

순간 누출된 액체의 확산에 관한 2차 섭동 해

김명배[†], 도규형*, 한용식*, 최병일*

*한국기계연구원 플랜트안전신뢰성연구소

Second-Order Perturbation Solutions of Liquid Pool Spreading with Instantaneous Spill

MYUNGBAE KIM[†], KYUHYUNG DO*, YONGSHIK HAN*, BYUNGIL CHOI*

*Plant Safety & Reliability Division, Korea Institute of Machinery & Materials, 104, Shinsung-no, Yusong, Daejeon, 305-304, Korea

ABSTRACT

In the present work the second-order perturbation solutions of the simple physical model for liquid pool spreading is obtained for the case of instantaneous spill. To generalize the solution governing equations are non-dimensionalized, and two dimensionless parameters, dimensionless evaporation rate and aspect ratio of the initial pool, are identified to control the governing equations. The dimensional governing equations have three parameters. The second-order solution improves fairly the first-order solution for the pool volume.

KEY WORDS : Perturbation(섭동), Liquid pool(액체 풀), Instantaneous spill(순간 누출), Spreading(분산), Second-order(2차)

Nomenclature

E : evaporation rate, m/s
 g : gravity, m/s²
 H : pool height, m
 h : dimensionless height
 R : pool radius, m
 r : dimensionless radius
 T : time, s
 t : dimensionless time
 V : pool volume, m³

v : dimensionless volume
 a : $2g\Delta$, m/s²
 β : spill source rate, m³/s
 δ : aspect ratio of the initial pool
 ϵ : dimensionless evaporation rate
 ρ : liquid density, kg/m³
 ρ_s : spill surface liquid density, kg/m³

Subscripts

i : initial value
 0 : zeroth-order term
 1 : 1st-order term
 2 : 2nd-order term

[†]Corresponding author : mbkim@kimm.re.kr

[접수일 : 2010.8.10 수정일 : 2010.10.18 게재확정일 : 2010.12.17]

1. 서 론

액상의 가연성이나 유독성 물질을 취급하고 있는 산업 플랜트에서 액체가 누출되면 그 액체는 증발하면서 특정 표면을 퍼져나간다. 증발된 기체는 증기운 폭발(vapor cloud explosion)의 원인이 될 수 있다. 표면위의 액체는 풀화재(pool fire) 또는 폭발의 근거가 될 수 있다. 배관에서 분사 형태로 누출되면 분사화재(spray fire)가 된다. 연소된 가스는 연기가 되어 대기의 흐름에 의하여 주변으로 확산하게 된다. 이와 같이 산업 플랜트에서의 중대 사고는 가연성 또는 유독성 물질의 누출로부터 시작되기 때문에 누출된 액체의 퍼짐에 대한 연구는 액화수소나 LNG 플랜트 등의 위험도를 정량화하기 위하여 필수적이다.

액체의 분산과정에 대한 여러 가지 모델에 대하여 많은 수치해석적 연구가 있다¹⁻⁶⁾. 최근에는 섭동법을 이용한 준 해석적인 해법이 발표되었다. 이 해는 1차 오더의 해로써 반경에 관하여는 오차가 크지 않지만 부피에 관하여는 시간이 증가하면 상당한 오차가 발생하게 된다⁷⁾.

이러한 문제를 해결하고 보다 일반적인 해법을 얻기 위하여 지배 방정식을 무차원화 하여 주요 무차원 변수들을 파악하고 2차 섭동해까지 구하였다. 그 결과 부피에 관한 1차 해를 많이 개선시킬 수 있었다.

2. 지배 방정식 및 정식화⁶⁾

물리적으로 그리고 수학적으로 가장 간단한 모델은 중력에 의한 압력차에 의하여 액체가 퍼져나간다고 가정하는 것이다. 이 때 액체의 마찰력과 표면장력 그리고 기화에 의한 영향 등은 무시한다. 액체의 마찰력은 퍼짐을 억제하기 때문에 안전 측면에서 고려하면 마찰력을 무시하는 것이 설계의 안전계수를 높이게 된다. 퍼지고 있는 액체를 반경 R 과 균일한 높이 H 를 갖는 원형 실린더라 가정하면 지배 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dR}{dT} = \sqrt{\alpha H} \quad (1)$$

여기에서 $\alpha = 2g\Delta$ 이다. 콘크리트나 흙의 표면위를 액체가 퍼져가는 경우 $\Delta=1$ 이며, 물위를 확산해가는 경우에는 $\Delta = 1 - \rho/\rho_s$ 이다.

