한국정밀공학회지 제 27권 3호 pp. 33-40 March 2010 / 33
Journal of the Korean Society for Precision Engineering Vol. 27, No. 3, pp. 33-40

광학식 장거리 계측을 위한 다중영점 광빔의 영점 배치에 관한 기초 이론

Fundamental Theory on the Zeros Distribution of Multizeros Optical Beam for Long-range Optical Measurement Applications

후지모토 이쿠마츠 [1,✉], 사토 세이치 [2], 쿠리하라 토루 [2], 안도 시게루 [2], 김민영 [3]
Ikumatsu Fujimoto [1,✉], Seichi Sato [2], Toru Kurihara [2], Sigeru Ando [2] and Min Young Kim [3]

1 CREST: 동경대학교 정보이공학과 (Department of Information Physics and Computing, CREST: The University of Tokyo)
2 동경대학교 정보이공학과 (Department of Information Physics and Computing, The University of Tokyo)
3 경북대학교 전자전기컴퓨터학부 (School of Electrical Engineering and Computer Science, Kyungpook National University)
✉ Corresponding author: if6500kr@yahoo.co.jp Tel:+81-480-65-2711

Manuscript received: 2009.6.1 / Revised: 2009.8.1,11.29 / Accepted: 2009.12.10

Multizeros(multiple order zeros) optical beams which belong to the Laguerre-Gaussian beams, have rotational phase and conically-shaped amplitude structures around multizeros points in their phase and amplitude profiles, respectively. Especially, they have their own characteristics that the multizero points do not vanish over free-space propagation. Therefore, they are expected to be adequate for the applications of long-range optical measurement by using their multizero points as optical markers for the deformation sensing. In this paper, fundamental properties of multizeros optical beams for long-range optical measurement applications are investigated and clarified. In particular, the mathematical investigations are described on the characteristics of multizeoros optical beams such as (1) separation of a multizero into isolated single order zeros, (2) topological charge of zeros distribution which are induced by superposing them. And also the outline of a fundamental experiment and its result are explained briefly.

Key Words: *Laguerre-Gaussian Beam* (라게이르-가우스 빔), *Multizeros Optical Beam* (다중 영점 광 빔), *Multizeros* Point (다중 영점), Optical Displacement Measurement (광학 변위 측정), Superposition (중첩), Phase (위상), Amplitude (진폭), Correlation Image Sensor (시간 상관 이미지 센서)

1. 서론

본 논문에서는, 파동 방정식의 원통 좌표계에 있어서의 기본해인 Laguerre-Gaussian 빔 중에서 다양한 응용에 적절한 특징 구조를 가지고 있는 다중 영점 광 빔(Multizeros Optical Beam)을 새로운 계측 기술 개발에 응용하기 위하여, 다중 영점(광 강도가 제로인 포인트)에 관한 기본적 광학 특성 검토를 하고자 한다.

최근 광학기술을 이용한 분야에서 주목받고 있는 Laguerre-Gaussian 빔은, 광축을 중심으로 회전 분포하는 특수한 위상 구조를 가지고 있으며, 광파가 광축을 기준으로 서로 상쇄되므로, 해당 광 강도 분포는 광축상에 어두운 구멍이 있는 것처럼 보이는 특징을 가지고 있다.[1,2] 또한, 광 강도의 피크는, 특정한 반경의 원주상에 위치하고 있다. 이러한 특징을 가지는 Laguerre-Gaussian 빔은 최근에 나선 모양 위상 플레이트나 홀로그램의 기술의 발

전에 따라 쉽게 발생시킬 수 있게 되었고, 빔의 특이한 광학적 성질을 이용하여, 나노 핀셋이나 마이크로미터의 작성이나 양자화 컴퓨터의 대량 데이터 기억 등의 연구가 행해지고 있다.[3,4]

Laguerre-Gaussian 빔 중에서 가장 단순한 구조를 가지고 있는 다중 영점 광 빔은 발생시키기가 어렵지 않고, 회전성의 위상 구조를 가지고, 광 강도 분포는 중심 위치가 제로인 원추형을 가지며, 회절 영향에 둔감하기 때문에, 장거리 변위 계측 응용에 연구가 진행되고 있다.

이 빔을 이용함으로써 충분한 계측 성과를 얻을 수 있는 장거리 변위 계측의 대표적인 예는 교량이나 고속 철도 같은 대형 구조물의 안전성 평가 응용이다. 구조물의 변형은 일반적으로 병진 3 축과 회전 3 축의 합계 6 자유도가 있고, 이것을 장거리에서 계측해야 하며, 전체의 규모에 비해서 각 점의 변위가 극히 작다는 제약이 있다. 변위 계측을 위한 실용성이 충분한 기존 시스템은 그 사례가 드물다.[5,6] 일반적인 구조물의 감시 시스템은 레이저 스캔 방식의 삼각측량법 혹은 레이저 거리계가 사용될 수 있으나,[7] 시스템의 설치와 다자유도의 계측 정도 관점에서 상기와 같은 직선 구조물의 다자유도 감시는 어렵다.

