

4 x 4 균형불완전블록모형의 순위변환분석[†]

최영훈¹

한신대학교 정보통계학과

접수 2010년 1월 14일, 수정 2010년 3월 15일, 게재확정 2010년 3월 23일

요약

4 x 4 균형불완전블록모형에서 고정효과만이 존재하는 경우 주효과를 검정하기 위한 순위변환 통계량의 검정력은 적은 반복수에도 가장 높은 수준을 유지하며, 지수분포와 이중지수분포하에서는 모수적 통계량의 검정력보다 큰 격차의 상대적 우위를 보인다. 특히 전형적인 균형불완전블록모형하에서 주인자는 고정이며 블럭인자는 랜덤인 경우의 순위변환 통계량의 검정력은 주효과의 효과크기 및 블럭효과의 모집단 분포와 모수크기에 상관없이 모든 상황에 걸쳐 현저하게 높은 우위성을 보인다. 또한 반복수가 증가함에 따라 순위변환 통계량의 검정력은 빠른 속도로 증가한다. 전체적인 주효과의 순위변환 통계량의 검정력 우위는 하나의 주효과 및 블럭효과와 결측값이 존재하는 균형불완전블록모형의 고유특성으로 말미암아 고정효과 및 표본의 작은 크기변화에 민감하게 반응하며 상대적 검정력 우위를 갖는다고 볼 수 있다.

주요용어: 4 x 4 균형불완전블록모형, 검정력, 순위통계량, 혼합효과.

1. 서론

일련의 관측된 원자료를 크기순으로 순위대체한 후 모수적 검정을 적용하는 과정으로 Conover와 Iman (1981)에 의해 정의된 순위변환기법의 응용으로 Hora와 Conover (1984), Hora와 Iman (1988), Kepner와 Robinson (1988)는 랜덤화-블럭모형 및 이원배치법하에서 순위변환을 이용한 주효과 검정 통계량은 카이제곱분포로 수렴하며, Fabian (1991), Akritas와 Arnold (2000)는 이원배치법하에서의 상호작용 개념 등의 복잡성으로 말미암아 상호작용효과를 검정하기 위한 이론적 전개의 문제점을 제시하면서 더 많은 정의 및 연구가 수행되어야 한다고 제안하고 있다. 아울러 Gorman과 Akritas (2001), Choi (1998, 2008, 2009)는 요인증가 및 지분모형과 라틴방격모형에 따른 모수적 통계량과 순위변환 통계량의 접근성을 통한 제1종오류와 검정력 비교를 제시하고 있으며, Akritas와 Papadatos (2004)는 등분산 가정을 위배하는 일원배치법하에서의 순위통계량을 확대분석 연구하였다. 즉 순위변환 기법의 큰 장점은 순위로 대체한 자료를 바탕으로 기존의 모수적 검정을 적용하는 간편성 및 편리성이며 주로 실험 계획 모형분석 연구에 지속적으로 이용되고 있다. 또한 최근의 관심사는 Park과 Kim (2003), Kang과 Jung (2008)과 같이 요인계획법 이외의 다양한 모형으로의 분석기법과 검정력 연구 등을 확대하는 추세이다.

따라서 본 연구대상의 주된 관심사는 현실적으로 자주 이용될 수 있으며 완전확률화블럭모형의 불가능한 상황이거나 부득이 한 경우등의 제한성을 확대한 모형인 4 x 4 균형불완전블럭모형의 순위변환에 따른 제1종 오류율 및 검정력 분석을 중점적으로 살펴봄으로써, 순위변환 응용 및 이론적 연구의 지속

[†] 본 연구는 한신대학교 학술연구비 지원에 의한 것임.

¹ (447-791) 경기도 오산시 양산동 411, 한신대학교 정보통계학과, 교수. E-mail: choicyh@hs.ac.kr

적 가능성 및 확대를 검토하여 보고자 한다. 균형불완전블록모형은 관심대상인 주효과의 모든 처리수준들이 모든 블록수준내에서 존재하지 않는 특별한 형태의 모형으로서 주효과 유무를 검정하기 위한 통계량의 연구가 모형의 복잡성으로 말미암아 현재까지도 특수한 경우를 논하고 있는 실정이다. 즉 본 연구는 현실적으로 자주 활용될 수 있는 균형불완전블록모형으로 임의의 처리수준 쌍이 가능한 다른 처리수준 쌍과 마찬가지로 동일한 수만큼 발생하는 특징을 갖는다. 특히 처리 및 블록수준수가 4로 동일하며, 실질적으로 개별처리 및 개별블록은 3 블록 및 3 처리에 걸쳐서 발생하는 4 x 4 균형불완전블록모형인 $D(4, 4, 3, 3, 2; 1)$ 에 초점을 맞추고자 한다. 이는 결격치를 제외한 적절한 처리조합의 수를 고려할 때 가장 기본적인 모형이라 간주할 수 있기 때문이다.

