韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2010. 02..제 49권, 제 1호, 53-65

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2010, Vol. 49, No. 1, 53-65.

유클리드 기하학에서 삼각형의 합동조건의 도입 비교

강 미 광 (동의대학교)

I. 서 론

기하 문제는 해결 방법이 다양하여 문제해결 능력과 수학적 창의성을 신장시킬 수 있는 좋은 수학적 제재이다. 우리나라 수학 교육과정은 초등학교에서 중학교 1학년까지는 직관적인 탐구활동을 강조하고 중학교 2학년에서 논증을 지나치게 강조하지 않는 수준에서 형식적이고 연역적인 증명을 시작하고 있다(교육인적자원부, 2008).

중학교 2학년에서 시작되는 형식기하의 증명에서 60%이상이 직·간접적으로 삼각형의 합동 조건을 이용하여 도형의 성질을 증명하고 있으며 이는 삼각형의 합동조건이 증명교육의 근간이 되고 있음을 보여준다(강옥기 외 2인, 2008; 박규홍 외 7인, 2002). 그러므로 삼각형의 합동조건의 정당성을 밝히는 것은 학생들의 학습에 중요한 영향을 끼치는 교사의 내용지식에 보다 폭넓은 교수학적 정보를 제공하고 학생들에게도 연역적 증명과정에서 자신감과 확신을 줄 수 있기 때문에 중요한 의미를 가진다고 할 수 있다(고상숙·장훈 2005: 박혜숙, 2003: Fennema & Loef, 1992; Schulman, 1986).

삼각형을 제외한 다른 다각형은 정사각형과 마름모와 같이 변의 길이가 주어지더라도 각의 크기가 하나로 결정되지 않으므로 다각형의 모양이 하나로 결정되지 않는다. 반면에 삼각형은 세 변의 길이가 결정되면 세 각의 크기가 정해지므로 삼각형의 모양과 크기가 하나로 결정된다. 이처럼 삼각형의 모양과 크기를 결정하는 것은 세 변과 세 각이지만 세 변 또는 두 변과 끼인 각, 또는 두 각과 끼인 변의 크기만으로도 원하는 삼각형을 작도할 수 있으므로 우리나라 교육과정에서는 이러한 최소 조건들을 삼각형의 결정조건으로 도입한다. 즉, 이러한 조건이 주어졌을 때 자와 컴퍼스를 사용하여 삼각형을 직접 작도할 수 있음을 보임으로써 삼각형의 결정조건을 정당화한다. 그리고 이 결정조건을 바탕으로 삼각형의 합동조건을 증명 없이 받아들이는 정당화의 도구로 사용하므로 삼각형의 합동조건은 삼각형의 실제적인 작도에 의해 정당화되고 있다고 할 수 있다. 이처럼 작도와 결정조건은 직관기하를 형식기하에 연결시키는 가교역할에서 큰 몫을 담당하고 있다.

그러나 삼각형의 결정조건을 이끌어 내는 삼각형의 작도는 작도절차만 제시되었을 뿐, 그 과정의 타당성에 대한 논의는 교과과정에서 다루지 않으므로, 결과적으로 우리나라 교육과정에서는 삼각형의 합동조건이 정당화의 절차 없이 도입되고 있다고 할 수 있다. 우리나라와는 달리, 러시아의 중학교 기하교과서에서는 삼각형의 합동조건을 결정조건을 통해 유도하지 않고, 이들 세 합동조건을 SAS합동조건, ASA 합동조건, SSS 합동조건의 순서로 엄밀하게 증명하고 있다. 또한 작도를 삼각형의 합동단원의 뒤에 배치함으로써 도형의 작도 방법에 대한 정당성도 삼각형의 합동조건을 이용하여 엄밀히 주면서 작도교육이 비중 있게 다루어지고 있다(한인기, 2005).

본 연구의 목적은 현 교육과정의 논증기하에서 중요한 역할을 하고 있는 삼각형의 합동조건이 의미 있게 정당화될 수 있는 방안을 제시하고자 하는 것이다. 먼저, 유클리드 기하학에서 삼각형의 합동조건이 어떻게 정립되어 있는지를 알아보기 위해, 우리나라 교육과정, 유클리드의 원론(The Elements)과 힐베르트의 기하공리군, 그리고 러시아의 교과서에서는 삼각형의 합동조건을 각각 어떻게 다루고 있는지를 서로 비교 분석하였다. 그리고 현재 우리나라 학교수학에서 합동조건을 이끌어내는 결정조건이 정당화될 수 있도록, 교과서에 제시된 '세 변이 주어진 삼각형'과 '주어진 각과 같은 크기의 각'에 대

* 접수일(2009년 12월 31일), 수정일(2010년 1월 21일), 게재확정일(2010년 2월 8일)
* ZDM분류 : G53
* MSC2000분류 : 97D20
* 주제어 : 삼각형의 합동조건, 합동공리, 작도
* 이 논문은 2009학년도 동의대학교 교내연구비에 의해 연구되었음(과제번호 2009AA090)

한 작도교육이 현행 체계 하에서 효율적으로 이루어지기 위한 지도방안을 모색하였다.

