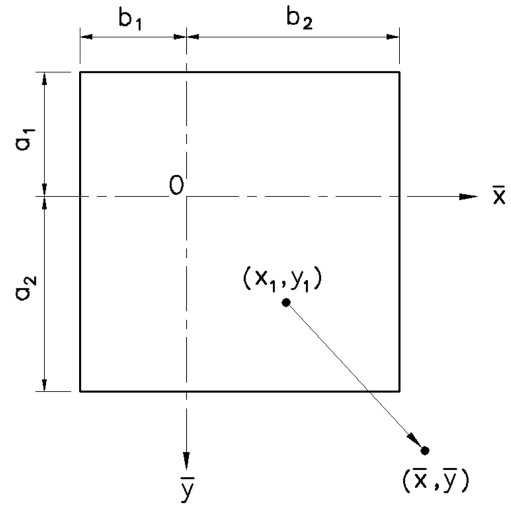


Fig. 2. Pressure element and local coordinates.

$$W = \frac{w}{ER^2} = \iint P dX dY \quad (13)$$

2.5. 경계조건

계산영역의 전경계에서는 $P=0$ 이며, 구름방향 출구측에는 다음식으로 표현되는 레이놀즈의 경계조건을 만족한다.

$$P = \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (14)$$

3. 수치해석

본 논문에서는 참고문헌[9-12,14]에서와 동일하게 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하여 수치해석하고자 한다.

불균일한 격자계를 사용하는 경우, 식(2)의 유한차분 형태는 다음식과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} f_{i,j} = & \frac{\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j}^3 (P_{i+1,j} - P_{i,j})}{\Delta X_i \eta_{i+1/2,j}} - \frac{\rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}^3 (P_{i,j} - P_{i-1,j})}{\Delta X_{i-1} \eta_{i-1/2,j}} \\ & + \frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \left[\frac{\rho_{i,j+1/2} H_{i,j+1/2}^3 (P_{i,j+1} - P_{i,j})}{\Delta Y_j \eta_{i,j+1/2}} \right. \\ & \left. - \frac{\rho_{i,j-1/2} H_{i,j-1/2}^3 (P_{i,j} - P_{i,j-1})}{\Delta Y_{j-1} \eta_{i,j-1/2}} \right] \end{aligned}$$

$$-12U[(\rho_{i+1/2,j}H_{i+1/2,j}-\rho_{i-1/2,j}H_{i-1/2,j})]=0 \quad (15)$$

$$(i=2, \dots, M_j, j=2, \dots, N-1)$$

여기서, M_j 는 $Y=Y_j$ 에서 식(14)를 만족시키는 X 방향 격자의 수이고, N 은 전체 Y 방향격자의 수이다[9,10].

식(15)에서 미지수인 P_i 와 H_o 를 구하기 위하여 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하면 다음과 같다.

$$\sum_k \sum_l \left(\frac{\partial f_{i,j}}{\partial P_{k,l}} \right)^n (P_{k,l}^{n+1} - P_{k,l}^n) + \left(\frac{\partial f_{i,j}}{\partial H_o} \right)^n \cdot (H_o^{n+1} - H_o^n) + f_{i,j} = 0 \quad (16)$$

한편, 식(13)은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$W = \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{M_j} \sum_{j=2}^{N-1} P_{i,j} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i) (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j) \quad (17)$$

따라서, 식(16)과 식(17)에서 미지수와 식의 수가 같으므로 해석이 가능하다.

본 논문에서는 계산영역의 크기에 따라 해석결과가 영향을 받지 않도록 하기 위하여 가능하면 이를 넓게 두었다. 이에 따라 구름방향 입구부와 출구부 경계는 각각 $X=-5.0$ 와 $X=2.5$ 에, 측면부 경계는 $Y=\pm 0.715$ 에 위치시켰으며, 사용한 격자의 수는 최대 88×31 개이다. 수치해석 과정과 수렴조건은 참고문헌[9-12,14]과 거의 동일하다.

