Journal of the Korean Data &
Information Science Society
2010, **21**(2), 219–229

한국데이터정보과학회지

수익률 분포의 적합과 리스크값 추정

홍종선[1]· 권태완[2]

[12]성균관대학교 통계학과

접수 2010년 1월 11일, 수정 2010년 3월 18일, 게재확정 2010년 3월 23일

요 약

자산을 운용할 때 다양한 위험요인의 증가로 인해 위험관리에 대한 많은 연구가 진행되어왔으며, 통합적인 위험관리기법의 필요성이 대두됨에 따라 개발된 많은 방법 중의 하나가 리스크값이다. 현재까지 연구된 많은 리스크값의 추정과정에서 중요한 과제는 수익률분포의 비대칭성 및 두꺼운 꼬리와 같은 비정규성과 관련된 문제들을 해결하는 것이다. 대부분의 수익률 분포는 첨도가 매우 큰 양수값을 가지며 약한 음수값의 왜도를 갖는다. 본 연구에서는 실제 금융자산 수익률분포에 여러 종류의 대체분포들을 이용하여 실제의 수익률 분포에 적합한 분포를 선정하여 리스크값을 추정한다. 정규분포를 포함한 대체분포들을 이용하여 추정한 리스크값들이 실제 분포로부터 추정한 리스크값에 얼마나 일치하는지를 비교 연구한다. 다양한 대체분포 중에서 실제 분포에 정규혼합분포가 가장 적합하였으며, 이 정규혼합분포를 이용하여 추정한 리스크값과 다른 대체분포를 이용하여 구한 리스크값보다 정확함을 실증 자료를 통해 보였다.

주요용어: 수익률, 왜도, 정규혼합, 첨도.

1. 서론

금융시장의 개방과 금융 자유화의 확대 그리고 금융기관간의 치열한 경쟁으로 인하여 금융기관이 보유하고 있는 금융자산의 위험관리가 매우 중요한 분야로 부각되었다. 특히 1997년에 발생한 국내의 경제 위기는 금융시장의 개방화와 자율화를 촉진시켰고, 금융자산에 대한 위험관리의 중요성이 증대되는 계기가 되었다. 과거에 비해 다양한 금융상품들이 개발되었을 뿐만 아니라 금융자산의 가격변동이 확대되어 금융기관들은 주식, 채권, 외환, 선물 등 다양한 금융자산들에 대한 투자로부터 수익을 얻을 수 있을 가능성도 높아졌지만 대규모의 손실이 발생할 가능성도 동시에 갖게 되었다. 이러한 손실 및 이익의 가능성 정도는 결국 금융자산에 대한 위험을 얼마나 정확하게 평가하느냐에 달려있으며, 1997년의 경제위기 이후 국내 많은 금융기관들이 위험을 측정하는 많은 방법중의 하나로 리스크값 (Value at Risk, VaR)를 도입하게 되었다.

현재까지 리스크값 추정을 위해 많은 방법론과 다양한 기법들이 제시되어있다. 리스크값을 추정하는 방법에는 세가지의 다른 차원의 측면으로 나누어 볼 수 있다. 첫번째는 모수적 방법과 비모수적 방법으로 나누어 볼 수 있다. 모수적 방법은 수익률 분포의 표준편차와 정해진 신뢰수준을 이용하여 리스크값을 구하는 방법이고, 비모수적 방법은 금융자산의 수익률 분포가 주어질 때 이 분포로부터 직접 리스크값을 구하는 방법이다. 모수적 방법에 의해 리스크값을 구하는 경우는 표준편차를 구하는 것이 매우 중

[1] 교신저자: (110-745) 서울 종로구 명륜동 3-53, 성균관대학교 경제학부 통계학전공, 교수.
E-mail: cshong@skku.ac.kr
[2] (110-745) 서울 종로구 명륜동 3-53, 성균관대학교 일반대학원 통계학과, 대학원생.

요한 과제가 된다. 표준편차를 추정하는 가장 간단한 방법으로는 표준편차가 시간에 따라 불변하는 것으로 가정하고 과거의 자료를 이용하여 구하는 방법이 있다. 두번째는 전통적인 방법과 극단치 이론을 이용한 방법으로 나뉜다. 그 중 전통적인 방법에는 분산-공분산법, 역사적 시뮬레이션, 몬테칼로 시뮬레이션 방법들이 있다. 세번째는 미래 현금흐름의 분포 측면에서 리스크값 추정방법을 부분가치 평가법과 완전가치 평가법으로 나누어 볼 수 있다. 부분가치 평가법은 시장 위험대상 포지션의 가치를 먼저 평가한 후 그 포지션의 가치변화를 추정하는 방식으로 분산 공분산법이 대표적이다. 완전가치 평가법은 시나리오를 이용하여 포트폴리오의 가치를 완전히 재평가하여 위험을 추정하는 방법을 말한다. 완전가치 평가법에는 역사적 시뮬레이션 방법, 몬테칼로 시뮬레이션 방법 등이 있다 (Duffie과 Pan, 1997; Pritsker, 1997; 김규형, 1998; Vlaar, 2000; Hwang과 Park, 2005; Park, 2006; Hong 등, 2008; 남두우, 2008).