II. 삼각형의 합동조건 도입

유클리드 기하학은 거리 동형사상(Isometry) 하에서 변하지 않는 기하학적 성질을 연구하는 것으로 거리 동형사상에 의해서 각 도형의 이미지는 원래 도형과 합동인 도형으로 나타난다. 또한 두 도형 F_1, F_2가 합동이면 F_1을 F_2로 보내는 거리 동형사상은 3개 이하의 선대칭(reflection) 함수들의 합성으로 나타낼 수 있다(Ryan, 1997; Martin, 1982). 즉, 평면에서 평면으로 가는 모든 거리 동형사상은 선대칭함수(reflection), 평행이동(translation), 회전이동(rotation), 미끄럼 반사(glide reflection) 중 하나의 형태이다. 여기서 평행이동과 회전이동은 2개의 선대칭 함수의 합성으로 나타낼 수 있고 미끄럼 반사는 3개의 선대칭 함수의 합성이므로 가장 간단하면서도 기본이 되는 거리 동형사상은 선대칭이다. 실제로 독일 교과서에는 이러한 변환을 유한 번 시행하여 얻은 변환을 합동변환이라 하고 두 도형을 일치시키게 하는 합동변환이 존재할 때 두 도형은 합동이라 하며, 이 정의에 근거하여 삼각형의 합동조건을 증명하고 있다(정환옥 · 노정학, 2005).

2.1 우리나라 학교수학에서의 삼각형 합동조건

제 7차 수학과 교육과정에서 "합동"이라는 단어는 5-나에서 처음 도입되며 선대칭을 이용해 모양과 크기가 같아서 완전히 포개어지는 두 도형을 서로 합동이라고 정의하고 있다. 이는 '서로 일치하는 것은 서로 같다'는 사실을 공리(axiom)로 받아들인 유클리드의 원론의 합동개념과 일치한다. 5학년에서는 합동인 도형은 대응변의 길이와 대응각의 크기가 같다는 사실을 직관적으로 이끌어 내게 하고, 눈금자와 컴퍼스, 각도기를 사용하여 세 변의 길이가 주어진 삼각형, 두 변의 길이와 그 사이의 각의 크기가 주어진 삼각형, 한 변의 길이와 양끝 각의 크기가 주어진 삼각형과 합동인 삼각형을 그리는 순서를 제시하면서 익히기 문제로 다루고 있다(교육인적자원부 수학 5-나, 2008).

우리나라 대부분의 교과서에서는 삼각형의 합동조건을 삼각형의 결정조건을 이용해 도입하고 있으며, 작도와 결정조건의 도입순서에 따라 두 가지 방법으로 나눌 수 있다.

결정조건보다 작도를 먼저 다루는 교과서에서는 눈금이 없는 자와 컴퍼스를 사용하여 세 변의 길이, 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기, 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기라는 조건이 주어질 때, 삼각형을 작도하는 방법을 탐구활동이나 예제로 제시하여 세 조건을 각각 만족하는 삼각형을 작도할 수 있음을 보이고 '삼각형의 작도에서 알 수 있듯이 이러한 조건이 주어지면 삼각형의 모양과 크기는 하나로 결정되므로 이 조건을 삼각형의 결정조건이라고 한다.'라고 서술하고 있다(정순영 외 5인, 2009).

또 다른 방법은 작도지도를 하기 전에 결정조건을 제시하는 것이다. 박윤범 외 3인(2002)의 교과서에서는 '다음의 각 경우에 삼각형의 모양과 크기는 단 하나로 결정되므로 이들 각 조건을 삼각형의 결정조건이라 한다.'라고 아래와 같이 먼저 제시한다.

삼각형의 결정조건

다음 각 경우에 삼각형의 모양과 크기는 단 하나로 결정된다.
1. 세 변의 길이가 주어질 때
2. 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때
3. 한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 주어질 때

그런 다음, 작도를 통해 삼각형의 결정조건을 확인하도록 전개하고 있다. 즉, 위 결정조건으로 자와 컴퍼스를 가지고 투명종이에 삼각형을 작도하게 한 다음, 친구가 작도한 것과 포개어 합동이 됨을 알게 함으로서 '결정조건은 삼각형의 모양과 크기를 단 하나로 결정한다'는 사실을 받아들이게 하고 있다.

이렇게 결정조건을 도입한 후에는, 두 가지 방법 다 '두 삼각형이 대응하는 세 변의 길이, 혹은 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기, 혹은 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 서로 같으면 결정조건에 의해 삼각형의 모양과 크기는 하나로 결정되므로 두 삼각형은 서로 합동인 삼각형이다.'와 같이 삼각형의 합동조건을 결정조건으로 정당화하고 있다.

