

# 수송확률밀도함수 모델을 이용한 난류비에혼합 파일럿 안정화 화염장 해석

이정원\* · 김용모\*\*\*

## Numerical Study on Turbulent Nonpremixed Pilot Stabilized Flame using the Transported Probability Density Function Model

Jeongwon Lee and Yongmo Kim

### ABSTRACT

The transported probability density function(PDF) model has been applied to simulate the turbulent non-premixed piloted jet flame. To realistically account for the mixture fraction PDF informations on the turbulent non-premixed jet flame, the present Lagrangian PDF transport approach is based on the joint velocity-composition-turbulence frequency PDF formulation. The fluctuating velocity of stochastic fields is modeled by simplified Langevin model(SLM), turbulence frequency of stochastic fields is modeled by Jayesh-Pope model and effects of molecular diffusion are represented by the interaction by exchange with the mean (IEM) mixing model. To validate the present approach, the numerical results obtained by the joint velocity-composition-turbulence frequency PDF model are compared with experimental data in terms of the unconditional and conditional means of mixture fraction, temperature and species and PDFs.

**Key Words :** Hybrid FV/transported composition PDF approach, Turbulent nonpremixed piloted jet flame, Turbulence-chemistry interaction, Fluctuations of scalar dissipation rate, Probability density function

### 기 호 설 명

Alphabets	Greeks
$C_x$ : Model constants of $x$	$\alpha$ : Composition
$f$ : Probability density function(PDF)	$\rho$ : Density
$F$ : Mass density function(MDF)	$\tau_{ij}$ : Reynolds stress tensor
$J_\alpha$ : Scalar diffusion flux	$\phi$ : composition vector
$k$ : Turbulent kinetic energy	$\Phi$ : sample space of composition vector $\phi$
$P$ : Turbulence production	$\omega$ : Turbulence frequency
$p$ : pressure	$\Theta$ : Sample space of turbulence frequency $\omega$
$S_x$ : Source term of $x$	$\Omega$ : Conditional averaged turbulence frequency
$U$ : velocity	
$V$ : sample space of $U$	<b>Subscripts</b>
$W$ : Weiner process by Gaussian random number generator	' : fluctuating part of velocity and composition vector

## 1. 서론

지난 20년간 RANS(Reynolds averaged Navier-

Stokes) 난류모델기반의 연소모델인 Flamelet 모델 [1-3], Conditional Moment Closure(CMC)모델[4-6], 그리고 수송 확률밀도함수(PDF transport)모델[11-20] 들은 난류화염구조 해석에 있어서 많은 발전을 하였으며 특히 Flamelet모델과 CMC 모델은 수치효율성을 유지하면서 난류 화염장을 해석할 수 있기 때문에 국·내외적으로 많은 연구가 진행되어왔다.

\* 한양대학교 기계공학과 대학원

\*\* 한양대학교 기계공학과

† 연락저자, ymkim@hanyang.ac.kr

확률밀도함수를 가정하고 보존 스칼라를 기반으로 하는 화염편 및 CMC 난류연소모델과는 달리 수송확률밀도함수(Transported PDF) 모델은 난류 화염장에서 발생하는 국부적인 소염과 재점화 현상, 난류와 화학반응의 상호작용, 연료분무가 난류연소에 미치는 영향, 그리고 난류 부상화염 및 부분 예혼합 화염을 특별한 가정이나 모델이 없이 제대로 예측할 수 있는 이점을 가지고 있다[7-12].

이러한 수송확률밀도함수 모델은 공간, 속도 및 조성을 가지는 다차원의 종속 변수로 구성되어 있기 때문에 일반적인 Eulerian deterministic formulation으로는 방정식을 풀기 어려운 단점이 있다. 이를 위해 개념적인 입자를 도입하여 등가의 Stochastic Differential Equation(SDE)를 이용하는 입자 기반의 Monte Carlo 수치모사를 통하여 구현하게 된다. 완전 입자 기반의 수치모사모델은 난류 화염장을 해석하는데 있어 입자의 속도 샘플 공간 및 조성 샘플 공간의 입자의 숫자 및 통계적 처리과정, 수치격자에 따라 상대적으로 큰 통계적 오차, 바이어스 오차, 차분 오차가 발생하는 문제점이 있다. 이러한 세가지 오차를 중에 속도공간에서 발생하는 바이어스 오차와 차분 오차를 줄이기 위하여 유한체적법과 수송확률밀도 모델을 결합한 하이브리드 FV/PDF Monte Carlo 해법이 제안되었다[11,12].