각 방법이 모두 장점과 한계를 동시에 갖고 있기 때문에 어떤 방법이 더 신뢰할만한 리스크값 추정치를 제공하는지에 대하여 많은 연구가 진행되었다. 특히 금융자산의 수익률에 대한 분포를 정규분포로 가정하여 리스크값을 추정하는 모수적 방법에 크게 의존해 왔으나 리스크값 실증분석의 결과에 의하면 금융자산의 수익률 분포는 비대칭성과 두꺼운 꼬리를 가지므로 정규분포가 아니라는 문제점이 발생한다. 예를 들어 Zangari (1996)는 미국의 주식을 이용한 포트폴리오에 대한 수익률분포의 경우 꼬리부분이 더 두꺼운 것으로 보고하고 있으며, Li (1999) 역시 외환시장에서 이루어지는 환거래가 정규분포를 따르지 않는다는 사실을 보고한 바 있다. 이에 대한 해결방법은 금융자산의 수익률 분포의 비대칭성과 꼬리부분의 두꺼움을 잘 반영할 수 있는 정규분포가 아닌 대체분포 (alternative distribution)를 이용하여 리스크값을 추정하여야 한다.

본 연구에서는 비조건부 표준편차를 이용한 표준화 수익률분포에서 자주 나타나는 초과첨도와 왜도를 잘 수용할 수 있는 또다른 대체분포로서 치우친 t (skew t) 분포, 치우친 라플라스 (skew laplace) 분포, 정규혼합 (normal mixture) 분포의 세가지 분포들을 적용하여 이들 분포들을 통해 추정한 리스크값들이 얼마나 정확한 값들을 산출할 수 있는지를 비교 연구하였다. 2절에서는 리스크값에 대한 추정식을 제시하고, 고려하는 대체분포들에 대해서 설명한다. 3절에서는 실증분석을 통한 수행평가결과를 제시하고 마지막으로 결론을 유도한다.

2. 리스크값 추정을 위한 적합분포

2.1. 리스크값 정의

t시점 ($t = 1, 2, ...$)의 자산을 Y_t라 하면, 일일수익률을 r_t으로 정의할 때 산술수익률 ($(Y_{t+1} - Y_t)/Y_t$)보다는 기하수익률 ($(\ln(Y_{t+1}) - \ln(Y_t))$)을 많이 사용한다.

리스크값이란 금리, 주가, 환율 등 기초적 시장가격들에 대해 주어진 신뢰수준내에서 목표기간에 걸쳐 발생할 수 있는 최대손실금액을 말한다 (Jorion, 1997). 이를 수식을 이용해 표현하면 식 (2.1)과 같다.

$$P(r_t \leq v_\alpha) = \alpha, \tag{2.1}$$

여기서 v_α의 절대값이 자산의 신뢰수준 $1 - \alpha$에서의 수익률 리스크값이 된다. 식 (2.1)을 표준화하면 식 (2.2)와 같다

$$P(x_t \leq \frac{v_\alpha - \mu_r}{\sigma_r}) = \alpha, \tag{2.2}$$

여기서 μ_r은 수익률의 모평균이며, σ_r은 수익률의 모표준편차이다.

식 (2.2)에서 수익률 분포를 정규분포로 가정한다면 신뢰수준 $1-\alpha$에 해당하는 임계값인 $z_\alpha = (v_\alpha - \mu_r)/\sigma_r$이 되고, 이를 v_α에 대해 정리하면 $v_\alpha = \mu_r - z_\alpha\sigma_r$로 나타난다. 그러므로 수익률 리스크값은 $VaR_r = z_\alpha\sigma_r - \mu_r$이다. 수익률 리스크값은 자산을 곱하기전의 리스크값을 의미하고, 수익률 리스크값을 이용하여 수익률 평균에 대한 리스크값 (상대 리스크값)를 다음과 같이 구할 수 있다 (김건우와 이홍재, 2003; 윤평식과 김철중, 1998).

$$\begin{aligned} VaR_{t+1} &= Y_t(\mu_r - v_\alpha) \\ &= Y_t(\mu_r - \mu_r + z_\alpha\sigma_r) \\ &= Y_t z_\alpha \sigma_r. \end{aligned}$$

본 연구에서는 정규분포에 대한 z_α 대신 대체분포들의 임계값을 사용함으로써 리스크값을 추정할 때 정규분포보다 정확한지를 알아볼 것이다.