이처럼 우리나라는 삼각형의 결정조건으로부터 삼각형의 합동조건을 SSS 합동, SAS 합동, ASA 합동 순서로 이끌어 내고 작도를 통해 결정조건을 정당화하는 도구로 이용하고 있다.

2.2 유클리드 원론에서의 삼각형 합동조건

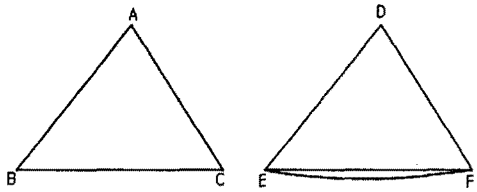
삼각형은 선분과 각으로 이루어져 있으므로 삼각형의 합동을 논하기 위해서는 선분의 합동, 각의 합동에 대한 개념이 먼저 정립되어야 한다. 그러나 유클리드의 원론에서는 선분, 각, 삼각형 등의 합동을 따로 정의하지 않고 '서로 일치하는 것은 서로 같다'라는 내용을 네 번째 공리(axiom)로 택하고 있으므로, 이것이 바로 원론에서 제시하는 도형의 합동개념이라 할 수 있다. 여기서 두 도형이 일치한다는 것은 한 도형을 옮겨서 다른 도형에 겹쳤을 때 서로 포개져 일치한다는 뜻으로, 이를 자세히 분석하면 '합동'의 개념과 '움직여서 변하지 않는 도형'의 개념은 서로에 의해 정의되는 순환적인 논리가 있다.

이처럼 도형을 옮겨서 겹쳐놓는 방법은 도형의 합동을 증명하는 실제적 수단은 될 수 있으나, 이론적인 수단이 될 수 없다고 생각한 수학자들에 의해 두 도형이 이론상으로 서로 같음을 정의하는 방법에 따라 유클리드 기하에서는 새로운 합동공리 체계들이 생겨났다. 대표적인 것으로는 유한한 개수의 점들로 구성된 도형들 사이의 합동개념을 근본으로 하는 파쉬 체계, 선분들 사이의 합동개념을 근본개념으로 하는 베네로스 체계, 그리고 선분들과 각들 사이의 합동개념을 근본개념으로 채택한 힐베르트 공리체계가 있다(이무현 옮김, 2005).

원론에서는 삼각형의 합동조건을 제 1권의 정리 4에서 SAS 합동, 정리 8에서 ASA 합동 그리고 SSS 합동을 정리 26으로써 다루고 있다.

[유클리드 I권 정리 4] 두 삼각형이 있는데, 두 변이 각각 길이가 같고, 그 두 변이 만드는 각이 크기가 같다고 하자. 그러면 나머지 한 변도 길이가 서로 같으며, 두 삼각형은 서로 같다.

[증명] 두 삼각형 ABC와 DEF가 있어서, 두 변 AB, AC가 두 변 DE, DF와 각각 길이가 같고, 각 A와 각 D가 크기가 같다고 하자. 그러면 삼각형 ABC를 옮겨서 삼각형 DEF에다 포개 놓아서, 변 AB와 변 DE가 일치하고, 변 AC와 변 DE가 일치하도록 할 수 있다. 그러면 점 B와 점 E가 일치하고, 점 C와 점 F가 일치하니, 밑변 BC는 밑변 EF와 일치한다. 왜냐하면 B는 E와 일치하고 C는 F와 일치하는데 밑변 BC가 밑변 EF와 일치하지 않는다면, 두 직선이 어떤 도형을 감싸게 된다. 이것은 불가능하다. 그러므로 밑변 BC는 밑변 EF와 일치한다. 그러므로 이 두 삼각형은 서로 합동이다.



<그림 1> 유클리드 원론에서의 SAS 합동

위 증명의 첫 부분에서 점 A를 점 D에다 두고 변 AB를 직선 DE에 놓을 수 있는 것은 원론 1권의 정리 2에 의해 작도 가능한 것이나 AB와 DE의 길이가 같으므로 점 B는 점 E에 놓이게 된다는 것은 네 번째 공리의 역인 '서로 같은 것은 일치한다.'라는 사실을 직선의 경우에는 성립한다는 것을 미리 가정하여 사용하고 있는 것임을 알 수 있다. 또한, 여기서 두 변이 같다는 것을 원론에서는 따로 명확히 정의하지 않았으나 증명의 맥락으로 보아 같은 길이를 가지는 경우를 의미하고 있다. 유클리드의 기하 공준에서 '모든 점에서 다른 모든 점으로 직선을 그을 수 있다.' 라는 공준은 '직선은 점들이 쭉 곧게 있는 것이다.'라는 직선의 정의와 결합하면 '두 직선은 어떤 넓이를 둘러쌀 수 없다.' 라는 공리와 동치가 되며 SAS 합동의 증명에서는 이것이 결정적인 역할을 한다. 이처럼 정리 4에 대해서는 많은 논란과 반론이 제기되었다. 예를 들면, 토마스 하디는 각이 같다는 개념이 없는데 두 각이 같은지의 여부를 생각할 수 없으므로 정리 4는 정리가 아니라 일종의 정의에 속해야 한다고 주장하였으며 버틀란트 러셀도 유클리드는 정리 4를 공리로 받아들이는 편이 나았다고 언급하였다(이무현 옮김, 2005).