직선 구조물의 원격지 다축 변위 계측에 사용하고자 하는 다중 영점 광 빔은 다음과 같은 특성을 가지고 있다.

(1) 1 중 영점의 경우는, 그 중심점을 정점으로 하는 경사가 급한 원추형의 광 강도 분포를 가지고 있기 때문에, 그 중심점은 3D 위치 변위 계측에 있어서의 병진 3 축의 변위 계측의 목표 타겟의 정확한 표적이 된다. 또한, 회전성의 위상 분포를 가지고 있으며, n 중 제로점의 경우에는 그 점을 중심으로 $2n\pi$ 의 위상 분포 구조를 가지므로, 회전 3 축의 변위 계측에서도 높은 정밀도를 가질 수 있다.

(2) Fourier 변환에 대해서 불변이며, 스케일이 제외된 진폭 · 위상 분포가 장거리 전반에 대해서 일정하게 유지되는 특성을 지닌다.

이와 같은 광학 특징을 가지고 있기 때문에, 응용 목표인 원격 6 축 변위 계측에 적합한 방식의 하나로 판단된다.

Laguerre-Gaussian 빔에 관한 연구는 그 빔의 전반에 관한 기초적 성질이나 복수의 빔의 중첩(Superposition)을 포함한 기본 성질에 관해서, 최근 활발히 진행되고 있다.[8] 그러나 본 빔의 특징을 이용하여 상기와 같은 변위 측정기술에 응용하기 위한 기초적 연구는 드물다.

본 연구에서는 다중 영점 광 빔을 이용한 계측기술을 개발하기 위해서 필요한 기초적 성질을 명확하게 정의 하고자 한다.[9] 특히, 이 논문에서는 복수의 다중 영점 빔의 중첩에 의한 다중 영점의 분리와 차수(영점의 수)의 변형 등의 기본 구조를 검토하고, 이 빔의 실현 가능성에 관한 기초 실험을 간단히 제시한다.

2. 다중 영점 광 빔의 개요 및 계측 응용

2.1 다중 영점 광 빔의 개요

Laguerre-Gaussian 빔 $LG_p^n(r,\theta,z)$ 는, Maxwell 의 파동 방정식의 z 축 방향을 광축으로 하는 원통 좌표계(r, θ, z)에 있어서의 해이고 그 빔 중에서 가장 응용에 적절한 구조를 가지고 있는 Laguerre-Gaussian 빔을 생각한다. 즉, 진폭과 위상이 다음의 식으로 나타내어진다.

$$\frac{A}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right]r^n,\ \left(\sigma=\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right) \tag{1}$$

$$n\theta+\frac{kr^2}{2R} \tag{2}$$

여기서 A: 정수, ω: 빔 반경, n: 반경 방향의 모드, k: 파수이다. 특히, R 은 파면 곡률을 나타내며, 다음과 같다.

$$R(z)=(z-z_0)\left(1+\left(\frac{k\omega^2}{2(z-z_0)}\right)\right)^2 \tag{3}$$

본 논문에서는 광축으로부터 거리 r 에 대해서 파면곡률 R(z)가 충분히 큰 경우(광축으로부터의 반경 r 에 대해서 전반거리 z 가 충분히 큰 경우 등)를 생각한다(단, 일반적으로 위상은 원점을 중심으로 나선 모양이 된다).

이 경우의 Laguerre-Gaussian 빔을 다중 영점 광 빔으로 정의하고, 식(4)로 표현된다.

$$E(r,\theta)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right]r^n\exp[in\theta] \tag{4}$$

또한, 본 논문에서는 상기 빔의 복수개 중첩 빔도 광학적으로 같은 성질을 가지므로 넓은 의미의 다중 영점 광 빔이라고 한다.

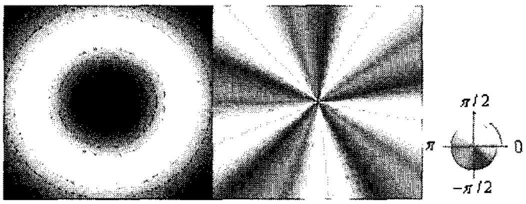
식(4)에서 알 수 있듯이, 광축 상(원점)에 n 차 (n: 영점의 수인 차수) 다중 영점을 가지고 있는 다중 영점 빔은 Gauss 형의 단면 진폭과 다중 영점의 위상 분포의 곱으로 나타내어 지며, 각 진폭 및 위상은 다음과 같다.

$$g(r)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] \tag{5}$$

$$z^n=r^n\exp[in\theta] \tag{6}$$

n 차 다중 영점 광 빔의 진폭과 위상의 양상은 Fig. 1 에서 알 수 있듯이, 위상은 원점에서 불연속이며 그 주위에서는 $2n\pi$의 위상 구조를 가진다.