4. 결과 및 고찰

본 논문에서 결과제시에 사용한 자료는 다음과 같다: $R_d^* = 0.3$, $|Y_d| = 0.7$, $U = 2 \times 10^{-11}$, $G = 2,500$, $W = 1.5 \times 10^{-5}$, $E = 200 \text{ GPa}$.

Fig. 3은 Misaligned 로울러에 대한 EHL 해석결과를 설명하기 위한 유막의 등고선상의 주요단면 위치를 나타낸 그림으로 $Y=0$ 에 대해서 좌우가 비대칭이다. 여기서, 단면1-1과 단면2-2는 구름방향으로 각각 최소유막두께 H_m 과 최대압력이 발생하는 위치를 각각 통과하며, 단면3-3은 H_m 을 통과하는 로울러 길이방향으로의 단면이다.

Fig. 4와 Fig. 5에는 Misaligned 각도가 서로 다른 경우에 대한 로울러 양단부 부근에서의 EHL 압력의 등압선과 유막의 등고선을 각각 나타내었다. 여기서, Fig. 4(a)와 Fig. 5(a)는 Misalignment가 없는 경우에 대한 결과로 압력분포와 유막형상은 로울러 길이방향으로 서로 대칭이며, 최대압력과 최소유막은 로울러의 길이방향 중앙부가 아니라 양단부 부근에서 발생하고

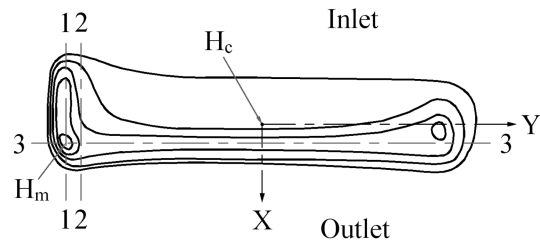


Fig. 3. Film contour sections for misaligned finite line contacts.

있다[9-11]. 특히, 양단부에서는 유한한 선접촉 EHL 문제의 대표적인 특징으로 잘 알려져 있는 “Dog bone” 형상의 유막이 나타나고 있다. 하지만 로울러가 Misaligned되면 길이방향의 기하학적 유막두께가 $Y=0$ 에 대해서 비대칭이기 때문에 EHL 결과는 크게 달라질 것으로 예상할 수 있다. 즉, Fig. 4(b) & (c) 및 Fig. 5(b) & (c)에 나타낸 것과 같이 Misalignment 작용시 유막두께가 작아지는 좌측단(Tilted edge)에서는 이의 각도가 아주 미세함에도 불구하고 아주 높은 EHL 압력이 발생하며, Fig. 5(a)에 비하여 “Dog bone” 형상이 더욱 선명하게 되었다. 특히, 구름방향 출구측에서는 아주 높은 압력 Spike가 발생하였다. 한편, Misalignment로 인하여 유막두께가 상대적으로 크게 된 우측단(Lifted edge)으로는 윤활유가 쉽게 유출되므로 발생압력은 크게 낮아진다. 결과적으로, Misalignment가 작용할 경우에는 EHL 압력에 비하여 유막형상의 변화가 상대적으로 작게 나타나는 것이 주목할 만한 특징으로서 이와 같은 결과는 다음으로 설명할 수 있다. 즉, Misalignment는 우측단에서의 기하학적 유막두께를 크게 한다. 하지만 낮은 EHL 압력은 탄성변형을 크게 하지 않기 때문에 결과적으로 유막두께는 상대적으로 크게 변화하지 않는다(식(11) 참조). 한편, Misalignment가 작용하는 경우, Kushwaha 등[13]은 로울러 양단부 부근에서 “Pressure pips”와 “Islands of minimum film thickness”라는 특이한 현상이 발생한다고 보고하였다. 하지만 이는 그들이 사용한 격자의 수가 본 논문에서 보다 한층 많음에도 불구하고 균일한 격자계와 이로 인한 양단부 부근에서는 격자간격이 조밀하지 못했기 때문인 것으로 추정된다. 참고로 사용한 격자의 조밀도에 따른 차이는 타원접촉 EHL 문제에 대한 참고문헌[3]와 참고문헌[14]의 결과를 비교하면 쉽게 이해할 수 있다. 따라서, 본 논문과 같이 Misalignment가 작용하는 유한한 선접촉 EHL 문제를 정확하게 해석하기