액체의 부피는 다음과 같이 단위면적당 증발율을 사용하여 표현된다.

$$\frac{dV}{dT} = -E\pi R^2 + \beta \quad (2)$$

여기에서 β 는 연속 누출의 경우를 의미하는 연속 누출율 이다. 따라서 순간 누출의 경우에는 $\beta=0$ 이다. 마지막으로 다음과 같은 대수 방정식이 필요하다.

$$H = V/\pi R^2 \quad (3)$$

3. 초기조건 및 해법

액체가 보관되어있는 탱크에 충격에 의하여 비교적 큰 구멍이나 틈이 발생하면, 비교적 많은 양의 액체가 순간적으로 쏟아져 나온다. 이러한 상황은 다음과 같은 초기 조건에 의하여 모델링 된다.

$$V = V_i, R = R_i, H = H_i \left(= \frac{V_i}{\pi R_i^2} \right) \text{ at } T=0 \quad (4)$$

지배방정식을 무차원화 하기 위하여 다음과 같이 무차원 변수들을 정의 한다.

$$v = V/V_i, r = R/R_i, h = H/H_i, t = T/\tau \quad (5)$$

여기에서 $\tau = \sqrt{R_i/\alpha}$ 이다. 식 (5)를 이용하여 지배방정식을 정리하면 다음과 같은 무차원화 된 지배 방정식이 얻어진다.

$$\frac{dv}{dt} = -\epsilon r^2 \quad (6)$$

$$\frac{dr}{dt} = \delta \sqrt{h} \quad (7)$$

$$h = v/r^2 \quad (8)$$

여기에서 $\epsilon = E\tau/H_i$, $\delta = \sqrt{H_i/R_i}$ 이다. 식 (6)~(8)을 지배하는 무차원 변수는 무차원 증발률에 해당하는 ϵ 과 초기 누출된 액체 풀의 종횡비에 해당되는 δ 이다. 원래의 방정식 (1)~(3)과 초기조건으로부터 액체의 확산을 지배하는 변수는 증발률과 초기 반경 및 초기 부피의 3개 인 것을 알 수 있다. 무차원화를 통하여 문제의 지배변수를 2개로 줄인 것은 큰 의미가 있다.

무차원화된 초기 조건은 다음과 같다.

$$v=1, r=1, h=1 \text{ at } t=0 \quad (9)$$

위의 식들에서 증발률 E 는 보통 매우 작은 값을 가지는데 LNG의 경우 10^{-4} 오더 이다³⁾. 따라서 자연스럽게 ϵ 을 섭동변수(perturbation parameter)로 선택하고 다음과 같이 해의 형태를 가정한다.

$$v = v_0 + \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 + \dots \quad (10)$$

$$r = r_0 + \epsilon r_1 + \epsilon^2 r_2 + \dots \quad (11)$$

$$h = h_0 + \epsilon h_1 + \epsilon^2 h_2 + \dots \quad (12)$$

식 (10)~(12)을 식 (6)~(8)에 대입하고 $O(\epsilon^2)$ 까지만 정리하면 다음의 식들이 얻어진다.

$$\frac{dr_0}{dt} = \delta \sqrt{h_0} \quad (13)$$

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{\delta}{2} \frac{h_1}{\sqrt{h_0}} \quad (14)$$

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{\delta}{2} \frac{h_2}{\sqrt{h_0}} \quad (15)$$

$$\frac{dv_0}{dt} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{dv_1}{dt} = -r_0^2 \quad (17)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = -2r_0 r_1 \quad (18)$$

$$h_0 = v_0/r_0^2 \quad (19)$$

$$h_1 = v_1/r_0^2 \quad (20)$$

$$h_2 = v_2/r_0^2 \quad (21)$$

방정식 (13)부터 (21)까지의 초기 조건을 구하기 위하여 식 (9)를 식 (10)~(12)에 적용하면 다음과 같이 무차원 변수들에 대한 초기 조건들이 얻어진다.

$$v_0 = 1, r_0 = 1, h_0 = 1 \text{ at } t = 0 \quad (22)$$

$$v_1 = 0, r_1 = 0, h_1 = 0 \text{ at } t = 0 \quad (23)$$

$$v_2 = 0, r_2 = 0, h_2 = 0 \text{ at } t = 0 \quad (24)$$

식 (13)~(21)를 주어진 초기 조건 (22)~(24)를 적용하여 풀면 다음과 같은 해를 얻게 된다.

$$r_0 = \sqrt{1+2x} \quad (25)$$

$$r_1 = \frac{(1-x)\sqrt{1+2x}}{6\delta} - \frac{1}{30\delta}(2-2x+3x^2)\sqrt{1+2x} - \frac{1}{10\delta} \quad (26)$$