특히 광 강도는 Fig. 2 에서 보이는 것과 같이, 원점에서 제로이다. 또 $r=\sigma\sqrt{n}$ 의 경우에는 최대이고, $r\to\infty$ 의 경우에는 제로에 수렴하는 광 강도 분포를 가지고 있다.



(a) Amplitude (b) Phase

Fig. 1 Example of Multizeros Optical Beam (n=5)

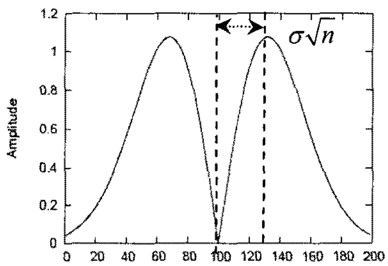


Fig. 2 Amplitude of Multizeros Optical Beam (n=1)

2.2 다중 영점 광 빔의 계측 응용성

2.1 절에서 알 수 있듯이 다중 영점 광 빔은 다음과 같은 특징을 가지고 있다.

(a) 차수 n 이 1 인 경우:

다중 영점 광 빔의 진폭 분포는 영점을 중심으로 하는 원추형이며, 저주파로 형성되고 있고, 중심부분은 선형성이 높다. 따라서, 중심점은 변위계측의 정확한 표적이 되어 그 위치를 고정밀도로 결정하는 것이 가능하다. 측정에 잘 이용되는 Gaussian 빔에서는 그 진폭이 중심에서 최대가 되는 정규 분포 구조를 가지고 있으나, 그 중심 부근의 변화량이 완만하고, 전반에 비례하여 빔이 퍼지기 때문에 병진 변위를 검출할 때 충분한 정밀도로 계측할 수 없다.

(b) 차수 n 이 고차인 경우:

다중 영점 광 빔의 위상 분포는 영점을 중심으로 하는 회전장의 분포이며 고차의 차수의 경우, 위상은 높은 분해능을 가지고 있으므로, 회전 변위를 고정밀도로 구할 수 있다. 하지만, 일반적인 Gaussian 빔의 경우는 그 자체로 회전 변위를 구할 수 없다.

위 특징에 기반하여, 일차의 다중 영점 광 빔과 고차의 다중 영점 광 빔을 조합함으로써, 병진 변위와 회전 변위를 고정밀도로 구할 수 있다. 이것은 상기 2 개의 다중 영점 광을 교대로 발사시키는 시스템을 구축함으로써 가능해진다. 그러나 하나의 빔 속에 1 차 영점과 고차 영점을 가지는 다중 영점 광 빔을 발생시킬 수 있으면 더욱 유리하다. 이것은 제 3 장에서 알 수 있듯이 복수의 다중 영점 광 빔의 중첩에 의해, 하나의 빔 속에 임의 위치에서 임의 차수의 다중 영점을 가지는 다중 영점 광 빔을 설계하는 것도 가능하다. 이 경우 영점이 다수 있으므로, 외란의 영향을 없애기 쉽다는 장점을 가진다.

따라서 다중 영점 광 빔의 중첩에 의한 영점 배치를 검토하는 것은, 이 빔을 이용한 계측 기술을 확립하는 데 중요한 의미를 가진다.

3. 다중 영점 광 빔의 중첩에 의한 영점 분리 및 빔 변형의 기초 성질

본 장에서는 복수의 다중 영점 광 빔의 중첩에 의한 영점 분리, 빔의 변형에 관한 기본적 성질을 검토한다.

3.1 다중 영점의 정의

다중 영점 광 빔 $E(r,\theta)$에 있어서 점 $P(r_0,\theta_0)$가 n 중 영점이다라는 것은, 아래와 같은 (a)와 (b)의 조건을 만족하는 경우를 말한다.