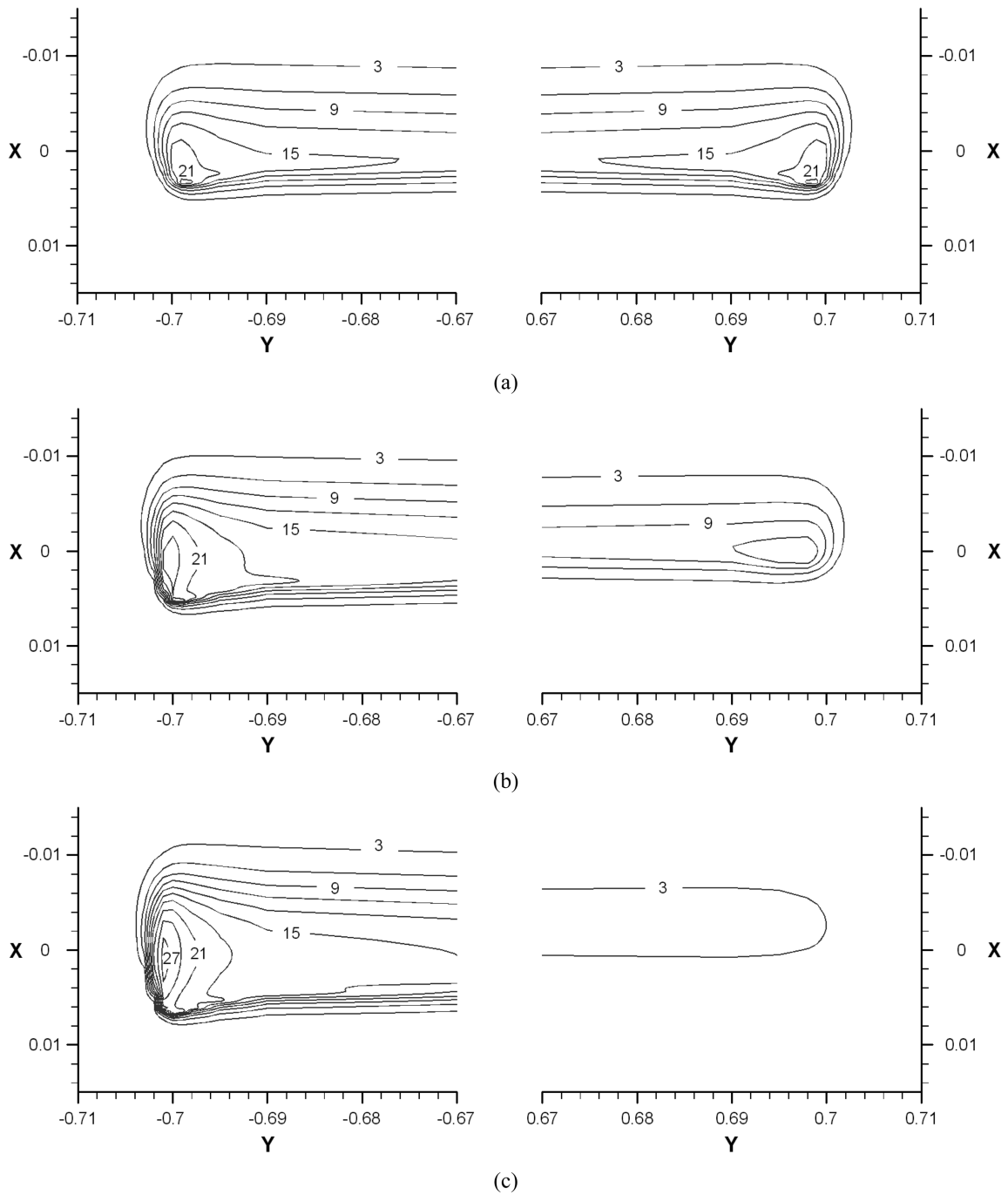


Fig. 4. Contour plots of pressure isobars ($P \times 10^4$). Misaligned angle θ is (a) 0° , (b) 0.002° , (c) 0.004° . (left : tilted edge, right : lifted edge).