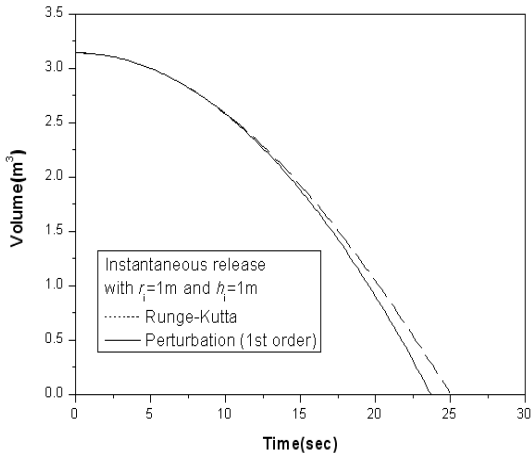


Fig. 1 Pool volume vs. time.

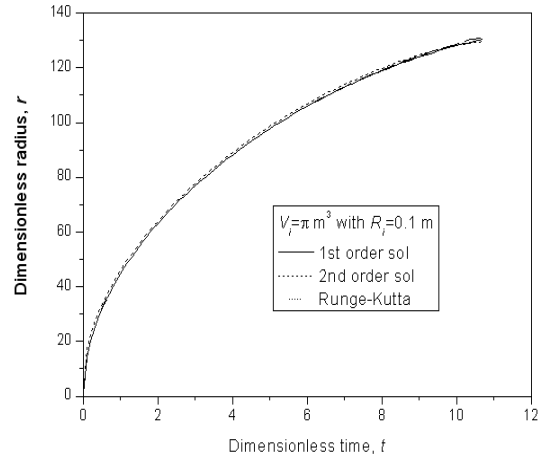


Fig. 2 Dimensionless radius vs. time with $V_i = \pi m^3$ and $R_i = 0.1 m$.

$$r_2 = -\frac{\sqrt{1+2x}}{30\delta^2} \left(\frac{4}{15} + \frac{539}{735}x + \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{x+x^2}{\sqrt{1+2x}} \right) + \frac{2}{225\delta^2} \quad (27)$$

여기에서 $x = \delta t$ 이다.

$$v_0 = 1 \quad (28)$$

$$v_1 = -(t + \delta t^2) \quad (29)$$

$$v_2 = -\frac{1}{15\delta^2} \quad (30)$$

$$\left\{ 1 + 3x - (1+2x)^{3/2} + \frac{3}{2}x^2 - 3x^3 - \frac{3}{2}x^4 \right\}$$

$$h_0 = \frac{1}{1+2x} \quad (31)$$

$$h_1 = -\frac{(1+x)t}{1+2x} \quad (32)$$

$$h_2 = -\frac{1}{15(1+2x)\delta^2} \left\{ 1 + 3x - (1+2x)^{3/2} + \frac{3}{2}x^2 - 3x^3 - \frac{3}{2}x^4 \right\} \quad (33)$$

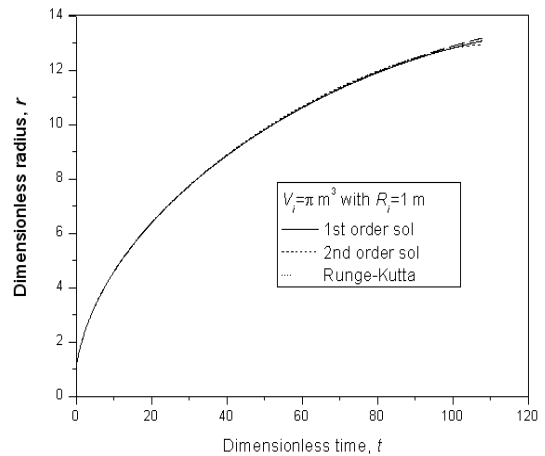


Fig. 3 Dimensionless radius vs. time with $V_i = \pi m^3$ and $R_i = 1.0 m$.

4. 결과 및 토의

부피에 관한 1차 섭동해의 결과⁷⁾를 Fig. 1 에 제시 하였는데, 시간이 증가하면 수치해와 1차 섭동해의 차이가 뚜렷하게 커지는 것을 알 수 있다. 이러한 차이는 시간이 증가하면서 생략된 항들을 무시할 수 없게 되는 secular term⁸⁾ 때문이다. 부피에 관한 1차 해는 식 (28), (29)로부터 다음과 같이 표현된다.