수송확률밀도함수 모델은 현재 RANS 뿐만 아니라 LES기반의 유동해석모델로의 적용성이 확장되어 있으며 난류 예혼합 및 비예혼합, 부분예혼합 화염에 모두 적용되어 그 예측능력이 검증되고 있다[13-15].

본 연구에서는 RANS 기반의 하이브리드 FV/수송 확률밀도함수 모델을 이용하여 기존의 가정된 확률밀도함수를 적용할 수 없는 부분 예혼합 영향을 가지는 난류 비예혼합 파일럿 제트 화염장[16]에 적용하였다. 수송 확률밀도함수모델이 예측하는 확률밀도함수 분포는 실험에 의해 계측된 확률밀도함수 분포와 비교되었으며 그 예측능력을 검증하였다. 또한 이렇게 예측된 확률밀도함수의 분포가 평균 화염장에 미치는 영향을 분석하기 위하여 속도 및 혼합분율의 평균 및 난동치, 평균 온도 및 화학종의 평균농도장 그리고 이러한 스칼라의 조건부 평균을 실험치와 비교하여 수송 확률밀도함수모델의 예측능력을 체계적으로 검증하였다. 본 연구에서는 상세화학반응을 고려함에 있어서 수치효율성을 배가하기 위하여 난류화염구조를 화염편 library를 이용하여 구성하였다.

## 2. 지배 방정식

본 연구에서 사용한 하이브리드 FV/수송 확률밀도 모델의 지배방정식과 수치계산절차는 참고문헌

[11]에 상세히 나타나 있으므로 아래에 간략히 기술하였다.

### 2.1. Lagrangian 수송 확률밀도 모델

Joint Velocity-Composition-Turbulence frequency PDF 는 다음과 같이 정의된다.

$$\langle \rho \rangle \tilde{f}(V, \Phi, \Theta; x, t) \equiv F(V, \Phi, \Theta; x, t) = \rho \langle \delta(u - V) \delta(\phi - \Phi) \delta(\omega - \Theta) \rangle \quad (1)$$

여기서,  $V$ ,  $\Phi$ ,  $\Theta$ 는 각각 속도  $u$ , 조성  $\phi$ , 난류진동수  $\omega$ 의 샘플공간의 변수를 나타내며,  $f$ ,  $F$ ,  $\delta$ 는 각각 질량가중 확률밀도함수와 질량밀도함수, 델타 함수를 나타낸다.

이러한 질량가중 확률밀도함수의 수송방정식[11]은 다음과 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \rho \rangle \tilde{f}}{\partial t} + V_j \frac{\partial \langle \rho \rangle \tilde{f}}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial V_j} + \frac{\partial}{\partial \Phi_\alpha} (\langle \rho \rangle S_\alpha \tilde{f}) = \\ \frac{\partial}{\partial V_j} \left( \left\langle -\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial p'}{\partial x_j} \middle| V, \Phi \right\rangle \right) + \frac{\partial}{\partial \Phi_\alpha} \left( \left\langle \frac{\partial J_i^\alpha}{\partial x_i} \middle| V, \Phi \right\rangle \tilde{f} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $\tilde{\cdot}$ ,  $\langle \cdot \rangle$ 는 각각 Favre와 Reynolds 평균값을 의미하며,  $|$ 는 조건부 평균을 의미한다. 식 (2)에서 왼쪽의 항들은 모델링을 필요로 하지 않으며, 단지 오른쪽의 항들만이 모델이 필요하게 된다. 식 (2)의 우변 항들을 모델링한 후의 joint velocity-composition-turbulence frequency PDF 수송방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + V_j \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial V_j} + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial \Phi_\alpha} (S_\alpha \tilde{f}) = \\ \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} C_0 \right) \Omega \frac{\partial}{\partial V_i} [(V_i - \bar{U}_i) \tilde{f}] + \frac{1}{2} C_0 k \Omega \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial V_i \partial V_i} + \\ \Omega \frac{\partial}{\partial \theta} (\theta S_\omega \tilde{f}) + C_3 \Omega \frac{\partial}{\partial \theta} [(\theta - \bar{\omega}) \tilde{f}] + \\ C_3 C_4 \Omega \theta \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} C_\phi \Omega \frac{\partial}{\partial \Phi} [(\Phi - \bar{\phi}) \tilde{f}] \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)에서  $\tilde{f}$ 는 속도, 난류 주파수, 조성, 공간 및 시간의 다차원의 종속변수이며, 등가의 유체입자의 stochastic differential equation(SDE)을 이용하여 표현하며 대응하는 유체입자 SDE는 아래와 같다.