2.2. 대체분포 적합

많은 실증분석에서 다양한 금융자산의 실제 수익률분포가 정규분포에서 제시하는 것보다 비대칭성과 두꺼운 꼬리를 가진다는 많은 증거가 있다는 점을 감안하면 기존의 모수적 방법의 이와 같은 약점은 특히 리스크값을 추정할 때 과소추정의 우려가 되는 심각한 문제라는 것을 알 수 있다. 따라서 비대칭성과 두꺼운 꼬리를 가지는 분포를 정규분포를 대안으로 사용하는 것이 어느 정도의 성과가 있는지에 대해 연구가 필요하다. 이를 위해 본 연구에서는 조건을 만족하는 여러 가지 분포들 중 치우친 t분포, 치우친 라플라스분포, 정규혼합분포를 이용할 것이며 그 방법은 주어진 신뢰수준에 해당하는 표준정규분포의 임계값 z_α값 대신 표준정규분포에 세가지 대체분포의 임계값을 사용하여 리스크값을 추정하며, 세가지 대체분포들의 통계량과 분포적합에 대해 알아본다.

(1) 치우친 t 분포

치우친 t 분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x) = 2\frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} F_{T_{\nu+1}}\left(\lambda x\sqrt{\frac{1+\nu}{\nu(\nu+x^2)}}\right),$$

여기서 ν과 λ는 각각 자유도, 왜도모수이고, $F_{T_{\nu+1}}(\cdot)$는 $f_{T_{\nu+1}}(x) = 2\frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$의 분포함수이다. 이 밀도함수의 통계량은 다음과 같이 정리된다.

평균 : $b\delta\sqrt{\nu/2}\Gamma(\nu-1/2)/\Gamma(\nu/2), \quad \nu \geq 2$

분산 : $\nu/(\nu-2) - \nu/\pi\lambda^2/(1+\lambda^2)[\Gamma((\nu-1)/2)/\ \Gamma(\nu/2]^2, \quad \nu \geq 3$

왜도 :

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} b\delta(3-\delta^2)(3/2)^{3/2}\Gamma((\nu-3)/2)/\Gamma(\nu/2) \\ -3(\nu/(\nu-2))b\delta\sqrt{\nu/2}\Gamma((\nu-1)/2)/\Gamma(\nu/2) \\ +2[b\delta\sqrt{\nu/2}\Gamma((\nu-1)/2)/\Gamma(\nu/2)]^3 \end{bmatrix} \Big/ \begin{bmatrix} \nu/(\nu-2) \\ -\nu/\pi f^2/(1+f^2)[\Gamma((\nu-1)/2))/\Gamma(\nu/2)]^2 \end{bmatrix}^{3/2}$$

첨도 :

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} 3\nu^2/(\nu-2)(\nu-4) \\ -4b\delta(3-\delta^2)1.5^{3/2}\Gamma((\nu-3)/2)/\Gamma(\nu/2) \\ +b\delta\sqrt{\nu/2}\Gamma((\nu-1)/2)/\Gamma(\nu/2) \\ +6\nu/(\nu-2)[b\delta\sqrt{\nu/2}\Gamma((\nu-1)/2)/\Gamma(\nu/2)]^2 \end{bmatrix} \Big/ \begin{bmatrix} \nu/(\nu-2) \\ -\nu/\pi f^2/(1+f^2)[\Gamma((\nu-1)/2)/\Gamma(\nu/2)]^2 \end{bmatrix}^2$$

여기서 $\delta = \lambda/\sqrt{1+\lambda^2}$, $b = \sqrt{2/\pi}$이다.

실제 자산 수익률의 왜도와 첨도를 치우친 t분포와 같다고 가정하고 적률추정법 (MME method)를 기반으로 모수를 추정하였다. 자산 수익률에 대한 실제분포에 적합시킬 때 Praetz (1972)와 Blattberg와 Gonedes (1974)는 stduent t분포의 자유도가 5에서 7사이인 경우에 정규분포보다 우월하다는 것을 보였기 때문에 본 연구에서도 5와 7사이의 자유도를 이용하였다.

(2) 치우친 라플라스 분포

치우친 라플라스분포의 확률밀도함수와 통계량은 다음과 같다. 여기서 f는 왜도모수 s는 산포모수 그리고 m은 위치모수를 나타낸다.

$$f(x) = \begin{cases} fe^{(-f(x-m)/s)}(1+f^2)s, & x \geq m \\ fe^{(s(x-m)/f)}(1+f^2)s, & x < m \end{cases}$$

평균: $m + (s(1-f^2))/(\sqrt{2}f)$
분산: $s^2(1+f^4)/(2f^2)$
왜도: $\gamma_1 = 2(\beta^3-\alpha^3)/(\alpha^2+\beta^2)^{3/2} = 2(1/f^3 - f^3) \ / \ \left(f^2+1/f^2\right)^{3/2}$
첨도: $\gamma_2 = 3 + 6(\alpha^4+\beta^4)/(\alpha^2+\beta^2)^2 = 3 + 6\left(f^4+1/f^4\right)/\left(f^2+1/f^2\right)^2$

치우친 라플라스 분포의 왜도와 첨도는 다음과 같이 왜도모수 f에 의해서만 영향을 받는다. 그러나 적합도검정과 각 신뢰수준에서의 분위수가 산포모수 s에 영향을 받기 때문에 고려하지 않을 수 없다. 치우친 라플라스 분포도 MME 방법을 기반으로 모수를 추정하였다.