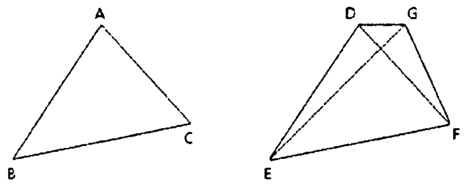
실제로 정리 4는 현대의 합동공리 체계의 견지에서

보면 이미 선분의 합동개념과 각의 합동개념을 가정하여 사용하였으며 삼각형의 나머지 두 각들이 나머지 두 각들과 각각 크기가 같고, 밑변이 밑변과 길이가 같음을 이끌어 주는 공리가 있어야 성립한다.

다음은 유클리드 기하학 원론에서의 삼각형의 SSS 합동조건과 ASA합동조건을 나타낸 정리이다.

[유클리드 I권 정리 8] 두 삼각형이 있는데, 두 변의 길이가 두 변의 길이와 각각 같고, 밑변이 길이도 밑변의 길이와 같다고 하자. 그러면 같은 변들 사이에 놓이는 각들은 서로 크기가 같다.

[증명] 삼각형 ABC와 삼각형 DEF가 있어서, 두변 AB, AC가 두변 DE, DF와 각각 길이가 같고, 밑변 BC와 밑변 EF가 같다고 하자. 그러면 삼각형 ABC를 옮겨서 삼각형 DEF에 포개 놓아서, 밑변 BC와 밑변EF를 일치하도록 하고 두 삼각형이 같은 방향에 놓이게 한다. 점 A를 이동한 점 G가 점 D와 일치하지 않는다고 하면, 두 변 AB, AC도 두 변 DE, DF와 각각 일치하지 않지만 $\overline{AB}=\overline{GE}=\overline{DE}$이고 $\overline{AC}=\overline{GF}=\overline{DF}$이 성립한다.

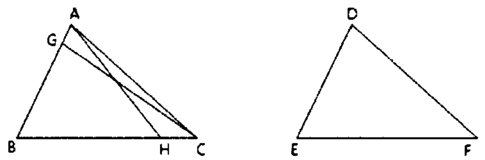


<그림 2> 유클리드 원론에서의 ASA 합동

여기서 삼각형 EDG와 삼각형 EGD는 $\overline{ED}=\overline{EG}$이고 $\overline{EG}=\overline{ED}$이므로 SAS합동에 의해 $\angle EDG=\angle EGD$이다. 그러므로 $\angle FDG<\angle EDG=\angle EGD<\angle FGD$ 이다. 그런데 삼각형 FDG에서 $\overline{FD}=\overline{FG}$이므로 $\angle FDG=\angle FGD$이다. 이것은 모순이므로 $G=D$이어야만 한다. 즉, $\angle A=\angle D$ 이다. 원론 1권의 정리 4에 의해 두 삼각형 ABC와 DEF는 서로 합동이다.

[유클리드 I권 정리 26] 두 삼각형이 있는데, 두 각의 크기가 두 각의 크기와 각각 같고, 한 변의 길이가 한 변의 길이와 같다고 하자. 그러면 나머지 변들도 나머지 변들과 길이가 각각 같고, 나머지 각도 나머지 각과 크기가 같다.

[증명] 두 삼각형 ABC와 DEF에서 각 B와 각 E의 크기가 같고, 각 C와 각 F의 크기가 같으며, BC와 EF의 길이가 같다고 하자.



<그림 3> 유클리드 원론에서의 SSS 합동

먼저, 변 AB가 변 DE보다 길다고 하면 $\overline{DE}=\overline{BG}$인 G가 존재한다. 여기서 삼각형 BGC와 삼각형 EDF는 SAS 합동이 되므로 각 GCB는 각 DFE와 크기가 같다. 따라서 각 ACB와도 크기가 같다. 이는 모순이므로 변 AB와 변 DF는 길이가 같다. 같은 방법으로, 변 AC와 변 DF도 길이가 같다. 그러므로 삼각형 ABC와 삼각형 DEF는 서로 합동이다.