(a) 점 $P(r_0,\theta_0)$ 가 특이점일 것:

즉, 상기 조건은 아래의 식(7)이 만족하는 것을 의미한다.

$$E(r_0,\theta_0)=0 \text{ i.e. } \mathrm{Re}\,E(r_0,\theta_0)=\mathrm{Im}\,E(r_0,\theta_0)=0 \quad (7)$$

(b) 점$P(r_0,\theta_0)$를 원점으로 하는 일회전의 위상이 2πn 일 것:

점 $P(r_0,\theta_0)$을 원점으로 하는 극 좌표계(r',θ')의 좌표 r',θ' 에 대하는 위상 Phase(r',θ') 를 다음의 식(8)로 표현할 수 있다.

$$\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\,E(r',\theta')}{\mathrm{Re}\,E(r',\theta')}\right)=n\theta'+h(r',\theta')+\theta'_0 \quad (8)$$

여기서, θ_0' 은 초기 위상이다. 그때, 상기 조건은 r',θ' 의 함수 $h(r',\theta')$가 $0<\forall\varepsilon,\ 0<\forall r'<\exists\delta(\varepsilon)$에 대해서, 아래의 식(9)가 성립하는 것을 의미한다.

$$\left|\oint\frac{\partial h(r',\theta')}{\partial\theta'}d\theta'\right|<\varepsilon \quad (9)$$

특히 단일 다중 영점 광 빔의 경우는 $\forall r',\theta'$에 대해서 아래 식을 만족한다.

$$h(r',\theta')\equiv 0 \quad (10)$$

3.2 다중 영점 광 빔의 중첩에 의한 영점 분리에 관한 기본 명제

Gauss 단면 진폭 분포가 같고, 차수가 제로이상이고 최고 차수가 n 인 다중 영점 광 빔의 중첩은 n 개의 영점을 가진다.

$$g(r)\left(Z^n+\alpha_{n-1}Z^{n-1}+\cdots+\alpha_1Z^1+\alpha_0Z^0\right)=g(r)f(Z) \quad (11)$$

여기서, $g(r)$ 은 식(5)의 Gauss 단면 진폭 분포이고 Z^k는 k 차 다중 영점형 복소 진폭 분포이다. 단, Z^0은 평면파의 진폭 분포이다.

$$Z^k=r^k\exp[ik\theta]\,(k>1) \quad (12)$$

반대로, n 개의 다중 영점을 가지는 다중 영점 광 빔은, 같은 Gauss 단면 진폭 분포 $g(r)$을 가지며, 최고 차수가 n 인 복수개의 다중 영점 광 빔의 중첩에 의해 얻을 수 있다. 이 명제를 다음과 같이 증명한다.

식(11)에서, Gauss 단면 진폭 분포 부분을 제외한 Z 에 관한 n 차 복소함수를 $f(Z)$로 표시하면 다음과 같다.

$$f(Z)=Z^n+\alpha_{n-1}Z^{n-1}+\cdots+\alpha_1Z^1+\alpha_0Z^0 \quad (13)$$

이때, Z 를 복소수 공간 C 의 위치를 나타내는 변수로 간주하면, 다음 식(14)의 대수 방정식은 Gauss 의 대수학의 기본 정리에 의해 반드시 n 개의 해를 가진다.

$$f(Z)=Z^n+\alpha_{n-1}Z^{n-1}+\cdots+\alpha_1Z^1+\alpha_0Z^0=0 \quad (14)$$

따라서, $g(r)>0$ 이므로, 다음의 식(15)로 표현되는 대수 방정식은 3.1 절의 조건 (a)를 만족하는 s 개의 특이점 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ 을 가진다.

$$g(r)f(Z)=0 \quad (15)$$

이때, 각 특이점β_k의 중근도를 d_k 로 표시하면, n은 $\sum_{k=1}^{s}d_k$ 로 나타내진다.

다음으로, 각 특이점 β_k가 다중 영점의 위상에 관한 3.1 절의 조건 (b)를 만족하는 것을 확인한다. 각 특이점은 식(16)와 같이 표시할 수 있다.

$$\beta_k=\beta^r{}_k e^{i\beta^\theta{}_k} \quad (16)$$

이 특이점을 중심으로 극좌표 (r_k',θ_k')를 정의하면, 임의 점 Z_k 는 다음과 같이 표현된다.

$$Z_k=\beta_k+r_k'e^{i\theta_k'}=\beta^r{}_k e^{i\beta^\theta{}_k}+r_k'e^{i\theta_k'} \quad (17)$$

이때, 상기 다중 영점 광 빔의 중첩빔은 다음의 식으로 나타내어진다.