입자 운동(Position motion)

$$dX = (\bar{U} + u') dt \quad (4)$$

**Table 1.** Model constants

$C_0$	$C_\Omega$	$C_{\omega 1}$	$C_{\omega 2}$	$C_3$	$C_4$	$C_\phi$
2.1	0.6893	0.56	0.9	1.0	0.25	2.0

### 속도 모델(Velocity model)

$$du'_i = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial (\langle \rho \rangle \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} dt + u'_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} dt - \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} C_0 \right) \Omega u'_i dt + (C_0 k \Omega)^{1/2} dW_i \quad (5)$$

### 난류 주파수 모델(Turbulence frequency model)

$$d\omega = -C_3(\omega - \tilde{\omega})\Omega dt - S_\omega \Omega \omega dt + (2C_3 C_4 \tilde{\omega} \Omega) dW \quad (6)$$

### 혼합 모델(Mixing model)

$$d\phi = -\frac{1}{2} C_\phi \frac{\varepsilon}{k} (\phi - \tilde{\phi}) dt \quad (7)$$

여기서, 모델상수는 Table 1에 나타나 있으며,  $W$ 는 isotropic Wiener process,  $k$ 는 난류운동에너지( $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ ),  $\Omega$ 는 조건 평균된 난류 주파수( $\Omega = C_\Omega \frac{\langle \rho \omega | \omega \geq \tilde{\omega} \rangle}{\langle \rho \rangle}$ ),  $S_\omega$ 는 난류 주파수의 생성항( $S_\omega = C_{\omega 2} - C_{\omega 1} \frac{P}{k\Omega}$ ),  $P$ 는 난류 생성항( $P = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}$ )을 나타낸다.

## 2.2. 수치계산 절차

Joint composition PDF 모델의 수치계산은 각각 FV system과 Particle system으로 크게 구성되어 있으며 FV system에서는 평균 속도장과 압력장을 계산하고, Particle system에서는 변동 속도, 난류 주파수, 화학조성, 밀도, 난류응력을 계산하게 된다.

Particle system으로부터 FV system으로의 화학조성 및 열물성치의 평균값 및 변동값은 다음의 식에 의해 구해진다.

$$\tilde{\phi}_i = \frac{\sum_{k=1}^n w_k \phi_{i,k}}{\sum_{k=1}^n w_k} \quad (8)$$

$$\tilde{\phi}_i'^2 = \frac{\sum_{k=1}^n w_k (\phi_{i,k} - \tilde{\phi}_i)^2}{\sum_{k=1}^n w_k} \quad (9)$$

여기서  $\omega_k$ 는  $k$  번째 입자의 밀도,  $\phi_{i,k}$ 는  $k$  번째 입자의  $i$  번째 조성을 나타낸다.

## 3. 결과 및 검토

본 연구에서는 Lagrangian Joint velocity-composition-turbulence frequency PDF 접근법의 검증계산으로 Sydney 난류 비에혼합 piloted 제트 화염중 A 화염을 선택하였다. Sydney piloted A 화염에 대한 실험조건이나 실험결과 데이터는 참고문헌[16]에 자세히 기술되어 있으므로 아래에 간단히 실험조건을 설명한다.

piloted A 화염은 CH4을 연료를 사용하여 연료노즐의 지름( $D_j$ )은 7.2 mm이고 속도( $U_j$ )는 36 m/s이다. Pilot 화염부분은 연료와 공기의 화학당량비 조건(화학당량적 혼합분률  $Z_{st} = 0.055$ )의 완전 연소상태의 조성비와 온도로 공급되며 pilot의 속도( $U_p$ )는 15 m/s이며, 동축공기( $U_c$ )는 15 m/s로 공급된다. 계산격자는 축방향과 반경방향으로 100×80의 격자를 사용하였다. 초기에 각 계산 셀당 입자의 수는 50개로 하였다. FV code의 time step은  $1 \times 10^{-6}$  s이며, Lagrangian 수송 확률밀도함수 모델에서는 particle code의 time step은 FV code로부터 전달된 평균속도를 기준으로 입자의 속도를 계산하여 CFL수 0.4 기준의 local time stepping을 사용하였다.