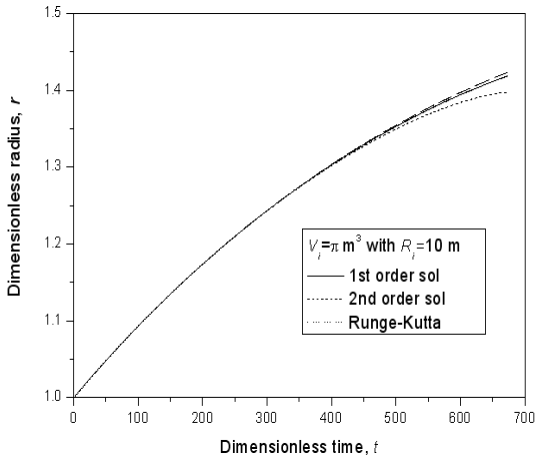


Fig. 4 Dimensionless radius vs. time with $V_i = \pi m^3$ and $R_i = 10.0 m$.

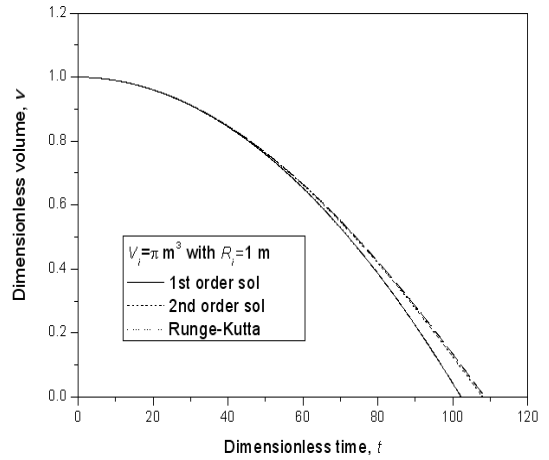


Fig. 6 Dimensionless volume vs. time with $V_i = \pi m^3$ and $R_i = 1.0 m$.

$$v = 1 - \epsilon(t + \delta t^2) \quad (34)$$

식 (34)에서 두 번째 항은 첫 번째 항의 보정 개념으로 도입된 것으로 당연히 두 번째 항은 첫 번째 항보다 작아야 한다. 그런데 만일 시간이 증가하여 두 번째 항의 secular term 인 $\epsilon t, \epsilon t^2$ 의 오더가 1에 근접하거나 크게 되면 이 해는 오차를 유발하게 된다. 이 문제를 해결하기 위하여 2차 항까지 포함하

여 계산한 결과를 제시하고자 한다.

반경에 관한 결과인 Fig. 2에서 Fig. 4는 초기부피를 πm^3 으로 고정하고 초기 반경을 0.1, 1.0, 10.0 m로 변경시킨 것 이다. 이로부터 1차 해와 2차 해의 차이가 크지 않음을 알 수 있다. 또한 주요 변수의 하나인 초기 반경의 변화를 섭동해가 잘 수용하고 있음을 알 수 있다. 2차 해와 수치해를 비교하면 확산의 후기에서는 초기 반경이 큰 경우, 즉 Fig. 4, 2

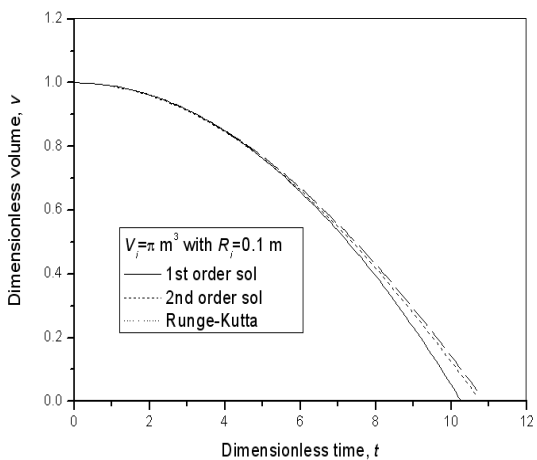


Fig. 5 Dimensionless volume vs. time with $V_i = \pi m^3$ and $R_i = 0.1 m$

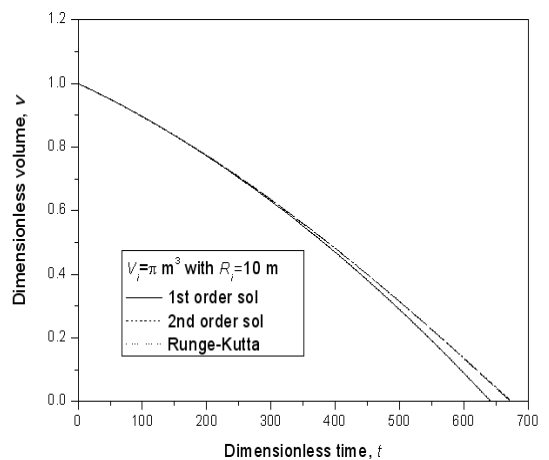


Fig. 7 Dimensionless volume vs. time with $V_i = \pi m^3$ and $R_i = 10.0 m$.