특히 전형적인 균형불완전블록모형은 반복수 $n = 1$ 의 제약으로 인하여 검정통계량의 이론적 접근성 전개 및 시뮬레이션 연구가 제한적이라고 판단되므로, 동시에 반복적 표본크기가 존재하는 경우도 고려한 4 x 4 균형불완전블록모형을 연구대상으로 삼고자 한다. 4 x 4 균형불완전블록모형의 주효과 유무의 검정을 위하여 모수적 ANOVA F 통계량과 순위 변환된 ANOVA FR 통계량 사이의 검정력을 정규, 지수, 이중지수, 균일분포 등의 모집단분포 및 다양한 조건하에서의 자료를 이용한 시뮬레이션을 통하여 비교분석해 보고자 한다.

즉 4 x 4 불완전블록모형의 검정력 분석을 세분화하여 검토한 바, 첫째로 주인자 A 및 블록인자 B가 모두 고정인 경우의 주효과의 검정력을, 둘째로 주인자 A는 고정이나 블록인자 B가 랜덤인 경우의 주효과의 검정력을 본 연구를 통하여 처음으로 자세히 분석하고자 한다.

2. 분석모형 및 방법

따라서 연구대상인 4 x 4 균형불완전블록모형은

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ijk}, \text{ 단 } i, j = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, \dots, n$$

으로 표현할 수 있다. 이때 μ 는 총평균을 나타내며 0으로 간주하도록 한다. τ_i 는 주인자 A의 i 번째 주효과를 나타내며, β_j 는 블록인자 B의 j 번째 블록효과를 나타낸다. 오차항 ϵ_{ijk} 는 표준정규모집단 $N(0, 1)$, 지수모집단 $Exp(1)$, 이중지수모집단 $D(0, 1)$ 및 균일모집단 $U(0, 1)$ 으로부터 추출된 독립인 관측치를 나타낸다. 아울러 반복이 존재하지 않는 $n = 1$ 인 전형적인 균형불완전블록모형 및 추가적으로 반복이 존재하는 반복수 $n = 2, 4, 10$ 인 균형불완전블록모형을 동시에 고려해 보고자 한다.

한편 주효과 검정을 위한 귀무가설 $H_0 : \tau_i = 0$, 단 $i = 1, 2, 3, 4$ 에 대하여 F 와 FR 은 각각 모수적 ANOVA 검정통계량과 순위에 바탕을 둔 F 검정통계량으로 아래와 같이 정의한다.

표 2.1 주효과 검정을 위한 가설, 통계량 및 기각역

통계량/가설	A, B: 고정	A: 고정, B: 랜덤
	$H_0 : \tau_i = 0$	
F:	$((12n - 7) \sum_{i=1}^4 Q_i^2 / 8n) / (\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^n y_{ijk}^2 - 3 \sum_{i=1}^4 Q_i^2 / 8n - \sum_{j=1}^4 y_{.j}^2 / 3n)$	
FR:	$((12n - 7) \sum_{i=1}^4 (RQ_i)^2 / 8n) / (\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^n R_{ijk}^2 - 3 \sum_{i=1}^4 (RQ_i)^2 / 8n - \sum_{j=1}^4 R_{.j}^2 / 3n)$	
기각역:	F, FR > $F_{3, 12n-7, 0.95}$	

본 분석대상의 균형불완전블록모형은 4 처리 및 4 블록의 대칭모형을 가정한다. 이때 각 처리는 3번씩 발생하고, 각 블록은 3 처리를 포함한다. 즉 i 번째 처리와 j 번째 처리의 개별쌍이 동시에 존재하는 블록의 수로 정의되는 $\lambda = 2$ 라 할 수 있다. 한편 균형불완전블록모형의 결격치 발생의 특이성으로 인한 i 번째 처리에 대한 수정된 처리제곱합 $3 \sum_{i=1}^4 Q_i^2 / 8n$ 및 수정된 순위처리제곱합 $3 \sum_{i=1}^4 (RQ_i)^2 / 8n$ 의

계산에 필요한 Q_i 및 RQ_i 는 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$Q_i = y_{i..} - (1/3) \sum_{j=1}^4 r_{ij} y_{.j} \begin{cases} r_{ij} = 1: \text{처리 } i \text{ 가 블럭 } j \text{ 에 존재할 때} \\ r_{ij} = 0: \text{처리 } i \text{ 가 블럭 } j \text{ 에 존재하지 않을 때} \end{cases}$$

$$RQ_i = R_{i..} - (1/3) \sum_{j=1}^4 r_{ij} R_{.j} \begin{cases} r_{ij} = 1: \text{처리 } i \text{ 가 블럭 } j \text{ 에 존재할 때} \\ r_{ij} = 0: \text{처리 } i \text{ 가 블럭 } j \text{ 에 존재하지 않을 때} \end{cases}$$

$y_{i..} = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^n y_{ijk}$, $y_{.j} = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^n y_{ijk}$ 을 나타내며, 순위 $R_{ijk} = R(y_{ijk})$, $R_{i..} = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^n R_{ijk}$, $R_{.j} = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^n R_{ijk}$ 을 의미한다.