위해서는 불균일한 격자계를 채용하는 것이 불가피함을 알 수 있다.

다음의 결과는 Misaligned 각도가 $\theta=0.0^\circ$ 와 $\theta=0.004^\circ$ 인 경우, Fig. 3에 나타난 각 단면에서의 압력분포와

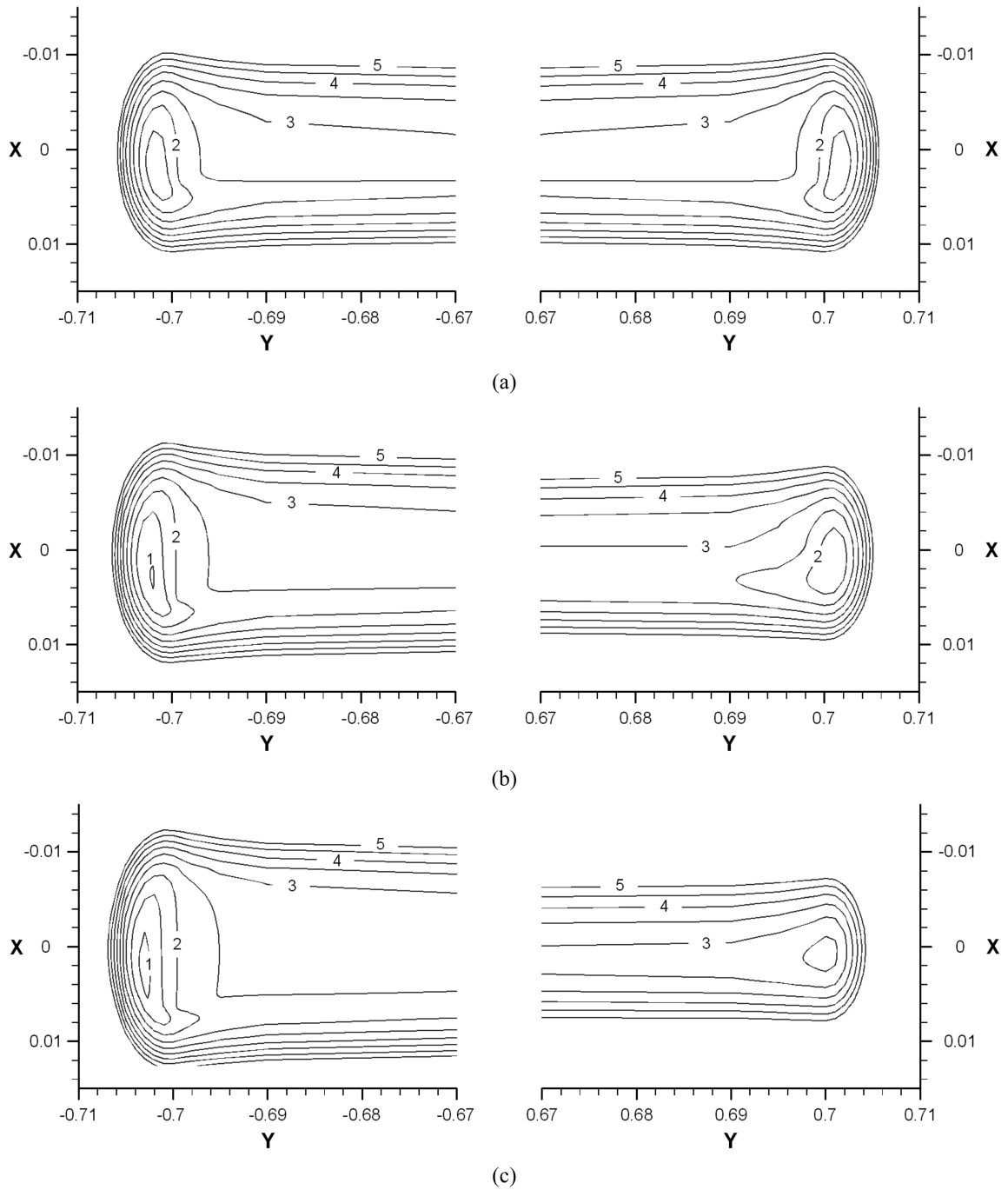


Fig. 5. Contour plots of film shapes ($H \times 10^5$). Misaligned angle θ is (a) 0° , (b) 0.002° , (c) 0.004° .(left : tilted edge, right : lifted edge)

유막형상을 비교한 것이다.

Fig. 6과 Fig. 7에는 단면 1-1과 단면 2-2에서의 압력

분포와 유막형상을 각각 나타내었다. 앞에서의 고찰결과와 같이 로울러가 아주 미세하게 Misaligned 되어도