(3) 정규혼합 분포

가중값 p를 포함한 다섯 개의 모수를 갖는 두 정규분포의 혼합분포의 확률밀도함수와 통계량은 다음과 같다.

$$f(x) = p\phi(x;\mu_1,\sigma_1^2) + (1-p)\phi(x;\mu_2,\sigma_2^2).$$

평균: $\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$
분산: $\sigma^2 = [p(\sigma_1^2+\mu_1^2) + (1-p)(\sigma_2^2+\mu_2^2)] - \mu^2$
왜도: $\gamma_1 = [p(\mu_1-\mu)(3\sigma_1^2+(\mu_1-\mu)^2) + (1-p)(\mu_2-\mu)(3\sigma_2^2+(\mu_2-\mu)^2)]/\sigma^3$
첨도: $\gamma_2 = [p(3\sigma_1^4+6(\mu_1-\mu)^2\sigma_1^2+(\mu_1-\mu)^4) + (1-p)(3\sigma_2^4+6(\mu_2-\mu)^2\sigma_2^2+(\mu_2-\mu)^4)]/\sigma^4.$
여기서 $\phi(x;\mu_i,\sigma_i^2)$ 는 평균 μ_i , 분산 σ_i^2 을 가지는 정규확률분포이다.

다섯 개의 모수들을 추정할 때 일반적으로 이용되는 방법으로 EM 알고리즘이 있지만, 표준화된 수익률에 기초하기 때문에 평균과 분산은 각각 0과 1에 매우 가까운 값으로 가정한다. 그러므로 세 개의 모수 p, μ_1, σ_1^2만 결정되면 나머지는 다음과 같은 식으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= -\mu_1 p/(1-p) \\
\sigma_2^2 &= (1-p)(1-p)(\sigma_1^2+\mu_1^2)/(p^2+(1-p)^2) \\
\gamma_1 &= 3p(\mu_1\sigma_1^2-\mu_2\sigma_2^2)+p(\mu_1^3-\mu_2^3)+3\mu_2\sigma_2^2+\mu_2^3 \\
\gamma_2 &= p[3\sigma_1^4+6\mu_1^2\sigma_1^2+\mu_1^4]+(1-p)[3\sigma_2^4+6\mu_2^2\sigma_2^2+\mu_2^4]
\end{aligned}$$

2장에서 언급한 세 종류의 확률분포들의 모수를 추정하기 위하여 실제 수익률분포의 평균과 분산뿐만 아니라 왜도와 첨도값을 사용하여 MME 방법으로 모수를 추정한다. 모수가 추정된 확률분포들 중에서 대표적인 적합도 검정방법인 Kolmogorov-Smirnov (KS) 검정통계량이 가장 유의한 분포를 선택한다. 그리고 선택된 확률밀도함수를 이용하여 리스크값을 추정하고 실제 분포로부터 추정한 리스크값과 비교한다.

3. 실증분석

3.1. 실증자료

본 연구에서 리스크값 추정에 사용되는 자료는 2006년 7월 14일부터 2009년 7월 13일까지 2대 기업(포스코, 현대차)의 주가지수의 1일 종가기준 데이터이다. 자료의 통계량은 표 3.1과 같다. 수익률 기하수익률을 나타낸다. 포스코와 현대차 자료 수익률의 평균이 각각 0.083%, 0.009%이므로 0에 가깝고 표준편차는 모두 2.907%로 약간의 폭의 변화가 나타났으며 계산 방식은 단순표준편차를 사용하였다.

표 3.1 자료의 수익률 (표준화 수익률) 통계량

통계량	포스코	현대차
평균	0.083%	0.009%
표준편차	2.907%	2.907%
왜도	-0.213 (-0.213)	-0.217 (-0.217)
첨도	6.563 (6.559)	9.099 (9.085)

3.2. 리스크값 추정 결과의 비교분석

표 3.2는 자료의 실제분포를 이용해서 추정한 리스크값과 정규분포를 포함한 여러 가지 대체분포를 이용해서 추정한 리스크값을 비교하기 위해서 종합적으로 나타낸 것이다. 치우친 t분포와 정규혼합분포에서의 리스크값 추정은 왜도와 첨도를 기준으로하여 두 분포를 고려하였고, 치우친 라플라스분포는 특성상 포스코 자료에서만 리스크값을 추정하였다.