시뮬레이션 과정은 정규, 지수, 이중지수, 균일분포를 따르는 변량을 생성시킨 후, 주어진 고정효과를 발생시키기 위하여 각각의 효과크기에 상응하는 상수를 가산하며, 주효과 검정을 위한 모수적 ANOVA F 통계량 및 순위변환된 ANOVA FR 통계량을 계산한다. 즉 τ_i 의 주효과 및 β_j 의 블럭효과는 $\tau_1 = -\tau_4 = \tau$, $\tau_2 = -\tau_3 = \tau/3$, $\beta_1 = -\beta_4 = \beta$, $\beta_2 = -\beta_3 = \beta/3$ 의 관계식으로부터 유도할 수 있다. 또한 추가적인 랜덤의 블럭효과를 발생시키기 위하여 오차항과 기본적으로 동일한 분포를 가정하되 모수의 크기를 변화시킨 다양한 상황을 고려하고자 한다. 그리고 5% 유의수준하에서의 기각되는 비율을 각각 계산한다.

3장은 우선적으로 제1종 오류율은 분포유형, 효과크기, 표본크기 및 통계량 유형에 상관없이 거의 모든 상황에 걸쳐 명목상의 유의수준과 상당히 유사하므로, 두인자가 모두 고정인 경우의 주효과의 제1종 오류율만을 제시하고자 한다. 한편 중요성의 비중은 검정력에 있으므로, 다양한 상황에 따른 모수적 F 통계량과 순위변환 FR통계량의 검정력 비교분석 연구에 초점을 맞추고자 한다. 균형불완전블럭모형은 처리 및 블럭간 상호작용이 존재하지 않으며 오로지 하나의 처리만이 존재하는 민감한 특수성을 반영하여 검정력 분석에 이용할 효과의 크기 $c = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ 의 증가를 고려하였다. 한편 이와같은 일련의 과정을 10000번이상 반복하였으며, 주어진 변량을 발생시키기 위하여 Visual C++ 언어의 rand() 함수 등을 사용하였고, 결과물의 비교를 위하여 EXCEL을 이용하였다.

3. 제1종 오류율 및 검정력 분석

본 절에서는 주인자 A의 주효과 τ_i 를 검정하기 위한 통계량 F와 FR의 제1종 오류율 및 검정력을 다음과 같은 두가지 상황하에서 분석하고자 한다.

(3.1): A 및 B인자가 모두 고정인 경우의 주효과 τ_i 의 제1종 오류율: $\tau = 0, \beta = c$ 및 검정력: $\tau = c; \beta = 0, 0.2c, 0.4c, 0.6c, 0.8c, 1.0c, 1.2c$.

(3.2): A인자는 고정, B인자는 랜덤인 경우로서 주효과 τ_i 의 검정력: $\tau = c; \beta \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1/4, 1/2, 1, 2, 4$; $Exp(\lambda)$, $\lambda = 0.5, 0.8, 1.0, 1.2, 2.0$; $D(0, \lambda)$, $\lambda = 0.5, 0.8, 1.0, 1.2, 2.0$; $U(0, b)$, $b = 0.5, 0.8, 1.0, 1.2, 2.0$.

3.1. A 및 B인자가 모두 고정인 경우의 주효과 τ_i 의 제1종 오류율 및 검정력

첫번째로 A 및 B인자가 모두 고정인 경우의 주효과 τ_i 의 제1종 오류율 및 검정력을 분석하고자 한다. 아래의 표 3.1은 $\tau = 0, \beta = c$ 의 대표적인 경우로서 오차항이 정규분포, 지수분포, 이중지수분포 및 균일분포인 모집단으로부터 유의수준 0.05하에서의 주효과 τ_i 의 제1종 오류율을 나타낸 도표이다. 결과를 요약하면 제1종 오류율은 모수적 F 통계량 및 순위변환 FR 통계량이 효과크기를 증가시키거나 분포의

형태를 달리하거나 표본크기를 증가시켜도 명목상의 유의수준 0.05에서 크게 벗어나지 않는다는 사실이다. 이와같은 결과로 말미암아 본 연구의 관점은 모수적 F 통계량 및 순위변환 FR 통계량의 검정력 차이 비교 분석에 초점을 맞추고자 한다.

표 3.1 A, B인자가 모두 고정인 경우의 주효과 τ_i 의 제1종 오류율. 단, $\tau = 0, \beta = c$

c	통계량	정규		지수		이중지수		균일	
		n = 1	n = 4	n = 1	n = 4	n = 1	n = 4	n = 1	n = 4
0.25	F	0.051	0.052	0.038	0.047	0.038	0.050	0.055	0.050
	FR	0.059	0.054	0.053	0.056	0.057	0.052	0.059	0.051
0.50	F	0.051	0.052	0.038	0.047	0.038	0.050	0.055	0.050
	FR	0.057	0.054	0.051	0.053	0.057	0.052	0.059	0.053
0.75	F	0.051	0.052	0.038	0.047	0.038	0.050	0.055	0.050
	FR	0.061	0.052	0.051	0.052	0.052	0.052	0.063	0.051
1.00	F	0.051	0.052	0.038	0.047	0.038	0.050	0.055	0.050
	FR	0.060	0.050	0.050	0.053	0.050	0.052	0.067	0.051