또한 본 연구에서는 Joint velocity-composition-turbulence frequency 수송 확률밀도 모델의 수치계산시간을 단축하기 위해 Gri-mech 2.11의 상세화학반응 메커니즘[17]과 이를 이용한 화염편 library을 이용하여 계산을 수행하였다. 입자의 스칼라 소산율은 혼합분율의 변화량을 각 입자로 선행보간값과 각 입자의 난류 주파수를 이용하여 고려하였다.

### 3.1. 입구조건

연료와 pilot 입구 및 동축 공기의 속도 및 난류물성치는 실험값[16]으로부터 축방향 평균 속도 및 변동속도를 선행보간을 하여 사용하였으며, 반경방향 및 각도방향의 변동속도는 등방성 가정을 하여 축방향의 변동속도와 동일하게 사용하였다. 난류응력 성분은 축방향과 반경방향의 응력성분만 고려하였고 그 값은  $0.5 u'$ 으로 가정하였다.

### 3.2. 해석결과 및 고찰

Fig. 1은 축방향 및 반경방향의 평균 속도와 변동속도를 각 축방향 위치( $x/D = 20, 30, 50$ )에서의 반경방향의 분포를 나타낸 것이다. 수송확률밀도함수 모델을 이용한 계산결과는 축방향의 평균 속도와 변동속도가 실험치와 비교하여 모든 위치에서

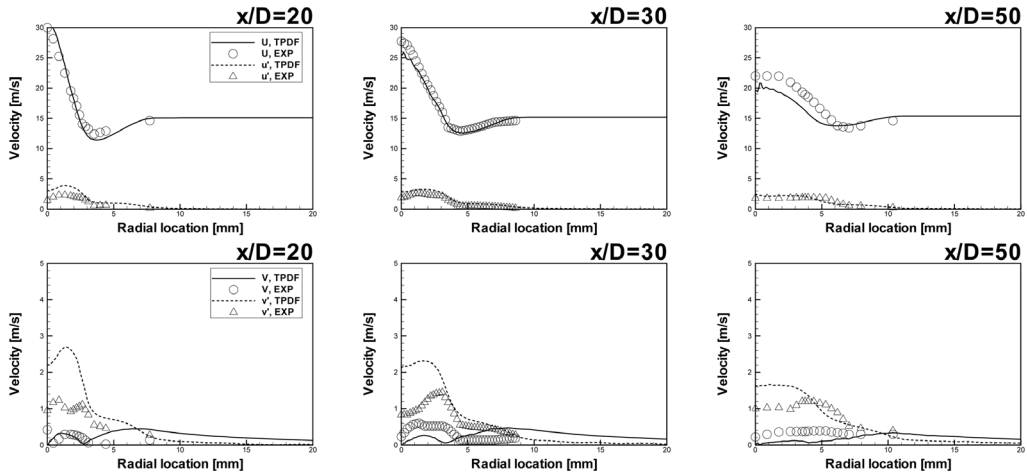


Fig. 1. Radial profiles of mean and fluctuating velocities for different axial locations ( $x/D= 20, 30, 50$ ).