$$\begin{aligned}
&g(r)f(Z_k)=g(r)f\left(r_k' e^{i\theta_k'}+\beta^r{}_k e^{i\beta^\theta{}_k}\right)\\
&=g(r)(Z_k-\beta_k)^{d_k}\\
&\quad\times\left[(Z_k-\beta_s)^{d_s}(Z_k-\beta_{s-1})^{d_{s-1}}\times\cdots\times(Z_k-\beta_{k+1})^{d_{k+1}}\right.\\
&\qquad\left.\times(Z_k-\beta_{k-1})^{d_{k-1}}\times\cdots\times(Z_k-\beta_1)^{d_1}\right]\\
&=g(r)r_k'^{d_k}e^{id_k\theta_k'}\\
&\quad\times\left[\left(r_k' e^{i\theta_k'}+\beta_k-\beta_s\right)^{d_s}\left(r_k' e^{i\theta_k'}+\beta_k-\beta_{s-1}\right)^{d_{s-1}}\right.\\
&\quad\times\cdots\times\left(r_k' e^{i\theta_k'}+\beta_k-\beta_{k+1}\right)^{d_{k+1}}\times\left(r_k' e^{i\theta_k'}+\beta_k-\beta_{k-1}\right)^{d_{k-1}}\\
&\quad\left.\times\cdots\times\left(r_k' e^{i\theta_k'}+\beta_k-\beta_1\right)^{d_1}\right]\\
&=g(r)r_k'^{d_k}e^{id_k\theta_k'}\left[r_k' p(r_k',\theta'_k)+\prod_{i=1}^{s}(\beta_k-\beta_i)^{d_i}\right]\\
&=g(r)r_k'^{d_k}e^{id_k\theta_k'}\left(r_k' p(r_k',\theta'_k)+q\right)\left(p(0,\theta'_k),q\neq 0\right)
\end{aligned}\tag{18}$$

여기서, p는 r_k',θ_k' 의 함수이며, q는 r_k',θ_k'에 대해서 정수이다. 따라서, 위상 $\mathrm{Phase}(r_k',\theta_k')$ 은 아래와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Phase}(r',\theta')\\
&=d_k\theta_k'+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\left(r_k' p(r_k',\theta'_k)+q\right)}{\mathrm{Re}\left(r_k' p(r_k',\theta'_k)+q\right)}\right)\\
&=d_k\theta_k'+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(q)}{\mathrm{Re}(q)}\right)\\
&+\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\left(r_k' p(r_k',\theta'_k)+q\right)}{\mathrm{Re}\left(r_k' p(r_k',\theta'_k)+q\right)}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(q)}{\mathrm{Re}(q)}\right)\right)\\
&=d_k\theta_k'+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(q)}{\mathrm{Re}(q)}\right)+h(r_k',\theta_k')
\end{aligned}\tag{19}$$

여기서, $h(r_k',\theta_k')$는 하기식으로 쓸 수 있으므로,

$$h(r_k',\theta_k')=r_k'\times y(r_k',\theta_k')\tag{20}$$

다중 영점의 다중 영점의 위상에 관한 3.1 절의 조건 (b)를 만족한다. 따라서 n 개의 특이점은 다중 영점이다.

반대로 중근을 포함한 n 개의 영점을 가지는 다중 영점 광 빔을 검토한다.

영점 위치 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ 을 변수로 한 함수 $F(Z)$를 생각한다.

$$F(Z)=\alpha\cdot g(r)\times\left((Z-\beta_n)(Z-\beta_{n-1})\times\cdots\times(Z-\beta_1)\right)\tag{21}$$

식(21)은 식(22)로 다시 정의할 수 있다.

$$F(Z)=\alpha g(r)\times\left(Z^n+\eta_{n-1}Z^{n-1}+\cdots+\eta_1 Z^1+\eta_0 Z^0\right)\tag{22}$$

따라서, 이 빔은 최종적으로 n 개의 다중 영점 광 빔 $g(r)Z^n, g(r)Z^{n-1},\ldots\ldots, g(r)Z^1, g(r)Z^0$ 의 중첩으로서 나타내지고 있다. 즉, 임의 위치에 다중 영점이 존재하는 다중 영점 광 빔은 같은 Gauss 단면 진폭 분포를 가지는 다중 영점 광 빔의 중첩으로서 실현이 가능하다.

본 기본 명제에서는 Z의 최고차수를 1로 했지만, 일반적으로 이 계수가 다른 계수 보다 충분히 작으면 영점은 원점 위치에서 충분히 먼 위치에 존재하는 경우도 있다.

3.3 *n* 차 다중 영점 광 빔이 복수의 다중 영점에 분리하는 작용

n중 영점 광 빔 $g(r)Z^n$가 n개의 위치$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$에 영점 분리하기 위한 하나의 조건은 상기 빔에 대해서, 같은 Gauss 단면 진폭 분포를 가지는 복수개의 다중 영점 광 빔의 중첩이다.

$$\begin{aligned}
&\alpha g(r)\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k Z^k\\
&=\alpha g(r)\left(\prod_{k=1}^{n}(Z-\beta_k)\right)-\alpha g(r)Z^n
\end{aligned}\tag{23}$$

반대로, 복수의 영점을 가지는 다중 영점 광 빔에 대해서, 그 영점을 지우고, 하나의 영점 광 빔에 변형시키는 작용을 다음 절에서 언급한다.