아래의 표 3.2는 두인자가 모두 고정인 (3.1)의 경우로 주효과 τ_i 의 모수적 F 통계량 및 순위변환 FR 통계량의 검정력이며 [(0) 모든 경우의 F (1) $\tau = c, \beta = 0$ (2) $\tau = c, \beta = 0.2c$ (3) $\tau = c, \beta = 0.4c$ (4) $\tau = c, \beta = 0.6c$ (5) $\tau = c, \beta = 0.8c$ (6) $\tau = c, \beta = c$ (7) $\tau = c, \beta = 1.2c$], 그림 3.1은 (0)모든 경우의 F (1) $\tau = c, \beta = 0$ (6) $\tau = c, \beta = c$ 의 경우로 오차항이 정규분포, 지수분포, 이중지수분포 및 균일 분포인 모집단으로부터 유의수준 0.05하에서의 주효과 τ_i 의 검정력을 종합적으로 요약한 도표 및 그림이다.

표 3.2 A, B 인자가 모두 고정인 경우의 주효과 τ_i 의 검정력. 단

- (0) 모든 경우의 F (4) $\tau = c, \beta = 0.6c$
- (1) $\tau = c, \beta = 0$ (5) $\tau = c, \beta = 0.8c$
- (2) $\tau = c, \beta = 0.2c$ (6) $\tau = c, \beta = c$
- (3) $\tau = c, \beta = 0.4c$ (7) $\tau = c, \beta = 1.2c$

분포	c	F (0)		FR (1)		FR (2)		FR (3)		FR (4)		FR (5)		FR (6)		FR (7)	
		n = 1	n = 4	n = 1	n = 4	n = 1	n = 4	n = 1	n = 4	n = 1	n = 4	n = 1	n = 4	n = 1	n = 4	n = 1	n = 4
정규	0.25	0.061	0.145	0.073	0.141	0.072	0.141	0.070	0.140	0.071	0.140	0.070	0.139	0.072	0.138	0.072	0.137
	0.50	0.097	0.466	0.110	0.456	0.108	0.454	0.108	0.453	0.108	0.449	0.107	0.444	0.104	0.442	0.101	0.433
	0.75	0.167	0.846	0.177	0.830	0.174	0.830	0.171	0.828	0.168	0.821	0.160	0.812	0.155	0.803	0.155	0.796
	1.00	0.263	0.984	0.272	0.981	0.268	0.981	0.258	0.979	0.252	0.976	0.242	0.973	0.232	0.971	0.228	0.967
지수	0.25	0.052	0.154	0.088	0.281	0.086	0.279	0.086	0.275	0.086	0.267	0.085	0.258	0.086	0.249	0.080	0.240
	0.50	0.106	0.515	0.162	0.745	0.163	0.741	0.160	0.726	0.156	0.702	0.145	0.678	0.140	0.647	0.134	0.623
	0.75	0.202	0.845	0.280	0.957	0.270	0.956	0.262	0.950	0.250	0.94	0.236	0.925	0.221	0.907	0.212	0.887
	1.00	0.336	0.973	0.410	0.995	0.401	0.996	0.387	0.995	0.369	0.992	0.344	0.989	0.326	0.985	0.313	0.980
이중지수	0.25	0.044	0.094	0.071	0.117	0.070	0.116	0.070	0.117	0.070	0.117	0.069	0.116	0.068	0.115	0.067	0.113
	0.50	0.066	0.259	0.095	0.348	0.097	0.344	0.094	0.338	0.093	0.334	0.091	0.327	0.092	0.320	0.088	0.315
	0.75	0.106	0.539	0.142	0.655	0.142	0.653	0.137	0.642	0.136	0.632	0.132	0.612	0.129	0.594	0.125	0.578
	1.00	0.164	0.797	0.206	0.881	0.204	0.877	0.199	0.871	0.191	0.859	0.184	0.843	0.177	0.829	0.166	0.815
균일	0.25	0.195	0.942	0.194	0.903	0.187	0.902	0.183	0.902	0.184	0.898	0.179	0.895	0.176	0.889	0.174	0.886
	0.50	0.629	1.000	0.614	1.000	0.595	1.000	0.573	1.000	0.560	1.000	0.541	1.000	0.517	1.000	0.504	1.000
	0.75	0.961	1.000	0.952	1.000	0.937	1.000	0.912	1.000	0.890	1.000	0.868	1.000	0.844	1.000	0.834	1.000
	1.00	1.000	1.000	0.996	1.000	0.997	1.000	0.991	1.000	0.984	1.000	0.970	1.000	0.961	1.000	0.961	1.000

표 3.2 및 그림 3.1은 현실적으로 중요시되고 비중있는 고정효과만이 존재하는 경우로 앞으로 제시할 랜덤효과가 병행할 때보다 주효과 τ_i 의 F 및 FR 통계량의 검정력은 상대적으로 높은 수준이며, 비록 반복수 $n = 4$ 로 증가하여도 반복수가 존재하지 않는 $n = 1$ 에 비하여 빠르게 검정력은 높아진다. 특