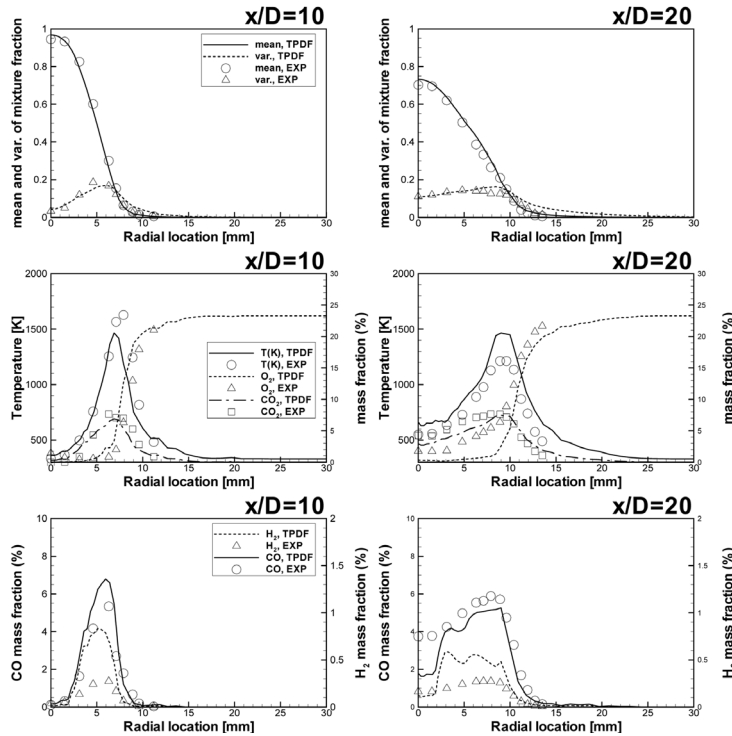
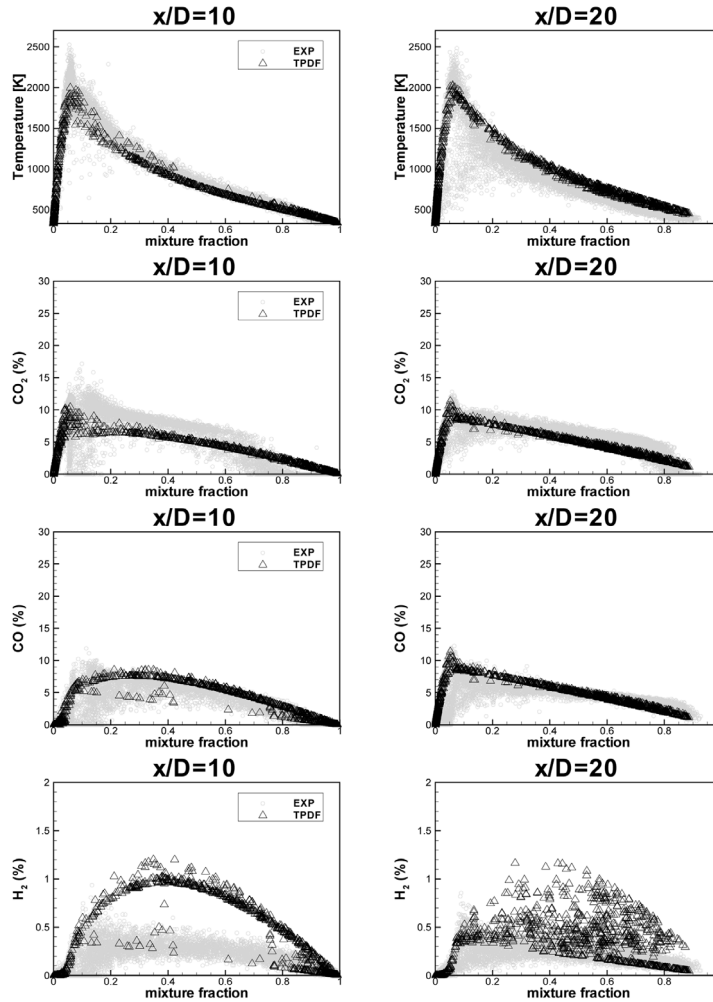


Fig. 2. Radial profiles of mean and variance of mixture fraction (top), temperature and mass fraction of major species ( $O_2, CO_2$ ) (middle), and mass fraction of  $CO$  and  $H_2$  (bottom) for different axial locations ( $x/D= 10, 20$ ).

잘 예측하고 있다. 그러나 반경방향의 평균 속도는 상대적으로 실험치에서 많이 이탈해있는 것으로 나타난다. 이는 입구조건에서 난류강도를 등방성으로 가정하여 반경방향과 각도방향의 변동 속도성분을 주었기 때문에 실제 입구조건에서는 비등방성의 난류강도의 특성이 고려되지 않아서 반경방향의 평균 속도와 변동 속도가 실험치와 많은 차이를 보이게 된 것으로 사료된다. 이는 반대로 축방향을 평균

및 변동 속도는 실험에 의한 정확한 값을 입구조건으로 부여하여 상대적으로 실험치와 잘 일치하는 것으로 볼 수 있다. 따라서, 수송확률밀도함수 모델에서 입구조건이 가장 중요한 예측능력을 개선하는 인자로 사료된다.