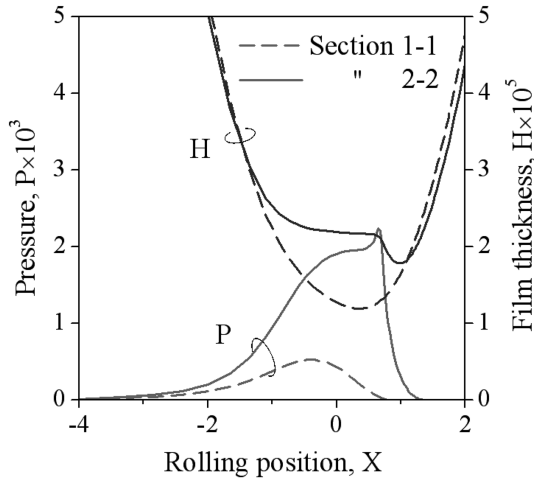


Fig. 6. Pressure and film shapes in the rolling direction. $\theta = 0.0^\circ$.

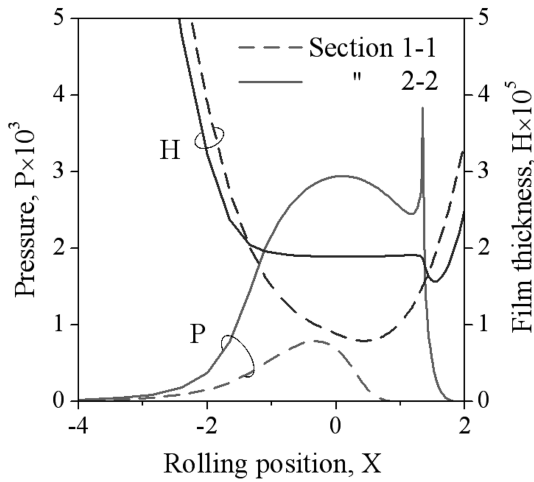


Fig. 7. Pressure and film shapes in the rolling direction. $\theta = 0.004^\circ$.

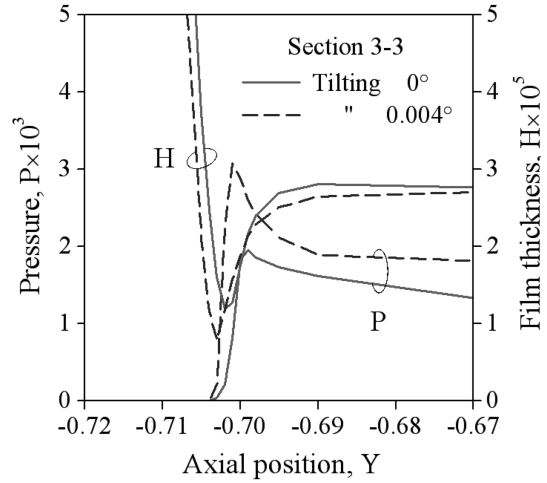


Fig. 8. Comparison of transverse pressure distribution and film shapes near tilted edge region.