3.4 복수 위치에 영점을 가지는 다중 영점 광 빔을 하나의 영점을 가지는 빔에 변형시키는 작용

n 개의 위치 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$에 다중 영점을 가지는 다중 영점 광 빔을, 임의 위치 β_0에 차수 s의 다중 영점을 가진 빔에 변형시키기 위한 조건은 다중 영점 광 빔 $f(Z)=g(r)\prod_{k=1}^{n}(Z-\beta_k)$ 에 대해서 아래와 같은 식(24)을 만족하는 다중 영점 광 빔의 중첩 작용이다.

$$\begin{aligned}
&\alpha g(r)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k Z^k\\
&=\alpha g(r)(Z-\beta_0)^s-\alpha g(r)\prod_{k=1}^{n}(Z-\beta_k)
\end{aligned}\tag{24}$$

그 밖에도, 대수학의 각 정리로부터 같은 Gauss 단면 진폭 분포를 가지는 임의 다중 영점 광 빔의 영점 분리시의 영점 위치의 상한이나 지정 영역 속에 있는 영점의 수 등도 결정이 가능하다. 이것에 관해서 다음절에서 열거한다.

3.5 다중 영점의 분리에 관한 성질

식(11)과 같이 표현되는, 최고 차수가 n 차 다중 영점 빔의 중첩은 대수학의 정리로부터 다음 명제가 성립한다.[10]

(a) 위치 Z 함수 $f(Z)=Z^n+\alpha_{n-1}Z^{n-1}+\cdots+\alpha_1Z^1+\alpha_0Z^0$ 의 계수 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_n,\alpha_{n-1},\cdots,\alpha_1,\alpha_0)$ $(\alpha_n=1)$ 가 결정하는 영점위치 $\beta_1(\boldsymbol{\alpha}),\beta_2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\beta_n(\boldsymbol{\alpha})$ 는 계수 $\boldsymbol{\alpha}$ 에 대해서 연속이다.

(b) n 개의 영점 위치는 $\max(|\alpha_{n-1}|,|\alpha_{n-2}|,\ldots,|\alpha_1|,|\alpha_0|)+1$ 을 넘지 않는다.

(c) 영점 위치를 통하지 않는 Joadan 곡선을 C 로 정의하면 그 곡선 내에 존재하는 영점의 수는 아래 식으로 표현된다.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{f'(z)}dz \tag{25}$$

그 밖에도 영점 위치에 관한 성질은 Descartes 의 정리, Fourier 의 정리, Sturm 의 정리 등으로부터 알 수 있다.

3.6 2 개의 다중 영점 광 빔의 영점 분리와 그 예

본 절에서는 같은 Gauss 형 진폭 분포를 가지는 2 개의 다중 영점 광 빔의 중첩으로서 발생하는 복수의 다중 영점을 가지는 빔에 대한 예를 든다.

2 개의 빔을 n 차와 m 차의 다중 영점 광 빔을 아래의 식으로 정의한다.

$$f_k(z)=g(r)Z^k\ (k=n,m:m<n) \tag{26}$$

이 빔의 중첩은 다음의 식으로 표현된다.

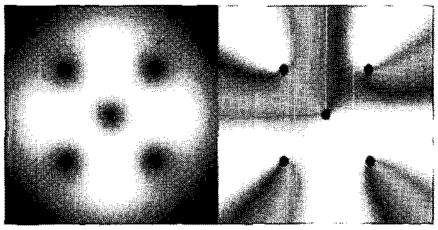
$$f_n(Z)+f_m(Z)=g(r)\left(Z^n+Z^m\right) \tag{27}$$

이때, 영점의 위치는 아래의 식으로 정리된다.

$$Z^n+Z^m=Z^m\left(Z^{n-m}+1\right)=0 \tag{28}$$

$$Z=0,e^{\frac{(2k-1)\pi}{n-m}i}\ (k=1,2,\ldots,n-m) \tag{29}$$

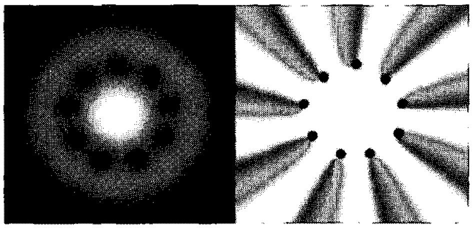
단, m = 0 의 경우에는 원점은 영점이 아니다. 따라서, 영점은 식(29)로부터 알 수 있듯이, 원점과 반경 1 의 원주상에 n-m 개의 등간격으로 배치된다.