Fig. 2는 혼합분율의 평균 및 변동량, 평균 온도 및 농도장의 반경방향 분포를 각 축 방향 위치에서 나타낸 것이다. 그림에서 볼 수 있듯이 각 축방향 위



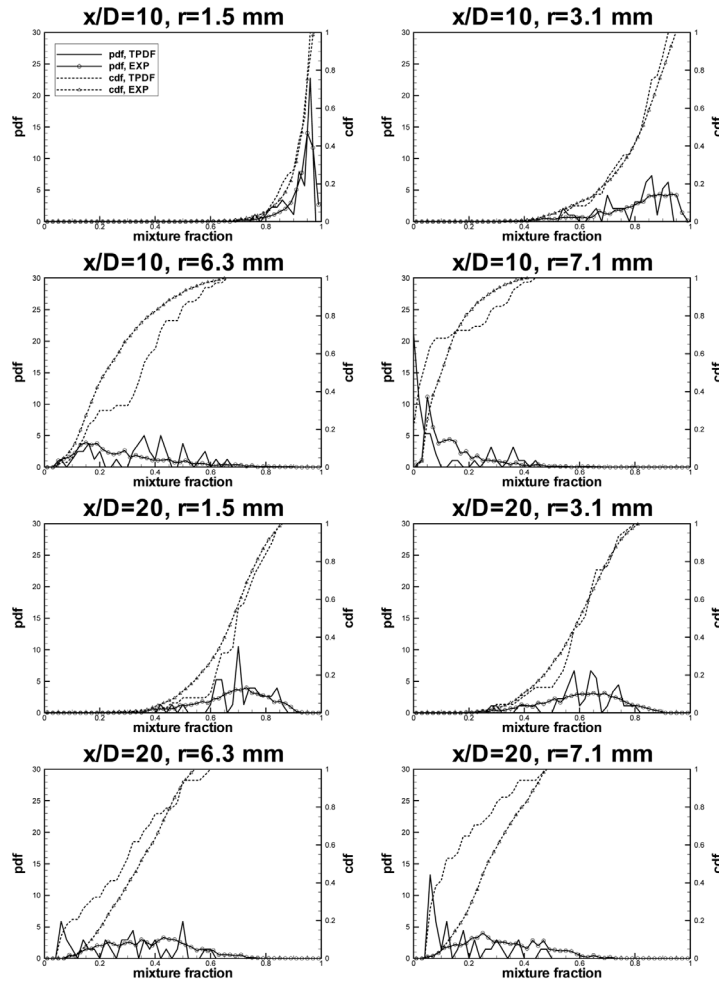
**Fig. 3.** Comparisons between computed and measured scattering data of temperature and mass fraction of  $\text{CO}_2$ ,  $\text{CO}$  and  $\text{H}_2$  for different axial locations ( $x/D = 10, 20$ ).

치에서의 혼합분율의 평균 및 변동성분을 실험치와 비교하여 매우 잘 예측하고 있음을 알 수 있다. 이는 본 연구에서 수송확률밀도함수 모델을 난동 속도 모델과 혼합 모델이 난류 비에혼합 파일럿 화염을 계산하는데 큰 무리가 없음을 보여준다. 그러나 이러한 정확한 혼합분율 분포의 예측에도 불구하고 화학종의 결과에 있어서는 상대적으로 예측능력이 떨어지고 있음을 보여준다.  $x/D = 10$ 인 위치에서는 혼합분율 및 온도,  $\text{H}_2$ 를 제외한 화학종이 실험치와 잘 일치하고 있음을 보여준다. 그러나  $x/D = 20$ 인 위치에서는 상대적으로  $\text{O}_2$ ,  $\text{H}_2$  및  $\text{CO}$ 의 화학종의 분포가 반경방향으로 10 mm 이하에서 실험치에 비해 많이 이탈한 것으로 예측되었다. 이는 혼합분율의 정확한 예측에도 불구하고 Gri-mech 2.11 기반의 상세 화학반응기구를 이용한 화염편 library가 실험에 의한 화염구조와 상이한 구조를 가지고 있기 때문

인 것으로 사료된다. 이러한 특성은 Fig. 3에서 확인할 수 있다.