그림 3.1부터 그림 3.4의 좌측 그래프는 포스코 자료의 수익률 분포와 선택된 이론분포의 밀도함수를 동시에 나타내었고, 우측 그래프는 이에 대한 분포함수를 나타낸 것이다. 또한 그림 3.5부터 그림 3.7의 좌측 그래프는 현대차 자료의 수익률 분포와 선택된 이론분포의 밀도함수를 동시에 나타낸 것이고, 우측 그래프는 분포함수에 대한 것이다. 포스코와 현대차 수익률 모두 정규혼합분포와 매우 일치하다는 것을 그래프에서도 확인할 수 있다.

표 3.2 리스크값의 비교 단위: 원

구분	리스크값 추정	신뢰수준				
		99%	97.5%	95%	92.5%	90%
포스코	실제분포	35,065	26,513	19,909	17,189	14,763
	정규분포	29,079	24,500	20,563	18,000	16,020
	$st(0.17, 6)$	36,125	27,863	21,863	18,350	15,825
	$st(0.28, 6)$	33,850	25,950	20,175	16,800	14,363
	$sl(0, 1.271, 0.5)$	32,755	25,476	19,970	16,749	14,464
	정규혼합(1)	35,538	24,588	18,938	16,050	14,038
	정규혼합(2)	36,875	25,450	18,713	15,600	13,525
현대차	실제분포	7,284	4,052	3,068	2,609	2,048
	정규분포	5,058	4,262	3,577	3,131	2,787
	$st(0.27, 5)$	6,310	4,753	3,655	3,025	2,577
	$st(0.10, 5)$	6,969	5,297	4,125	3,457	2,983
	정규혼합(3)	7,280	5,158	3,199	2,318	1,898
	정규혼합(4)	7,421	5,023	3,164	2,483	2,096

여기서

정규혼합 (1)$=0.632 \times N(0.10, 0.022) + 0.368 \times N(-0.2, 4.2)$
정규혼합 (2)$=0.523 \times N(0.15, 0.018) + 0.477 \times N(-0.1, 3.6)$
정규혼합 (3)$=0.256 \times N(0.20, 0.025) + 0.744 \times N(-0.1, 3.9)$
정규혼합 (4)$=0.390 \times N(0.15, 0.053) + 0.610 \times N(-0.3, 4.3)$

3.3. 리스크값 추정결과의 타당성 검정

앞 절에서는 모수적방법론 중 다양한 분포를 이용하여 리스크값을 추정했지만 추정된 리스크값들이 어느 정도의 타당성 (validation)을 가지고 있는지를 확인할 필요가 있다. 리스크값은 특정한 신뢰수준에서 보고된 것이므로 손실금액이 리스크값을 초과할 수도 있다는 점에 문제가 있다. 95% 신뢰수준에서 리스크값을 보고하는 경우 리스크값을 초과하는 관찰값이 5%정도 나올 것으로 기대하지만 실제의 경우에 있어서 리스크값을 초과하는 관찰값은 5% 이상이 될 수도 있고, 1%가 안 되는 경우도 발생할 수 있다. 만약 시장상황이 정상적이 아닌 상황이라면 이 비율은 더 초과될 수도 있는 가능성이 상존하고 있다.

총관측수를 T 그리고 리스크값을 초과하는 값의 관측수를 N이라고 할 때, 타당성 검정을 위하여 가설 $H_0 : p = p_0 \ vs \ H_1 : p \neq p_0$에 대한 Kupiec (1995)의 검정통계량은 다음과 같다.

$$LR = -2ln\Lambda = -2ln\frac{L(\theta_0)}{L(\widehat{\theta})} = -2\ln\left[\frac{(1-p_0)^{T-N}p_0^N}{1-(\widehat{p})^{T-N}(\widehat{p})^N}\right],\ \widehat{p} = \frac{N}{T}.$$

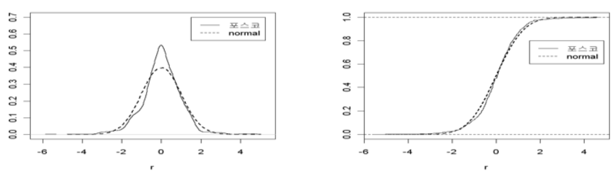

그림 3.1 포스코 수익률분포와 정규분포 비교

포스코와 현대차의 주가 자료 (2006년 7월 13일 ∼ 2009년 7월 14일)에서 추정한 리스크값 실패율에 근거하여 모형의 타당성을 검정한 결과가 표 3.3와 표 3.4에 나타나 있다. 모형의 타당성 검정 결과 표