다음에는 변 AB와 DE의 길이가 같고 변 BC가 변 EF보다 길다고 하자. 그러면 $\overline{EF}=\overline{BH}$인 H가 존재한다. 그러면 삼각형 ABH와 삼각형 DEF는 SAS 합동이 된다. 그러므로 각 AHB는 각 DFE와 크기가 같고, 따라서 각 ACB와도 크기가 같다. 원론의 1권 정리 16에 의해 삼각형 ACH의 외각인 각 AHB는 안각 ACB보다 커야 하므로 이것은 모순이다. 그러므로 변 BC와 변 EF는 길이가 같다. 같은 방법으로, 변 AC와 변 DF의 길이가 같음을 보일 수 있다. 그러므로 삼각형 ABC와 삼각형 DEF는 서로 합동이다.

이처럼 유클리드의 원론에서 ASA 합동과 SSS 합동정리는 SAS 합동정리를 근간으로 하여 증명되고 있다. 그러나 원론에서는 선분의 합동개념과 각의 합동개념을 구체적으로 정의하지도 않았고 이들을 삼각형의 합동개념으로 연결시키는 공리가 주어지지 않았으므로 SAS 합동정리는 원론에서 제시한 공리들만으로는 증명할 수 없다. 그러므로 유클리드 원론에서의 삼각형의 합동정

리의 증명은 엄밀한 의미해서 불완전하다고 말할 수 있다.

2.3 Hilbert의 합동공리군

19세기 이전에는 기하공리들이 경험에 의한 것으로 제한되어 있었으나, 비 유클리드 기하학의 출현으로 직관을 기초로 한 유클리드 원론의 공리계는 근대적인 관점에서 볼 때는 불완전했으므로 유클리드 기하학을 다시금 체계적으로 재정리해야 할 필요성이 있었다. Moritz Pasch가 그의 책 Vorlesungen über neuere Geometrie (1882)에서 '순수한 기하는 엄격한 형식을 갖추어야 하고 정리들을 연역하기 위해 필요한 모든 것은 공리계에서 유도되어야 한다'고 주장한 이후, 직관적으로는 유클리드의 정신에 가까우면서도 유클리드 기하를 직관에 의존하지 않고 논리적이고 체계적으로 정립하려는 기하학 기초론에 관한 연구가 많이 시도되었다(홍승표, 2005). 현재 유클리드 기하학은 공리적 체계로 정의되고 있으며 가장 많이 받아들여지는 공리계는 힐베르트에 의해 1899년 씌어진 '기하학 기초론(Grundlagen der Geometrie, 1899)'에서 제시한 공리계로, 이것은 결합의 공리, 순서의 공리, 평행선의 공리, 합동의 공리, 연속의 공리로 다섯 개로 이루어져 있다(Greenberg, 1994).

힐베르트의 네 번째 기하 공리군인 합동 공리군은 두 도형이 같은가 아닌가를 판단하는 기준을 제공하고 있으며. 선분의 합동에 관한 3개의 공리와 각의 합동에 관한 공리, 선분의 합동개념을 각의합동 개념과 관계를 맺어주는 공리인 다섯 개의 공리로 이루어져 있다.

합동공리 1은 주어진 선분과 합동인 선분을 원하는 곳에 작도 가능하다는 것이고 공리 2와 3은 선분의 합동 개념이 동치관계(equivalence relation)라는 것을 보장해주는 공리들이다.

[정의] 선분들은 그들 상호간에 적절한 관계가 있고 그것의 표현을 위하여 합동 또는 같다는 용어를 사용한다.

[합동공리 1] 선분 작도 공리

점 A, B가 한 직선 l상의 두 점이고, A'은 l 또는 다른 직선 l' 상의 점이라 하면 l'상에 A'의 주어진 방향에서 선분 AB가 선분 $A'B'$와 합동이 되도록 한 점 B'을 항상 잡을 수 있다. 부호로는 $AB \equiv A'B'$으로 표기한다.

합동공리 4는 주어진 임의의 각을 원하는 반직선과 반평면 위에 유일하게 옮겨 놓거나 작도할 수 있음을 보장하고 있다.

[정의] 각들은 상호간에 관계가 있고 그것을 기술하기 위하여 합동 또는 같다는 단어를 사용한다.

[합동공리 4] 각의 작도의 가능성과 유일성

h와 k는 한 점 O에서 방사하는 반직선이고 $\angle(h,k)$를 한 평면 α에서 각이라 하자. l'은 평면 α'상의 직선이라 하고 한쪽 영역이 지정되어 있다고 하자. h'은 l'상의 반직선으로서 한 점 O'에서 방사한다고 하면 α'상에는 l'의 지정된 쪽으로 각 $\angle(h,k)$와 합동이 되는 각 $\angle(h',k')$을 만드는 단 하나의 반직선 k'가 존재한다. 부호로서는 $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$로 표기한다. 모든 각은 자기 자신과 합동이다.

합동공리 5는 삼각형의 세 합동 조건을 이끌어 내고 보장해주는 핵심 공리이다.