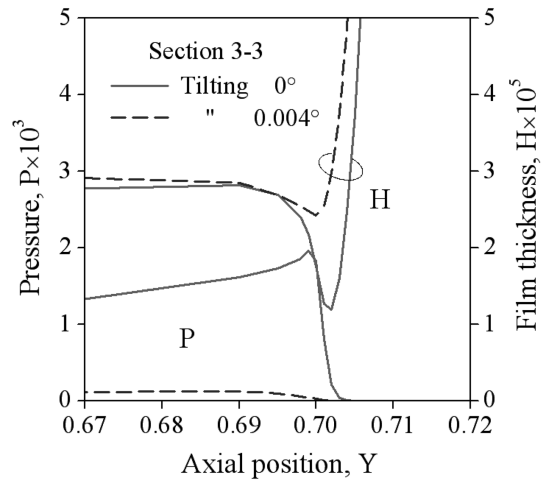


Fig. 9. Comparison of transverse pressure distribution and film shapes near lifted edge region.

EHL 압력분포와 유막형상은 아주 크게 변화하였다. 특히, 구름방향 출구에서 압력 Spike가 크게 발생하는 단면2-2에서의 유막은 접촉폭 방향(X 방향)의 중앙부에서는 일정하고, 출구측에서 유막수축이 발생하고 있다. 한편, 최소유막이 발생하는 단면1-1의 위치는 단면2-2보다 로울러의 양단부쪽에 위치하였다.

Fig. 8과 Fig. 9에는 Misalignment 유무에 따른 단면3-3의 좌·우측단에서의 압력분포와 유막형상을 서로 비교하여 각각 나타내었다. 로울러가 Misaligned 되면 유막두께가 작아지는 좌측단에서는 윤활작용으로 아주

높은 EHL 압력이 발생하고 이에 따라 탄성변형량도 크게 된다. 이외는 반대로 우측단에서는 측면으로 윤활유가 쉽게 유출되므로 EHL 압력은 낮아지고 이에 따라 이곳의 탄성변형량은 작게 된다. 결과적으로 우측단에서는 Misalignment에 따른 상대적인 유막두께 차이는 아주 크게 되었다.

이상의 결과에서 나타낸 것과 같이 로울러에 아주 작은 크기의 Misalignment가 작용해도 양단부 부근에서의 EHL 압력분포와 유막두께는 아주 크게 변화하였다. 따라서, 피로수명이 최대인 최적의 로울러 프로파

일 설계시에 본 논문의 수치해석방법이 유용하게 사용될 수 있을 것으로 기대되며, 다양한 조건에 대한 추가연구가 요구된다.

6. 결 론

로울러 베어링으로 지지되는 축은 여러 가지 요인에 의해서 Misaligned될 수 있으며, 이는 베어링의 로울러에 전달된다. 본 논문에서는 프로파일링을 한 원통형 로울러에 Misalignment가 작용하는 경우의 EHL 문제를 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하여 수치해석하였다. 이때, 계산시간을 단축하고 Misalignment 각도에 따른 양단부 부근에서의 EHL 특성을 상세하게 해석하기 위하여 완전히 불균일한 격자계를 채용하였다. 이 결과, 로울러에 작용하는 아주 작은 크기의 Misalignment는 양단부에서의 EHL 압력분포와 유막두께에 아주 큰 영향을 미쳤다. 특히, 유막두께 보다 압력분포에 미치는 영향이 더욱 크게 나타났다. 따라서, 본 논문의 수치해석방법은 로울러의 최적 프로파일 설계에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

이 논문은 2단계 BK21사업의 지원으로 수행되었습니다.