Fig. 3은 수송확률밀도함수 모델과 실험의 화염 구조를 각 축방향 위치에서 나타내었다. 그림에서 볼 수 있듯이,  $x/D = 10$ 인 위치에서는 실험에 의한 화염 구조와 예측된 화염구조가 비교적 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. 때문에  $x/D = 10$ 인 경우의 평균 스칼라 장이 실험치와 유사한 결과를 보일 수 있음을 뒷받침한다. 그러나  $\text{H}_2$ 의 경우에는 다른 화학종과 달리 모든 혼합분율 구간에서 과대예측하고 있음을 보여준다. 이는 Gri-mech 2.11의 상세화학반응기구를 이용한 화염편 구조가 실제 화염구조와는 일치하지 않는 특성에서 기인한다.

$x/D = 20$ 인 위치에서는 실험에 의하면 상류( $x/D = 10$ )와 비교하여 화염구조에서 국부소멸이 활발하게 일어나고 있음을 볼 수 있지만, 본 연구에서 사용



**Fig. 4.** Comparisons between computed and measured probability density function (PDF) and cumulative distribution function (CDF) on mixture fraction space for different axial and radial locations ( $x/D = 10, 20$  &  $r = 1.5$  mm, 3.1 mm, 6.4 mm, 7.1 mm).

한 화염편 구조에서는 실험에서 보이는 국부소염을 예측하지 못 하였기 때문에 평균 스칼라장에서 측정 값과 많이 차이를 보이고 있음을 알 수 있다. 이는 본 연구에서 사용한 스칼라 소산률의 변동 모델과 화염편 구조가 국부소염을 예측하는데 한계가 있음을 보여주며, 스칼라 소산율에 대한 stochastic 모델과 상세화학 생성항을 직접 적분하거나 ISAT과 같은 알고리즘을 적용한다면 많은 예측능력에 개선을 볼 수 있을 것으로 예상된다.

Fig. 4는 수송확률밀도함수 모델과 실험에서 확률밀도함수 및 누적분포함수를 각각 축방향 및 반경방향 위치에서 비교하여 나타내었다. 그림에서 볼 수 있듯이 수송확률밀도함수 모델에 의해 예측된 혼합분율의 확률밀도함수는 실험치와 비교하여 매우 잘 예측하고 있음을 볼 수 있다. 본 연구에서 사용

한 수송확률밀도함수 모델은 실제 확률밀도함수를 잘 모사할 수 있음을 보여준다. 이는 난류 비예혼합 화염의 해석에서 많이 적용되는 화염편 모델이나 CMC모델에서 가정된 혼합분율의 확률밀도함수가 적용될 수 없는 화염에서는 한계를 가지는 반면, 수송확률밀도함수 모델은 혼합분율의 확률밀도함수를 직접 예측함으로써 기존의 모델이 가지는 한계를 극복할 수 있는 일반성을 가지는 해석모델임을 알 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서 사용한 Lagrangian 수송PDF 모델에 의한 Sydney Piloted Flame A에 대한 수치계산 결과로부터 얻은 결론을 아래에 요약하였다.

1) 본 연구에서 수송PDF 난류연소모델은 실험치와 비교하여 전반적으로 속도장 및 혼합분율의 평균 및 난동치, 확률밀도함수를 잘 예측하였다.

2)  $x/D = 10$ 인 위치에서는 평균 스칼라장이 비교적 실험치와 잘 일치하였지만,  $x/D = 20$ 인 위치에서는 혼합분율과 확률밀도함수의 정확성에 비교하여 평균 스칼라장이 상대적으로 실험치에 비하여 많이 이탈되었다. 이는 본 연구에서 사용한 상세화학반응 기구와 화염면 library의 화염구조 및 스칼라 소산률의 변동 모델의 한계에 기인하는 것으로 사료된다.

3) 수송PDF 모델이 기존의 가정된 확률밀도함수를 사용하는 모델에 비해 상대적으로 높은 예측정확도를 가지는 이유는 혼합분율공간에 대한 확률밀도함수의 형상을 가정하지 않고 직접 예측할 수 있는 본질적인 장점을 가지고 있기 때문으로 사료된다.