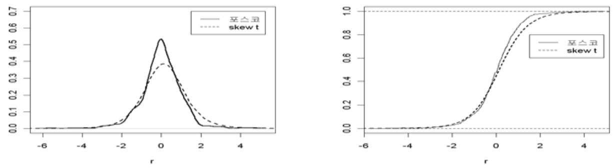

그림 3.2 포스코 수익률분포와 치우친 t분포 비교

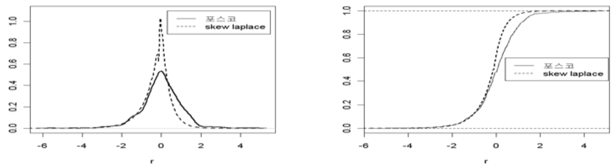

그림 3.3 포스코 수익률분포와 치우친 라플라스분포 비교

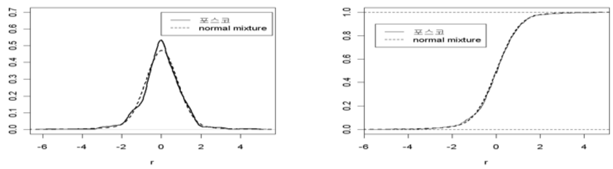

그림 3.4 포스코 수익률분포와 정규혼합분포(1) 비교

3.3에서는 정규분포를 이용한 99% 신뢰수준의 리스크값은 모형의 타당성을 검정하는 과정에서 채택역보다 더 많은 실패횟수를 보이고 있다. 이는 앞에서 언급한 바와 같이 실제분포의 첨도가 정규분포의 첨도보다 높기 때문에 정규분포를 가정한 경우보다 더 큰 손실이 보고되어야 한다는 직관과 일치하는 것이다. 즉 정규분포가 두꺼운 꼬리에 대한 적절한 반영이 이루어지지 않기 때문이다. 표 3.4의 현대차 리스크값에 대한 모형의 타당성 검정에서는 정규분포인 경우 90%, 92.5%, 95%, 99% 리스크값이 기각되었고 $st(0.27, 5)$에서는 90%, 92.5%에서, $st(0.10, 5)$에서는 90%, 92.5%, 95%에서 기각되었다.

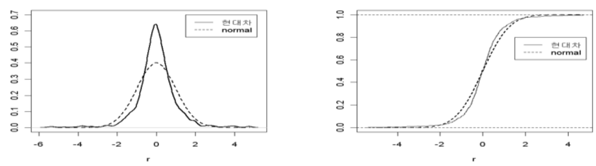

그림 3.5 현대차 수익률분포와 정규분포 비교

Kupiec의 실패율에 따른 우도비 검정에서는 95% 신뢰수준하에서 LR >3.84일 경우 귀무가설은 기각된다. 예를 들어 표 3.3에서 99% 정규분포 리스크값을 보면 $LR = 6.076$ (p값=0.014)이므로 기각된다. 정규분포를 이용한 리스크값과 치우친 t분포를 이용한 리스크값에 비해 정규혼합분포를 이용한 리스크

표 3.3 포스코 리스크값에 대한 모형의 타당성 검정 (95% 신뢰수준)

구 분	리스크값 신뢰수준	실패횟수	채택역	LR 검정		채택여부
				χ^2 통계량	p -값	
	90%	71	$58 < N < 91$	0.137	0.711	O
	92.5%	54	$42 < N < 71$	0.044	0.833	O
실제분포	95%	35	$25 < N < 50$	0.116	0.733	O
	97.5%	18	$11 < N < 28$	0.014	0.906	O
	99%	7	$2 < N < 14$	0.022	0..881	O
	90%	63	$58 < N < 91$	1.903	0.167	O
	92.5%	47	$42 < N < 71$	1.479	0.224	O
정규분포	95%	29	$25 < N < 50$	1.960	0.161	O
	97.5%	20	$11 < N < 28$	0.121	0.727	O
	99%	15	$2 < N < 14$	6.076	0.014	×
	90%	65	$58 < N < 91$	1.262	0.261	O
	92.5%	44	$42 < N < 71$	2.759	0.096	O
$st(0.17, 6)$	95%	26	$25 < N < 50$	3.824	0.051	O
	97.5%	16	$11 < N < 28$	0.363	0.547	O
	99%	8	$2 < N < 14$	0.047	0.826	O
	90%	75	$58 < N < 91$	0.015	0.903	O
	92.5%	56	$42 < N < 71$	0.005	0.944	O
$st(0.28, 6)$	95%	30	$25 < N < 50$	1.486	0.223	O
	97.5%	19	$11 < N < 28$	0.014	0.907	O
	99%	9	$2 < N < 14$	0.326	0.567	O
	90%	73	$58 < N < 91$	0.015	0.902	O
	92.5%	56	$42 < N < 71$	0.005	0.944	O
$sl(0, 1.271, 0.5)$	95%	33	$25 < N < 50$	0.471	0.492	O
	97.5%	20	$11 < N < 28$	0.121	0.727	O
	99%	10	$2 < N < 14$	0.831	0.362	O
	90%	77	$58 < N < 91$	0.134	0.715	O
	92.5%	63	$42 < N < 71$	1.053	0.305	O
$nm(1)$	95%	42	$25 < N < 50$	0.683	0.409	O
	97.5%	20	$11 < N < 28$	0.121	0.727	O
	99%	7	$2 < N < 14$	0.022	0.881	O
	90%	85	$58 < N < 91$	1.742	0.187	O
	92.5%	65	$42 < N < 71$	1.673	0.196	O
$nm(2)$	95%	42	$25 < N < 50$	0.683	0.409	O
	97.5%	20	$11 < N < 28$	0.121	0.727	O
	99%	6	$2 < N < 14$	0.286	0.593	O