[합동공리 5] 선분의 합동과 각의 합동과의 관계

두 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$에 대하여 다음의 합동식

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',$$
$$\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

이 성립하면 $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$도 역시 성립한다.

Hilbert의 공리계는 위 공리로부터 삼각형의 합동을 정의하고 삼각형의 세 합동 정리 SAS합동, ASA합동 SSS합동을 차례로 이끌어 내고 있다.

[정의] 두 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$에 대하여

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ BC \equiv B'C',$$
$$\angle A \equiv \angle A',\ \angle B \equiv \angle B',\ \angle C \equiv \angle C'$$

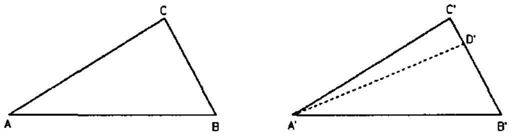
일 때 두 삼각형은 합동이라 하고

$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$로 표기한다.

[삼각형의 SAS 합동정리] 두 삼각형 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$에 대하여 $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$,

$\angle A \equiv \angle A'$ 이면 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ 이다.

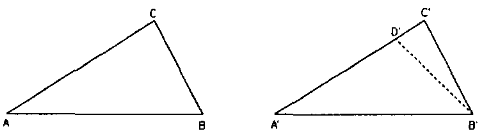
[증명] 합동공리 5에 의해서 $\angle B \equiv \angle B'$ 이고 $\angle C \equiv \angle C'$ 이므로 $BC \equiv B'C'$ 임을 증명하면 된다. 합동공리 1에 의해, 선분 $B'C'$ 상에 $BC \equiv B'D'$ 이 되는 점 D' 를 잡을 수 있다. 합동공리 5를 $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$ 에 적용하면 $\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$ 이다. 여기서 각 $\angle BAC$는 동시에 두 개의 각 $\angle B'A'D'$ 와 $\angle B'A'C'$ 에 동시에 합동이 되므로 합동공리 4에 의해 $BC \equiv B'C'$ 이다.



<그림 4> 삼각형의 *SAS* 합동

[삼각형의 ASA 합동정리] 두 삼각형 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 에 대하여 $AB \equiv A'B'$, $\angle A \equiv \angle A'$, $\angle B \equiv \angle B'$ 이면 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ 이다.

[증명] $AC \equiv A'C'$ 을 증명하면 삼각형의 SAS 합동정리에 의해 두 삼각형은 합동이다. $A'C'$ 상에 AC와 합동이 되도록 $A'D'$ 을 작도하면 $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'D'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$ 가 성립하므로 합동공리 5에 의해 $\angle ABC \equiv \angle A'B'D'$ 이다. $\angle A'B'D' \equiv \angle B \equiv \angle B' \equiv \angle A'B'C'$ 이므로 합동공리 4는 D' 는 반직선 $A'C'$ 위에 있음을 보장하므로 D' 는 선분 AC' 와 $B'C'$ 의 교점으로 $C' = D'$ 이다. 즉 $AC \equiv AD \equiv A'C'$ 이다.



<그림 5> 삼각형의 ASA 합동

[삼각형의 SSS 합동정리] 두 삼각형 ABC, $A'B'C'$ 의 대응되는 변들이 서로 합동이면 그 두 삼각형은 서로 합동이다. 즉,

$$AB \equiv A'B', \; BC \equiv B'C', \; CA \equiv C'A'$$

이면 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ 이다.

힐베르트의 기하학 기초론에서는 삼각형의 ASA합동정리는 SAS 합동정리와 합동공리군의 다섯 번째 공리에 의해 증명되고. SSS 합동정리는 합동의 추이성공리와 각의 작도의 유일성공리, SAS 합동정리를 이용하여 엄밀히 증명된다. 이와 같이 힐베르트는 유클리드 원론에서 불완전했던 합동공리의 체계와 작도문제를 다섯 가지 공리로 이루어진 합동공리군을 이용하여 완벽한 합동공리체계를 구축하고, 이를 바탕으로 삼각형의 세 가지 합동정리도 완벽하고 엄밀한 증명과 함께 제시하고 있다.

2.4 러시아 교과서의 삼각형 합동조건

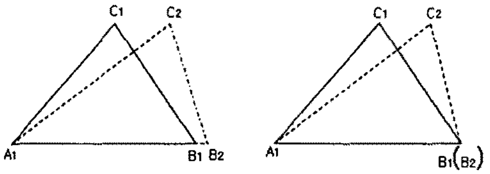
우리나라 기하 교과서는 삼각형의 합동조건을 결정조건을 이용하여 증명 없이 받아들이는 반면, 러시아의 7학년 기하 교과서는 결정조건을 이용하지 않고 삼각형의 합동조건을 도입하고 있으며 이를 엄밀하게 증명하고 있다. 즉, 러시아 교과서는 포갬을 이용하여 삼각형의 합동을 정의한 다음, 이등변 삼각형의 성질탐구와 함께 두 삼각형의 합동조건을 증명하거나 두 삼각형의 합동을 상응각과 상응변이 같을 때로 정의하고 합동인 삼각형의 존재성을 공리로 준 다음 삼각형의 합동조건을 증명하고 있다(한인기, 2005). 이러한 교수학적 변환의 차이가 어떻게 생길 수 있는 것인지를 Pogorelov의 러시아 기하 교과서에 나타난 삼각형의 합동조건을 통해 살펴보고자 한다(한인기, 2005 재인용).