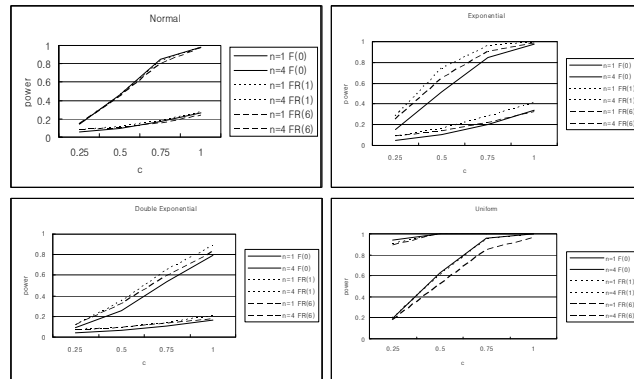


그림 3.1 주효과 τ_i 의 검정력, 단 (0)모든 경우의 F (1) $\tau = c, \beta = 0$ (6) $\tau = c, \beta = c$.

히 지수분포와 이중지수분포하에서는 기존의 연구를 수행한 여타모형보다 균형불완전블록모형에서 주효과 τ_i 의 FR 통계량의 검정력은 F 통계량의 검정력보다 큰 격차의 상대적 우위를 보이고 있다. 반면에 정규분포와 균일분포에서는 전반적으로 거의 동일한 수준의 검정력을 보이되, 효과크기가 작고 반복수 $n = 1$ 인 경우에 FR 통계량의 검정력은 F 통계량의 검정력보다 우위를 보임을 주목할 필요가 있다. 이와같은 현상들은 오로지 주효과 τ_i 만이 존재하는 경우 ($\tau = c, \beta = 0$)에 더욱 명백해진다. 또한 주효과 τ_i 검정시 블럭효과 β_j 가 커질수록 F 통계량의 검정력은 동일하며 FR 통계량의 검정력은 미미한 수준으로 줄어드나 F 통계량의 검정력에 비하여 충분한 우위를 보이는 결과를 유지한다.

아울러 고정효과와 작은 크기변화 (c) 및 반복수의 적은 크기변화 (n)에 FR 통계량은 F 통계량에 비하여 민감하게 반응하며 결과적으로 상대적 검정력 우위를 야기시킨다고 볼 수 있다. 이는 상호작용효과 없이 하나의 주효과 및 하나의 블럭효과만이 존재하고 아울러 결측값이 발생하는 모집단 모형에 기인한다. 즉 전체적인 주효과 τ_i 의 FR 통계량의 검정력 우위는 균형불완전블록모형만이 갖는 고유한 특성으로 말미암을 예측할 수가 있다.

3.2. A인자는 고정, B인자는 랜덤인 경우의 주효과 τ_i 의 검정력 ($n = 1$)

두번째로 반복수가 존재하지 않는 $n = 1$ 인 전형적인 균형불완전블록모형하에서 A 주인자는 고정이며 B 블럭인자는 랜덤인 경우의 주효과 τ_i 의 검정력을 분석하고자 한다. 아래의 표 3.3은 블럭인자 B가 오차항과 동일한 분포를 갖는 랜덤인 (3.2)의 다양한 경우이며 [(1) $\tau = c, \beta \sim N(0, 4), Exp(0.5), D(0, 0.5), U(0, 2)$ (2) $\tau = c, \beta \sim N(0, 2), Exp(0.8), D(0, 0.8), U(0, 1.2)$ (3) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1), Exp(1), D(0, 1), U(0, 1)$ (4) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1/2), Exp(1.2), D(0, 1.2), U(0, 0.8)$ (5) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1/4), Exp(2), D(0, 2), U(0, 0.5)$], 그림 3.2는 반복수 $n = 1$ 인 전형적인 불완전블록모형중에서 (3) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1), Exp(1), D(0, 1), U(0, 1)$ (5) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1/4), Exp(2), D(0, 2), U(0, 0.5)$ 의 경우로서 오차항이 정규분포, 지수분포, 이중지수분포 및 균일분포인 모집단으로부터 유의수준 0.05하에서의 주효과 τ_i 의 검정력을 종합적으로 요약한 도표 및 그림이다.

표 3.3 및 그림 3.2는 반복수 $n = 1$ 의 전형적인 균형불완전블록모형하에서 A 주인자는 고정이며 B 블럭인자는 랜덤인 경우로 주효과 τ_i 의 F 및 FR 통계량의 검정력은 표 3.2 및 그림 3.1의 모든 인자가 고정인 경우보다 낮은 수준임을 알 수 있다. 이는 블럭효과가 랜덤으로 오차항과 혼합화하는 희석현상을 유발시켜 검정력을 떨어뜨리는 결과를 발생시킴을 유추할 수 있다. 또한 주효과 τ_i 검정시 블럭효과

표 3.3 A인자는 고정, B인자는 랜덤인 경우의 주효과 τ_i 의 검정력. 단 $n = 1$

- (1) $\tau = c, \beta \sim N(0, 4), Exp(0.5), D(0, 0.5), U(0, 2)$
- (2) $\tau = c, \beta \sim N(0, 2), Exp(0.8), D(0, 0.8), U(0, 1.2)$
- (3) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1), Exp(1), D(0, 1), U(0, 1)$
- (4) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1/2), Exp(1.2), D(0, 1.2), U(0, 0.8)$
- (5) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1/4), Exp(2), D(0, 2), U(0, 0.5)$