4) 본 연구에서 사용한 유체입자 SDE에서의 모델 상수의 영향에 대한 민감도 분석이나 복잡한 혼합모델을 사용하였을 때의 차이점에 대한 해석을 수행 중에 있다. 또한 수송PDF 난류연소모델에서 상세화학반응을 직접적으로 계산하는 ISAT(In Situ Adaptive Tabulation) 알고리즘과 스칼라 소산률의 stochastic differential equation(SDE)를 적용한다면 더 예측능력을 높일 수 있을 것으로 사료된다.

## 후 기

이 논문은 2008년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업 연구임. (No. D00103)

## 참고문헌

- [1] Peters N, 2000, Turbulent Combustion(Cambridge: Cambridge University Press)
- [2] Pitsch, H and Peters, N, "A Consistent flamelet formulation for non-premixed combustion considering differential diffusion effects", Combustion and Flame, 1998, Vol. 114, pp. 26-40
- [3] Kim S K, Kang S M, Kim Y, "Flamelet Modeling for Combustion Processes and NO<sub>x</sub> Formation in the Turbulent Nonpremixed CO/H<sub>2</sub>/N<sub>2</sub> Jet Flames", Combustion Science and Technology, 2001, Vol. 168, pp. 47-83
- [4] Klimenko A Y and Bilger R W, "Conditional moment closure for turbulent combustion", Prog. Energy Combust. Sci., 1999, Vol. 25, pp. 595-687
- [5] Sreedhara S. and Huh K.Y., "Modeling of turbulent, two-dimensional nonpremixed CH<sub>4</sub>/H<sub>2</sub> flame over a bluff-body using first- and second- order elliptical conditional moment closures", Combust. Flame, 2005, Vol. 143, pp. 119-134
- [6] Kim G, Kim Y, Bilger R W and Cleary M J, "Conditional Moment Closure and Transient Flamelet Modeling for Detailed Structure and NO<sub>x</sub> Formation Characteristics of Turbulent Nonpremixed Jet and Recirculating Flames", Combust. Theory Modelling, 2007, Vol. 11, No. 4, pp. 527-552
- [7] S. B. Pope, "Lagrangian PDF methods for turbulent reacting flows", Annu. Rev. Fluid. Mech., 1994, Vol. 26, pp. 23-63
- [8] P. Jenny, M. Muradoglu, K. Liu, D. A. Caughey, "PDF Simulations of a Bluff-Body Stabilized Flow", JCP, 2001, Vol. 169, pp. 1-23
- [9] M. S. Anand, A. T. Hsu, S. B. Pope, "Calculations of swirl combustors using joint velocity-scalar probability density function method", AIAA J., Vol. 35, 1997, pp. 1143-1150
- [10] S. B. Pope, "PDF methods for turbulent reactive flows", Prog. Energy Combust. Sci., 1985, Vol. 11, pp. 119-192
- [11] M. Muradoglu, S. B. Pope, D. A. Caughey, "The Hybrid Method for the PDF Equations of Turbulent Reactive Flows: Consistency Conditions and Correction Algorithms", JCP, 2001, Vol. 172, pp. 841-878
- [12] P. Jenny, S. B. Pope, M. Muradoglu, D. A. Caughey, "A Hybrid Algorithm for the Joint PDF Equation of Turbulent Reactive Flows", JCP, 2001, Vol. 166, pp. 218-252
- [13] M.R.H. Sheikhi MRH, P. Givi, S.B. Pope, "Velocity-scalar filtered mass density function for large eddy simulation of turbulent reacting flows", Physics of Fluids, 2007, Vol. 19, No. 9, Art. No. 095106
- [14] M.R.H. Sheikhi, P. Givi and S.B. Pope, "Frequency-Velocity-Scalar Filtered Mass Density Function for Large Eddy Simulation of Turbulent Flows", Physics of Fluids, 2009, 21, 075102
- [15] D.H. Rowinski, S.B. Pope, "PDF calculations of piloted premixed jet flames", Combustion Theory and Modelling, (submitted), 2010
- [16] University of Sydney webpage. <http://sydney.edu.au/engineering/aeromech/thermofluids/piloted.htm>
- [17] Gri-mech 2.11, [http://www.me.berkeley.edu/gri\\_mech/](http://www.me.berkeley.edu/gri_mech/)