이 교과서에서는 두 삼각형의 합동을 상응하는 각의 크기와 상응하는 변들의 길이가 같은 것으로 정의하고 다음을 공리로 제시하고 있다.

(*) 임의의 삼각형에 대해, 주어진 반직선과 반평면에 주어진 삼각형과 합동인 삼각형이 존재한다.

[삼각형의 SAS 합동정리] 한 삼각형의 두 변, 이들의 끼인각이 각각 다른 삼각형의 두 변, 이들의 끼인각과 같으면, 이들 삼각형은 합동이다.

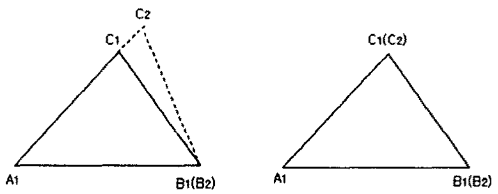
[증명] $\triangle ABC$와 $\triangle A_1B_1C_1$ 에서 $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ 이라 하자.



<그림 6> 러시아 교과서에서의 SAS 합동

공리 (*)에 의해 꼭짓점 B_2는 반직선 A_1B_1에 속하고 꼭짓점 C_2는 직선 A_1B_1에 대해 꼭짓점 C_1과 같은 반평면에 속하면서, 삼각형 ABC와 합동인 삼각형 $A_1B_2C_2$가 존재한다.

두 점 B_1과 B_2는 같은 반직선상 $\overrightarrow{AB_1}$에 있으면서, $\overline{A_1B_1} = \overline{A_1B_2}$이므로, 꼭짓점 B_2는 꼭짓점 B_1과 일치한다. $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC = \angle B_2A_1C_2$ 이므로 반직선 $\overrightarrow{A_1C_2}$는 반직선 $\overrightarrow{A_1C_1}$과 일치하고 $\overline{A_1C_1} = \overline{AC} = \overline{A_1C_2}$이므로, 꼭짓점 C_2는 꼭짓점 C_1과 일치한다.

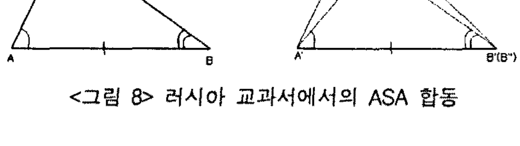


<그림 7> 러시아 교과서에서의 SAS 합동III

$\triangle A_1B_1C_1$은 $\triangle A_1B_2C_2$와 일치하고 $\triangle A_1B_2C_2$는 $\triangle ABC$와 합동이므로 정리가 증명된다.

[삼각형의 ASA 합동정리] 한 삼각형의 한 변과 변의 양끝 각이 각각 다른 삼각형의 한 변과 변의 양끝 각과 같으면, 이들 삼각형은 서로 합동이다.

[증명] 삼각형 ABC와 $A'B'C'$에서 $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$라 하자.



<그림 8> 러시아 교과서에서의 ASA 합동

공리 (*)에 의해 꼭짓점 B''는 반직선 $A'B'$에 속하고 꼭짓점 C''는 직선 $A'B'$에 대해 꼭짓점 C'과 같은 반평면에 속하면서, 삼각형 ABC와 합동인 삼각형 $A'B''C''$가 존재한다. B', B''는 같은 반직선상에 있으면서 $\overline{A'B''} = \overline{A'B'}$ 이므로, 꼭짓점 B''는 꼭짓점 B'와 일치한다. $\angle B'A'C'' = \angle BAC = \angle B'A'C'$이고 $\angle A'B'C1'' = \angle ABC = \angle A'B'C'$이므로, 반직선 $A'C''$는 반직선 $A'C'$와 일치하고 반직선 $B'C''$는 반직선 $B'C''$와 일치한다. 따라서 꼭짓점 C''는 꼭짓점 C'와 일치한다. 결국, 삼각형 $A'B'C'$는 삼각형 $A'B''C''$와 일치하고 삼각형 $A'B''C''$는 삼각형 ABC와 합동이므로 정리가 증명된다.

[삼각형의 SSS 합동정리] 한 삼각형의 세 변이 각각 다른 삼각형의 세 변과 같으면, 이들 삼각형은 합동이다.