분포	c	(1)		(2)		(3)		(4)		(5)	
		F	FR	F	FR	F	FR	F	FR	F	FR
정규	0.25	0.050	0.062	0.053	0.063	0.057	0.066	0.062	0.066	0.061	0.070
	0.50	0.058	0.069	0.067	0.075	0.078	0.084	0.088	0.093	0.091	0.099
	0.75	0.071	0.079	0.089	0.101	0.108	0.118	0.126	0.138	0.138	0.154
	1.00	0.090	0.099	0.117	0.129	0.154	0.169	0.189	0.206	0.218	0.232
지수	0.25	0.045	0.062	0.050	0.068	0.051	0.072	0.052	0.074	0.053	0.078
	0.50	0.055	0.078	0.068	0.090	0.074	0.101	0.080	0.108	0.087	0.128
	0.75	0.070	0.096	0.098	0.129	0.113	0.150	0.125	0.166	0.157	0.210
	1.00	0.091	0.129	0.142	0.184	0.170	0.215	0.193	0.242	0.261	0.324
이중지수	0.25	0.041	0.055	0.044	0.058	0.048	0.059	0.048	0.060	0.046	0.060
	0.50	0.043	0.058	0.053	0.067	0.058	0.071	0.061	0.076	0.062	0.084
	0.75	0.050	0.067	0.067	0.085	0.073	0.091	0.079	0.100	0.092	0.118
	1.00	0.059	0.080	0.085	0.106	0.094	0.118	0.104	0.131	0.132	0.161
균일	0.25	0.076	0.083	0.105	0.114	0.119	0.129	0.137	0.145	0.168	0.168
	0.50	0.162	0.169	0.304	0.303	0.364	0.361	0.429	0.431	0.536	0.525
	0.75	0.330	0.322	0.605	0.599	0.700	0.689	0.790	0.775	0.897	0.883
	1.00	0.541	0.527	0.862	0.847	0.926	0.907	0.967	0.958	0.995	0.989

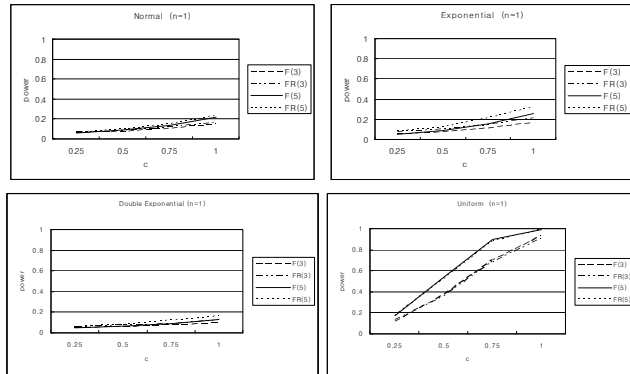


그림 3.2 주효과 τ_i 의 검정력, 단 (3) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1), Exp(1), D(0, 1), U(0, 1)$ (5) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1/4), Exp(2), D(0, 2), U(0, 0.5)$ 및 $n = 1$.

β_j 가 랜덤효과이므로 F 통계량의 검정력도 FR 통계량의 검정력과 마찬가지로 모든 상황에서 변화한다.

한편 기존의 실험계획법 모형들의 연구결과들과 비교할 때 특이한 점은 주효과 τ_i 의 효과크기 및 블럭효과 β_j 의 모집단 분포와 모수크기에 상관없이 주효과 τ_i 의 FR 통계량의 검정력은 F 통계량의 검정력보다 모든 상황에 걸쳐 현저하게 높은 우위성을 보인다. 즉 정규분포에서조차 FR 통계량의 검정력은 확실한 우위를 나타내고 있다. 이는 검정하고자 하는 주효과 τ_i 만이 고정인 균형불완전블럭모형하에서 민감한 순위변환 기법을 이용한 검정력은 뛰어난 위력을 발휘함을 짐작할 수 있다. 아울러 블럭효과 β_j 의 모집단 분포에 상관없이 분산값이 작아질수록 FR 통계량의 검정력은 F 통계량의 검정력보다 큰

폭으로 증가한다.

3.3. A인자는 고정, B인자는 랜덤인 경우의 주효과 τ_i 의 검정력 ($n = 4$)

세번째로 반복수가 존재하는 $n = 4$ 인 불완전블록모형하에서 A인자는 고정이며 B 블록인자는 랜덤인 경우의 주효과 τ_i 의 검정력을 분석하고자 한다. 아래의 표 3.4는 블록인자 B가 오차항과 동일한 분포를 갖는 랜덤인 (3.2)의 다양한 경우이며 [(1) $\tau = c, \beta \sim N(0, 4), Exp(0.5), D(0, 0.5), U(0, 2)$ (2) $\tau = c, \beta \sim N(0, 2), Exp(0.8), D(0, 0.8), U(0, 1.2)$ (3) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1), Exp(1), D(0, 1), U(0, 1)$ (4) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1/2), Exp(1.2), D(0, 1.2), U(0, 0.8)$ (5) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1/4), Exp(2), D(0, 2), U(0, 0.5)$], 그림 3.3은 반복수 $n = 4$ 인 불완전블록모형중에서 (3) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1), Exp(1), D(0, 1), U(0, 1)$ (5) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1/4), Exp(2), D(0, 2), U(0, 0.5)$ 의 경우로서 오차항이 정규분포, 지수분포, 이중지수분포 및 균일분포인 모집단으로부터 유의수준 0.05하에서의 주효과 τ_i 의 검정력을 종합적으로 요약한 도표 및 그림이다.