(a) Amplitude (b) Phase

Fig. 3 Composite Multizeros Optical Beam Produced by Superposing the Two Beams with n=1 and n=5

여기서, 원점의 차수는 m 이며, 반경 1 의 원주상에 배치되는 영점의 차수는 1 이다. 또 위상은 반경 r 이 충분히 크면, 일회전할 때 $2n\pi$가 된다. 따라서, m=1 의 경우에는 모든 영점의 차수는 1 이며, 반경 1 의 원주상에 등 간격으로 존재하고 있으므로, 병진 변위의 측정에 있어서, 외란의 영향을 억제하면서 고정밀도를 실현할 수 있는 다중 영점 광 빔의 중첩 일례이다. 또한, 반경이 충분히 큰 원주상에서도 위상이 $2n\pi$ 로 변하므로 차수 n 이 크면, 회전 변위 계측을 고정밀도로 얻는 것도 가능하게 된다.



(a) Amplitude (b) Phase

Fig. 4 Composite Multizeros Optical Beam Produced by Superposing the Two Beams with n=0 and n=9

Fig. 3 은 1 차와 5 차의 다중 영점 광 빔의 중첩 시뮬레이션 예를, 그리고, Fig. 4 는 0 차(평면파 빔)와 9 차와의 중첩 시뮬레이션 예를 나타낸다.

4. 기초 실험과 그 결과[11]

4.1 기초 실험 시스템의 개요

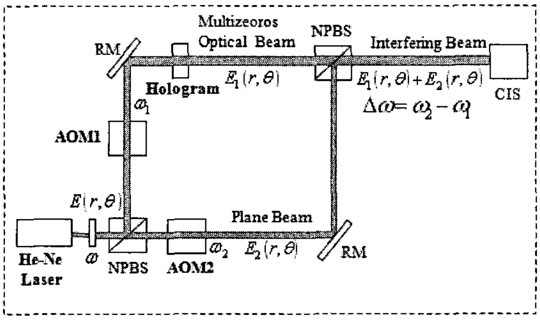


Fig. 5 Heterodyne Interference Optical System

Fig. 5 에서 표시하는 것처럼 기초 실험 시스템은 광원(He-Ne laser)을 NPBS(non-polarizing beam splitter)로 두 개의 광로에 분할한다. 본 실험에서는 AOM(Acousto Optical Modulator)을 이용해서 각 광 경로 상의 빔 주파수를 약간 변화시킨 후, 한 편은 홀로그램(Forked Binary Amplitude Granting[12])에 통과해서 다중 영점 광 빔을 발생시키고, 다른 한 편은 참조 평면파를 발생시킨 후 두 빔을 합성함으로써 간섭 빔을 생성한다. 이 간섭 빔으로부터 Heterodyne 계측 방식의 CIS(Correlation Image Sensor: 각 화소에서 입력 광 신호와 3 개의 외부 참조 신호와의 시간 상관을 각 화소마다 출력하는 디바이스이며, 진폭변조 된 입력 광 강도 분포를 주면, 각 화소마다 평균 입사 광 강도 및 주파수 성분의 진폭과 위상을 구할 수 있는 디바이스이다.[13])를 이용하여 다중 영점 광 빔의 각 위치에 있어서의 진폭과 위상을 구한다.

여기서, Heterodyne 간섭 계측으로 진폭과 위상을 구하는 방법을 수식으로 간단히 설명한다.

즉 n 차 다중 영점 광 빔을 시간 항을 포함하여

$$E_1(r,\theta,t)=A_1(r)\exp\left[i\left(k_1 z-w_1 t-\varphi_1(r,\theta)\right)\right] \quad (30)$$

$$A_1(r)=g(r),\ \varphi_1(r,\theta)=n\theta+\varphi. \quad (31)$$

(k1: 파수, Z: 전반 방향, ω1: 진동수)로 가정하고, 또 같이, 평면 참조 광을

$$E_2(r,\theta,t)=A_2\exp\left[i\left(k_2 z-w_2 t-\varphi\right)\right] \quad (32)$$

로 가정한다.

이 때, Z=0 에 있어서의 상기 2 개의 빔의 간섭파의 광 강도 $I(r,\theta,t)$은,

$$\begin{aligned} I(r,\theta,t) &= \left|E_1(r,\theta,t)+E_2(r,\theta,t)\right|^2 \\ &= \left[A_1(r)^2+A_2^2\right]+\left[2A_1(r)A_2\right]\cos\left((w_2-w_1)t+n\theta\right) \end{aligned} \quad (33)$$

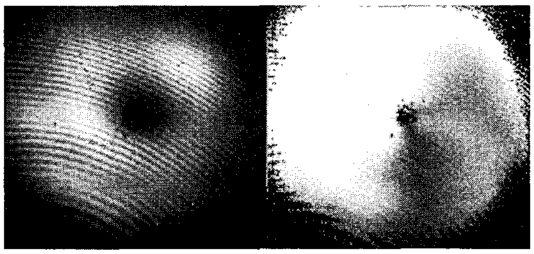
로 나타내진다.