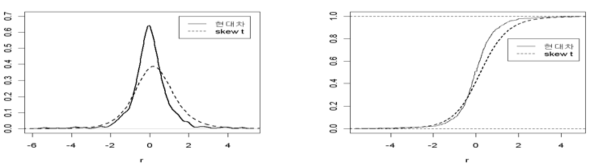

그림 3.6 현대차 수익률분포와 치우친 t분포 비교

값에 대한 타당성 검정을 살펴보면 각 신뢰수준하에서 모두 채택역에 포함되고 우도비 검정에서도 귀무가설을 채택한다. 즉 정규혼합분포가 모수적인 방법 중 다른 분포들에 비해 타당성에 있어 우월함을 보여주고 있다.

표 **3.4** 현대차 리스크값에 대한 모형의 타당성 검정 (95% 신뢰수준)

구 분	리스크값 신뢰수준	실패횟수	채택역	LR 검정		채택여부
				χ^2 통계량	p -값	
실제분포	90%	73	$58 < N < 91$	0.015	0.902	O
	92.5%	55	$42 < N < 71$	0.005	0.944	O
	95%	37	$25 < N < 50$	0.000	1.000	O
	97.5%	19	$11 < N < 28$	0.014	0.907	O
	99%	7	$2 < N < 14$	0.022	0.881	O
정규분포	90%	47	$58 < N < 91$	12.412	0.000	×
	92.5%	35	$42 < N < 71$	9.335	0.002	×
	95%	25	$25 < N < 50$	4.601	0.031	×
	97.5%	17	$11 < N < 28$	0.128	0.720	O
	99%	14	$2 < N < 14$	4.711	0.029	×
$st(0.27, 5)$	90%	57	$58 < N < 91$	0.675	0.031	×
	92.5%	40	$42 < N < 71$	5.148	0.023	×
	95%	28	$25 < N < 50$	2.507	0.113	O
	97.5%	15	$11 < N < 28$	0.725	0.394	O
	99%	10	$2 < N < 14$	0.831	0.361	O
$st(0.10, 5)$	90%	39	$58 < N < 91$	21.849	0.000	×
	92.5%	28	$42 < N < 71$	17.776	0.000	×
	95%	17	$25 < N < 50$	14.121	0.000	×
	97.5%	13	$11 < N < 28$	1.868	0.171	O
	99%	9	$2 < N < 14$	0.329	0.567	O
$nm(3)$	90%	81	$58 < N < 91$	0.716	0.397	O
	92.5%	62	$42 < N < 71$	0.795	0.373	O
	95%	34	$25 < N < 50$	0.263	0.608	O
	97.5%	14	$11 < N < 28$	1.224	0.269	O
	99%	8	$2 < N < 14$	0.048	0.827	O
$nm(4)$	90%	73	$58 < N < 91$	0.015	0.902	O
	92.5%	59	$42 < N < 71$	0.234	0.628	O
	95%	34	$25 < N < 50$	0.263	0.608	O
	97.5%	14	$11 < N < 28$	1.224	0.269	O
	99%	7	$2 < N < 14$	0.022	0.881	O

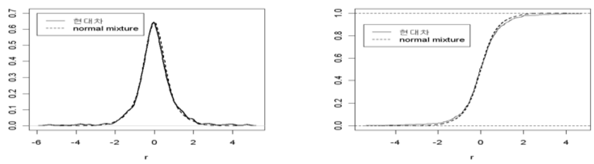

그림 **3.7** 현대차 수익률분포와 정규혼합분포 (3) 비교

4. 결 론

자산을 운용할 때 다양한 위험요인의 증가로 인해 위험관리에 대한 많은 연구가 진행되어왔으며, 그 중에서도 통합적인 위험관리기법의 필요성이 대두됨에 따라 리스크값이 개발되었다. 현재까지 연구된 많은 리스크값의 추정방법들과 기법들이 존재하는데, 리스크값의 추정에서 중요한 과제는 수익률분포의 비대칭성 및 두꺼운 꼬리와 같은 비정규성과 관련된 문제들을 해결하는 것이다. 서론에서도 서술하였듯이 대부분의 수익률 분포는 첨도가 매우 큰 양수값을 가지며 약한 음수값의 왜도를 갖는 것이 일반적이다 (Zangari, 1996; Li, 1999; 구본일 등, 2007).

본 연구에서는 이에 대한 해결방법으로 모수적인 방법 중 정규분포를 가정하는 대신에 정규분포보다 꼬리가 두껍고 비대칭성을 가질 수 있는 치우친 t분포, 치우친 라플라스분포, 정규혼합분포를 이용하여 리스크값을 추정하는 것을 제안하였다.