표 3.4 A인자는 고정, B인자는 랜덤인 경우의 주효과 τ_i 의 검정력. 단 $n = 4$

- (1) $\tau = c, \beta \sim N(0, 4), Exp(0.5), D(0, 0.5), U(0, 2)$
- (2) $\tau = c, \beta \sim N(0, 2), Exp(0.8), D(0, 0.8), U(0, 1.2)$
- (3) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1), Exp(1), D(0, 1), U(0, 1)$
- (4) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1/2), Exp(1.2), D(0, 1.2), U(0, 0.8)$
- (5) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1/4), Exp(2), D(0, 2), U(0, 0.5)$

분포	c	(1)		(2)		(3)		(4)		(5)	
		F	FR	F	FR	F	FR	F	FR	F	FR
정규	0.25	0.065	0.068	0.077	0.078	0.093	0.092	0.107	0.109	0.120	0.121
	0.50	0.118	0.117	0.173	0.170	0.247	0.242	0.321	0.312	0.382	0.368
	0.75	0.221	0.216	0.359	0.350	0.520	0.502	0.656	0.638	0.749	0.731
	1.00	0.379	0.372	0.601	0.582	0.792	0.774	0.908	0.892	0.952	0.945
지수	0.25	0.064	0.081	0.082	0.103	0.095	0.116	0.104	0.130	0.130	0.177
	0.50	0.127	0.175	0.215	0.285	0.264	0.352	0.308	0.406	0.416	0.553
	0.75	0.242	0.348	0.445	0.564	0.551	0.664	0.624	0.739	0.760	0.873
	1.00	0.412	0.552	0.698	0.807	0.803	0.885	0.863	0.928	0.939	0.980
이중지수	0.25	0.058	0.060	0.065	0.069	0.071	0.075	0.075	0.081	0.085	0.097
	0.50	0.087	0.097	0.121	0.135	0.144	0.163	0.166	0.188	0.215	0.248
	0.75	0.136	0.154	0.232	0.264	0.292	0.325	0.338	0.374	0.444	0.505
	1.00	0.213	0.250	0.392	0.437	0.484	0.529	0.556	0.606	0.698	0.763
균일	0.25	0.287	0.260	0.558	0.509	0.652	0.608	0.754	0.703	0.864	0.818
	0.50	0.868	0.821	0.994	0.991	0.999	0.998	1.000	1.000	1.000	1.000
	0.75	0.997	0.995	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

표 3.4 및 그림 3.3은 반복수 $n = 4$ 인 균형불완전블록모형으로 A주인자는 고정이며 B블록인자는 랜덤인 경우로 주효과 τ_i 의 F 및 FR 통계량의 검정력은 주효과 τ_i 의 효과크기가 증가함에 따라 표 3.3 및 그림 3.2의 $n = 1$ 인 균형불완전블록모형보다 빠른 속도로 증가함을 알 수 있다.

특히 끝이 길게 늘어진 지수분포 및 이중지수분포하에서 FR 통계량의 검정력은 F 통계량의 검정력보다 눈에 띄게 상당히 큰 폭의 차이를 드러낼 정도로 높다. 정규분포 및 균일분포와 같은 대칭분포하에서는 F 및 FR 통계량의 검정력은 거의 차이가 없으며 동일하다고 간주할 수 있다. 또 반복수 크기가 커질 때 일반적으로 주효과 τ_i 의 효과크기가 증가하거나 블록효과 β_j 의 모집단 분포의 분산값이 작아질수록 FR 통계량의 검정력은 F 통계량의 검정력보다 큰 폭의 상대적 격차우위를 보임을 파악할 수 있다.

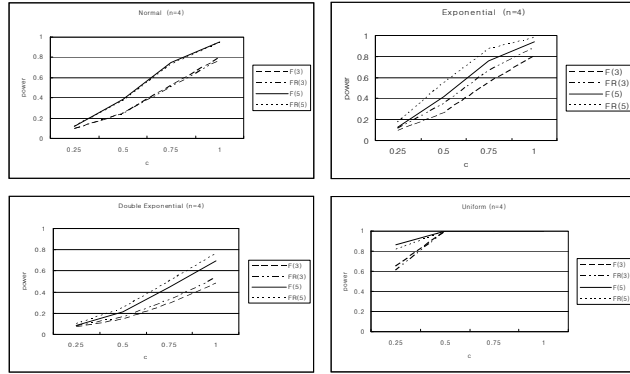


그림 3.3 주효과 τ_i 의 검정력, 단 (3) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1), Exp(1), D(0, 1), U(0, 1)$ (5) $\tau = c, \beta \sim N(0, 1/4), Exp(2), D(0, 2), U(0, 0.5)$ 및 $n = 4$.