여기서, 주파수 $\Delta\omega=w_2-w_1$ 을 참조 주파수로서, 각 위치(r, t)에서, 상기 광 강도와의 상관을 CIS 이미지 센서가 출력함으로써, 진폭 $2A_1(r)A_2$ 과 위상 $n\theta$ 를 구할 수 있다.

4.2 기초 실험의 결과

Fig. 6 은 1 차 다중 영점 광 빔을 실험실에서 반사경을 이용하여 7.5m 를 왕복시킨 후(총 15m 정도)의 다중 영점 광 빔을 나타낸다.

Fig. 7 은 5 차와 1 차의 다중 영점 광 빔의 중첩 광이다. 합계 5 개의 영점의 각 차수는 모두 1 이다.



(a) Amplitude (b) Phase

Fig. 6 Multizeros Optical Beam with n=1 after Propagation

(a) Amplitude (b) Phase

Fig. 7 Composite Multizeros Optical Beam Produced by Superposing the Two Beams with n=5 and n=1

5. 결론

본 논문에서는 다중 영점 광 빔을 계측에 응용하기 위하여 주로 그 영점 배치에 관한 기초적 성질을 검토했다. 이 연구의 주요 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) Gauss 단면 진폭 분포가 같고 그 차수가 제로이상이고, 최고 차수가 n 의 다중 영점 광 빔의 중첩은 n 개의 영점을 가진다.

(2) 다중 영점 광 빔이 임의 위치에 임의 차수의 영점 분리를 행하기 위한 하나의 조건은 같은 Gauss 단면 진폭 분포를 가지는 다중 영점 광 빔의 중첩 작용이 이루어지는 것이다.

(3) 복수의 다중 영점 광 빔의 중첩에 의해 영점 분리의 수나 그 위치를 임의로 지정할 수 있다.

(4) 복수의 위치에 영점 분리한 빔이 1 점에만 영점을 가지는 다중 영점 광 빔에 변형하는 작용도 같은 Gauss 단면 진폭 분포를 가지는 다중 영점 광 빔의 중첩 작용에 의해 가능하다.

참고문헌

1. Siegman, A. E., "Lasers," University Science Books, 1986.
2. He, H., Friese, M. E., Heckenberg, N. R. and Rubinsztein-Dunlop, H., "Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity," Phys. Rev. Lett., Vol. 75, No. 5, pp. 826-829, 1995.
3. Mair, A., Vaziri, A., Welhs, G. and Zeilinger, A., "Entanglement of the Orbital Angular Momentum States of Photons," Nature, Vol. 412, No. 6844, pp. 313-316, 2001.
4. Beijersbergen, N. M., Allen, L. and Woerdman, J. P., "Astigmatic Laser Mode Converters and the Transfer of Orbital Angular Momentum," Opt. Commun., Vol. 96, No. 1-3, pp. 123-132, 1993.
5. Lee, J. J. and Shinozuka, M., "A vision-based system for remote sensing of bridge displacement," NDT & E International, Vol. 39, No. 5, pp. 425-431, 2006.
6. Park, K. T. and Kim, S. H., "The determination of bridge displacement using measured acceleration," Engineering Structures, Vol. 27, No. 3, pp. 371-378, 2005.
7. Fujimoto, I. and Abe, M., "Application of Two Dimensional Laser Digitizer to Surveying," The Institute of Systems, Control and Information Engineers of Japan, Vol. 7, No. 9, pp. 391-393. 1994.
8. Maleev, I. D. and Swartzlander, G. A., "Composite Optical Vortices," J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 20, No. 6, pp. 1169-1176, 2003.
9. Fujimoto, I., Sato, S., Kurihara, T. and Ando, S., "Fundamental Theory on the Zeros Distribution and Propagation Transformation of Multizeros Optical Beam," Proc. of Optics and Photonics Japan, pp. 604-605, 2007.
10. Mathematical Society of Japan, "Mathematics Dictionary (4th Edition Version) : III-5 Algebraic Equation," Iwanami Shoten Publishers, pp.858-860, 2007.
11. Sato, S., Fujimoto, I., Kurihara, T. and Ando, S., "Remote Six-axis Deformation Sensing with Optical Vortex Beam," Proc. of Optics and Photonics Japan, pp. 602-603, 2007.
12. Galvez, E. J., Smiley, N. and Fernandes, N., "Composite Optical Vortices Formed by Collinear Laguerre-Gauss Beams," Proc. of SPIE, Vol. 6131, pp. 19-26, 2006.
13. Ando, S. and Kimachi, A., "Correlation image sensor: Two-dimensional matched detection of amplitude-modulation light," IEEE Trans. on Electron Devices, Vol. 50, No. 10, pp. 2059-2066, 2003.