그 결과 대체분포들의 모수를 추정하고 적합도 검정을 해서 리스크값을 추정했지만 실질적으로 치우친 t분포와 치우친 라플라스분포는 실제 수익률 분포와 적합성은 만족하지 못하였다. 하지만 포스코 자료의 경우는 치우친 t분포와 치우친 라플라스분포를 이용하여 추정한 리스크값이 정규분포를 가정한 리스크값 보다는 정확함을 보여주었고 그 이유는 두꺼운 꼬리와 비대칭성을 고려해 주었기 때문이다. 한편 정규혼합분포는 실제 자료의 수익률 분포와 가장 적합하였으며, 특히 현대차 자료의 경우에는 정규혼합분포를 이용하여 추정한 리스크값이 정규분포를 이용하여 추정한 리스크값 뿐만 아니라 다른 대체분포를 이용하여 추정한 리스크값보다 정확하다는 것을 모든 신뢰수준에서 보여주었다.

본 연구는 단일자산과 단순표준편차 등의 제안이 있었지만 결론적으로 실제 수익률 자료와 왜도와 첨도가 근사하고, 동시에 분포의 적합성을 만족하는 정규혼합분포의 모형하에서 추정된 리스크값이 정규분포와 다른 대체분포들을 이용한 리스크값보다 금융기관에 위험관리의 유용한 도구가 될 수 있음을 알 수 있었다. 또한 정규혼합분포를 사용함으로써 금융자산 수익률 분포를 더욱 세밀하게 모형화할 수 있고 다른 여러 가지 형태의 금융자산에도 적용할 수 있을 것이다.

참고문헌

김건우, 이홍재 (2003). <금융공학>, 경문사, 서울.

김규형 (1998). <금융기관의 위험관리>, 한국금융공학컨설팅.

남두우 (2008). <리스크값과 금융기관의 리스크관리>, 한경사, 서울.

박철용 (2006). A nonparametric additive risk model based on splines. <한국데이터정보과학회 추계학술발표회논문집>, 49-50.

윤평식, 김철중 (1998). <리스크값 시장위험관리>, 경문사, 서울.

Blattberg, R. C. and Gonedes, Nicholas, J. (1974). A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices. *The Journal of Business*, **47**, 244-280.

Duffie, D. and Pan, J. (1997). An overview value at risk. *Journal of Derivatives*, **4**, 11- 49.

Hong, Y. W. and Suh, J. S. (2008). Estimating the credit value-at-risk of Korean property and casuality insurers. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **19**, 1027-1036.

Hwang, S. Y. and Park, J. (2005). 리스크값 for Korean financial time series. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **16**, 283-288.

Jorion, P. (1997). *Value at risk*, McGraw-Hill, New York.

Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk management models. *Journal of Derivatives*, **2**, 73-84.

Li, D. X. (1999). *Value at risk based on the volatility skewness and kurtosis,* RiskMetrics Group.

Park, C. Y (2008). A genenal semiparametric additive risk model. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **19**, 421-429.

Praetz, P. D. (1972). The distribution of share price changes. *The Journal of Business*, **45**, 49-55.

Pritsker, M. (1997). Evaluating value at risk methodologies: Accuracy versus computational time. *Journal of Financial Services Research*, **12**, 201-242.

Vlaar, P. J. G. (2000). Value at risk models for dutch bond portfolios. *Journal of Banking & Finance*, 1131-1154.

Yeo, S. C. (2006). Performance analysis of 리스크값 and ES based extreme value theory. *The Korean Communications in Statistics*, **13**, 389-407.

Zangari. (1996). An improved methodology for measuring 리스크값. *RiskMetrics Monitor*, **2**, 7-25.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2010, **21**(2), 219–229

한국데이터정보과학회지

Distribution fitting for the rate of return and value at risk

Chong Sun Hong[1] · Tae Wan Kwon[2]

[12]Department of Statistics, Sungkyunkwan University

Received 11 January 2010, revised 18 March 2010, accepted 23 March 2010

Abstract

There have been many researches on the risk management due to rapid increase of various risk factors for financial assets. Aa a method for comprehensive risk management, Value at Risk (VaR) is developed. For estimation of VaR, it is important task to solve the problem of asymmetric distribution of the return rate with heavy tail. Most real distributions of the return rate have high positive kurtosis and low negative skewness. In this paper, some alternative distributions are used to be fitted to real distributions of the return rate of financial asset. And estimates of VaR obtained by using these fitting distributions are compared with those obtained from real distribution. It is found that normal mixture distribution is the most fitted where its skewness and kurtosis of practical distribution are close to real ones, and the VaR estimation using normal mixture distribution is more accurate than any others using other distributions including normal distribution.

Keywords: Kurtosis, normal mixture, rate of return, skewness.

[1] Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Sungkyunkwan University, Seoul 110-745, Korea. E-mail: cshong@skku.ac.kr
[2] Graduate student, Department of Statistics, Sungkyunkwan University, Seoul 110-745, Korea.