4. 결론

4 x 4 균형불완전블럭모형에서 고정효과만이 존재하는 경우 주효과 τ_i 를 검정하기 위한 FR 통계량의 검정력은 적은 반복수에도 가장 높은 수준을 유지하며, 지수분포와 이중지수분포하에서는 F 통계량의 검정력보다 큰 격차의 상대적 우위를 보인다.

특히 반복수 $n = 1$ 의 전형적인 균형불완전블럭모형하에서 A 주인자는 고정이며 B 블럭인자는 랜덤인 경우에 주효과 τ_i 의 FR 통계량의 검정력은 F 통계량의 검정력보다 주효과의 효과크기 및 블럭효과와 모집단 분포와 모수크기에 상관없이 모든 상황에 걸쳐 현저하게 높은 우위성을 보인다. 또한 적은 반복수 $n = 4$ 의 증가에도 불구하고 FR 통계량의 검정력은 주효과의 크기가 증가함에 따라 빠른 속도로 증가한다.

전체적인 주효과 τ_i 의 FR 통계량의 검정력 우위는 고정효과의 작은 크기변화 및 반복수의 작은 크기변화에 민감하게 반응하며 결과적으로 F 통계량의 검정력에 비하여 상대적 검정력 우위를 야기시킨다고 볼 수 있다. 이와같은 결과는 하나의 주효과 및 블럭효과만이 존재하고 아울러 결측값이 발생하는 균형불완전블럭모형만이 갖는 고유한 특성에 기인한다.

참고문헌

- Akritas, M. G. and Arnold, S. F. (2000). Asymptotics for analysis of variance when the number of levels is large. *Journal of the American Statistical Association*, **95**, 212-226. 7
- Akritas, M. G. and Papadatos, N. (2004). Heteroscedastic one way ANOVA and lack of fit tests. *Journal of the American Statistical Association*, **99**, 368-382.
- Choi, Y. H. (1998). A study of the power of the rank transform test in a 2 (3) factorial experiment. *Communications in Statistics*, **27**, 251-266.
- Choi, Y. H. (2008). Power comparison in a balanced factorial design with a nested factor. *Journal of Korean Data & Information Science Society*, **19**, 1059-1071.
- Choi, Y. H. (2009). Power analysis for 3 x 3 latin square design. *Journal of Korean Data & Information Science Society*, **20**, 401-410.
- Conover, W. J. and Iman, R. L. (1981). Rank transformations as a bridge between parametric and non-parametric statistics. *The American Statistician*, **35**, 124-128.
- Fabian, V. (1991). On the problem of interactions in the analysis of variance. *Journal of the American Statistical Association*, **86**, 362-374.

- Gorman, J. O. and Akritas, M. G. (2001). Nonparametric models and methods for designs with dependent censored data. *Biometrics*, **57**, 88-95.
- Hora, S. C. and Conover, W. J. (1984). The F statistic in the two-way layout with rank score transformed data. *Journal of the American Statistical Association*, **79**, 668-673.
- Hora, S. C. and Iman, R. L. (1988). Asymptotic relative efficiencies of the rank transformation procedure in randomized complete block design. *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 462-470.
- Kang, S. B. and Jung, W. T. (2008). Estimation for the power function distribution based on type II censored samples. *Journal of Korean Data & Information Science Society*, **19**, 1335-1344.
- Kepner, J. L. and Robinson, D. H. (1988). Nonparametric methods for detecting treatment effects in repeated-measures designs. *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 456-461.
- Park, D. K. and Kim, H. S. (2003). A new approach for selecting fractional factorial designs. *Journal of Korean Data & Information Science Society*, **14**, 707-714.

Rank transformation analysis for 4 x 4 balanced incomplete block design [†]

Young Hun Choi¹

Department of Information and Statistics, Hanshin University

Received 14 January 2010, revised 15 March 2010, accepted 23 March 2010

Abstract

If only fixed effects exist in a 4 x 4 balanced incomplete block design, powers of FR statistic for testing a main effect show the highest level with a few replications. Under the exponential and double exponential distributions, FR statistic shows relatively high powers with big differences as compared with the F statistic. Further in a traditional balanced incomplete block design, powers of FR statistic having a fixed main effect and a random block effect show superior preference for all situations without regard to the effect size of a main effect, the parameter size and the type of population distributions of a block effect. Powers of FR statistic increase in a high speed as replications increase. Overall power preference of FR statistic for testing a main effect is caused by unique characteristic of a balanced incomplete block design having one main and block effect with missing observations, which sensitively responds to small increase of main effect and sample size.

Keywords: 4 x 4 balanced incomplete block design, mixed effect, order statistic, power.

[†] This research was supported by Hanshin University Research Grant.

¹ Professor, Department of Information and Statistics, Hanshin University, 447-791, Korea.
E-mail: choicyh@hs.ac.kr