차 해와 수치해의 차이가 큰 것을 알 수 있다. 시간이 증가하면 2차 해에서도 secular 항에 대한 문제가 나타나기 때문이다. 반경에 관해서는 1차 해와 수치해의 차이가 근소하였기 때문에 2차 해의 의미가 크지 않지만 부피에 대하여는 전혀 다르게 나타나게 된다.

부피에 관한 결과인 Fig. 5에서 Fig. 7로부터 1차 해의 단점이 상당히 해결 된 것을 알 수 있다. 즉 시간이 증가하여도 2차 해의 경우 1차 해와 달리 수치해와 거의 비슷한 값을 가지게 된다. 초기 반경이 증가 할수록 2차 해와 수치해가 잘 일치하게 되며 Fig. 7로부터 수치해와 2차 섭동해가 거의 일치하고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

순간 누출된 액체의 분산을 지배하는 방정식을 무차원화 하여 무차원 증발률과 순간 누출된 액체 풀의 종횡비가 이 문제를 지배하는 2개의 무차원 변수임을 알게 되었다. 단위를 가지는 지배 방정식과 초기조건으로부터 액체의 확산을 지배하는 변수는 증발률과 초기 반경 및 초기 부피의 3개 인 것을 알 수 있는데, 무차원화를 통하여 문제의 지배변수를 2개로 줄인 것은 큰 의미가 있다.

무차원화 된 방정식을 이용하여 2차 섭동해를 구하였다. 반경에 관하여 2차 해와 1차 해의 차이가 별로 없지만, 부피의 경우에는 1차 해에 비하여 2차 해가 크게 개선된 결과를 주었다. 섭동해에 미치는 주요 변수의 변화를 검증하기 위하여 초기 반경이 100배 차이가 있는 조건들에 대하여 2차 섭동해를 구한 결과, 섭동해가 다양한 조건에서도 사용될 수 있음을 알았다.

본 연구에서 사용된 모델과는 다른 얇은 층 (shallow layer)⁴⁻⁵⁾ 모델은 풀의 속도와 높이를 독립변수인 시간과 풀의 반경에 대해서 구하는 것으로 편미분 방정식으로 기술 된다. 이 모델에서는 풀의 선단이 중심으로부터 박리(seperation) 되는 현상이 허용되어 풀의 반경을 정의하는데에 고려

할 부분을 추가시킨다. 풀의 반경은 풀화재의 크기와 관련된 가장 중요한 요소이기 때문이다.

참 고 문 헌

- 1) A.G. Venetsanos and J.G. Bartzis, "CFD modelling of large-scale LH2 spills in open environment", Proceedings of International Conference on Hydrogen Safety, 2005, pp. 125-136, Pisa, Italy.
- 2) W. Stein and D.L. Ermak, "One-dimensional numerical fluid dynamics model of the spreading of liquefied gaseous fuel (LGF) on water", Lawrence Livermore National Laboratory, UCRL-53078, 1980.
- 3) K. Verfondern and B. Dienhart, "Experimental and theoretical investigation of liquid hydrogen pool spreading and vaporization", Int. J. Hydrogen Energy, Vol. 22, No. 7, 1997, pp. 649-660.
- 4) J. Brandeis and E. Kansa, "Numerical simulation of liquefied fuel spills: I. Instantaneous release into a confined area", Int. J. Num. Methods in Fluids, Vol. 3, 1983, pp. 333-345.
- 5) J. Brandeis and D. Ermak, "Numerical simulation of liquefied fuel spills: II. Instantaneous and continous LNG spills on an unconfined water surface", Int. J. Num. Methods in Fluids, Vol. 3, 1983, pp. 347-361.
- 6) F. Briscoe and P. Shaw, "Spread and evaporation of liquid", Prog. Energy Comb. Sci., Vol. 6, 1980, pp. 127-140.
- 7) 김명배, 도규형, 한용식, 최병일, "증발하는 액체의 퍼짐에 관한 섭동해", 한국연소학회 춘계학술대회 논문집, 2010, pp. 177-181.
- 8) A. H. Nayfeh, "Introduction to perturbation techniques", JOHN WILEY & SONS, New York, 1981, p. 113.