기호설명

$D_{i,j,k,l}$: 무차원 영향계수, $\bar{D}_{i,j,k,l}/R$
$\bar{D}_{i,j,k,l}$: 영향계수
E	: $2/E = (1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2$
G	: 무차원 재료변수, aE
h	: 유막두께
H	: 무차원 유막두께, h/R
H_m	: 무차원 최소유막두께
n	: 반복계산횟수
p	: 압력
P	: 무차원 압력, p/E
R	: 로울러 반경
R_d	: 로울러의 Dub-off 반경 (Fig. 1 참조)
R_d^*	: R_d/R
u	: 구름방향 평균속도
U	: 무차원 속도변수, $\eta_0 u/ER$

x,y	: 구름방향 및 길이방향 좌표계
X,Y	: 무차원 좌표계, $x/R, y/R$
y_i	: Fig. 1 참조
w	: 하중
W	: 무차원 하중변수, w/ER_x^2
α	: 윤활유의 압력-점도지수
δ	: 미소압력요소에 의한 탄성변형량
η	: 무차원 점도, $\bar{\eta}/\eta_0$
$\eta_0, \bar{\eta}$: 대기압 및 p 에서의 윤활유 점도
ρ	: 무차원 밀도, $\bar{\rho}/\rho_0$
$\rho_0, \bar{\rho}$: 대기압 및 p 에서의 윤활유 밀도
θ	: 로울러의 Misaligned 각도 (Fig. 1 참조)

참고문헌

- Heydari, M. and Gohar, R., "The Influence of Axial Profile on Pressure Distribution in Radially Loaded Rollers," *J. of Mech. Eng. Sci.*, Vol. 21, pp. 38-388, 1979.
- Dowson, D. and Higginson, G. R., "A Numerical Solution to the Elastohydrodynamic Problem," *J. of Mech. Eng. Sci.*, Vol. 1, pp. 7-15, 1959.
- Hamrock, B. J. and Dowson, D., "Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, Part 3 : Fully Flooded Results," *J. of Lub. Tech.*, Vol. 99, pp. 264-276, 1977.
- Chen, X., Sun, H., and Shen, X., "Review and Prospect of Developments in EHL of Finite Line Contacts," *Proc. of IUTAM Sympo. on Elastohydrodynamics and Micro-elastohydrodynamics*, pp. 95-106, 2004.
- Wymer, D. G. and Cameron, A., "Elastohydrodynamic Lubrication of a Line Contact," *Proc. IMechE*, Vol. 188, pp. 221-231, 1973-74.
- Mostofi, A. and Gohar, R., "Elastohydrodynamic Lubrication of Finite Line Contacts," *J. of Lub. Tech.*, Vol. 105, pp. 598-604, 1983.
- 박태조, 김경웅, "유한한 선접촉 탄성유체윤활문제의 수치해석," *대한기계학회논문집*, 제11권, 제4호, pp. 579-585, 1987.
- 박태조, 김경웅, "프로파일링을 한 원통형 로울러의 탄성유체윤활(I)," *대한기계학회논문집*, 제12권, 제2호, pp. 262-270, 1988.
- 박태조, 김경웅, "프로파일링을 한 원통형 로울러의 탄성유체윤활(II)," *대한기계학회논문집*, 제15권, 제6호, pp. 1975-1981, 1991.
- Park, T. J. and Kim, K. W., "Elastohydrodynamic Lubrication of a Finite Line Contacts," *Wear*, Vol. 223, No. 1-2, pp. 102-109, 1998.
- Park, T. J., "Effect of Roller Axial Profile on the EHL of Finite Cylindrical Roller," *Proc. of ECOT-*

- RIB* 2009, Paper No. B1-HE2-148, 2009.
12. 박태조, “구름/스핀 운동을 하는 경우의 타원접촉 EHL 유막두께,” *한국윤활학회지*, 제24권, 제6호, pp. 355-361, 2008.
 13. Kushwaha, M., Rahnejat, H., and Gohar, R., “Aligned and Misaligned Contacts of Rollers to Races in Elastohydrodynamic Finite Line Conjunctions,” *Proc. IMechE, J. of Mech. Eng. Sci.*, Vol. 216, pp. 1051-1069, 2002.
 14. Park, T. J. and Kim, K. K., “A Numerical Analysis of the Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts”, *Wear*, Vol. 136, pp. 299-312, 1990.