Pogorelov의 기하교과서는 삼각형의 SAS합동과 ASA 합동 정리를 다룬 후에, 이등변삼각형에서 밑변에 그은 중선과 높이, 이등분선은 일치한다는 정리를 증명하고 이를 이용해 삼각형의 합동정리인 SSS합동을 증명하고 있다.

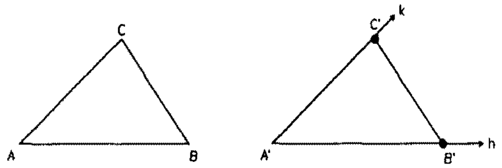
선분과 각의 작도 가능성과 유일성을 공리로 보장한 기하학적 체계에서는 힐베르트의 합동공리 5와 러시아의 교과서에서 공리로 채택한 공리 (*)는 서로 필요충분조건임을 다음 정리를 통해 알 수 있다.

[정리] 다음 두 공리는 서로 동치이다.

(a) 두 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$이 두 변과 끼인 각이 각각 같으면 나머지 대응하는 각도 서로 같다. 즉, $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$이 성립하면 $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$이다.

(b) 임의의 $\triangle ABC$에 대해, 주어진 반직선 h과 반평면에 주어진 삼각형과 합동인 $\triangle A'B'C'$가 존재한다.

[증명] (a)⟹(b) 힐베르트의 합동공리군에 의해 주어진 반직선 h에 $\angle BAC = \angle(h,k)$되는 각을 작도할 수 있다.

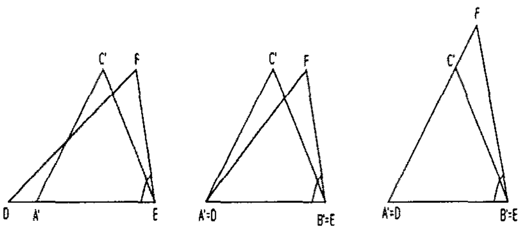


<그림 9> 두 공리의 동치성

합동공리 1에 의해 $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$가 되는 점 B', C'가 반직선 h, k 위에 각각 존재한다. $\triangle A'B'C'$에서 $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv B'A'C'$이므로 조건 (a)에 의해 $\angle ACB \equiv \angle A'B'C'$이고 $\angle CBA \equiv \angle C'B'A'$이 성립한다. $\triangle A'B'C'$는 임의의 반직선 h와 반평면에 있으면서 $\triangle ABC$와 합동인 삼각형이므로 (b)가 성립한다.

(b)⟹(a) 두 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$에서 $\angle A \equiv \angle A'$, $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$이라 하자.

조건 (b)에 의해 $B' \equiv E$이고 $\triangle ABC$와 합동인 삼각형 $\triangle DEF$가 존재한다. 선분의 유일성에 의해 $ED = BA = B'C'$이므로 $D = A'$이다. 각의 작도의 유일성에 의해 $\angle B'A'F = \angle BAC = \angle B'A'C'$이므로 반직선 $A'C'$와 $A'F$는 일치한다. 여기서 $A'C' = AC = AF$이므로 $C' = F$이다. $\triangle DEF$는 $\triangle ABC$와 합동인 삼각형이므로 $\angle ABC \equiv \angle DEF \equiv \angle A'B'C'$이고 $ACB = DFB = A'C'B$이다.



<그림 10> 두 공리의 동치성

이처럼 러시아 교과서에서는 (*)를 공리로 받아들였기 때문에 우리나라와는 달리 삼각형의 합동조건을 엄밀하게 증명할 수 있었음을 알 수 있다.

Ⅲ. 결정조건에 의한 작도법의 정당화

중학교 교육과정내용에서 삼각형의 합동조건은 결정조건에 의해 도입되고 결정조건은 작도에 의해 정당화되고 있으므로 현재 작도절차만 제시되고 있는 작도 방법이 의미를 가질 수 있도록 하기 위한 접근 방법을 모색하고자 한다. 즉, 삼각형의 결정조건을 이끌어내는 삼각형의 작도법에서 기본적인 역할을 하는 세 변이 주어진 삼각형의 작도와 주어진 각과 같은 크기인 각의 작도의 정당성을 힐베르트의 공리군을 이용하여 보이고자 한다.

3.1 세 변의 길이가 주어진 삼각형의 작도

현행 교육과정에서 세 변의 길이가 주어진 삼각형의 작도는 교차하는 두 원을 이용해 이루어지고 있으므로 현재 작도 단원 뒤 쪽에 배열되어 있는 '두 원의 위치관계'는 작도단원보다 선행되는 것이 교과 과정상에도 위계적이고 보다 효과적인 작도교육을 기대할 수 있다. 두 원의 위치관계는 서로 만나거나 접하는 경우, 만나지 않는 경우로 이는 두 원의 반지름 r_1, r_2와 두 원의 중심과의 거리 d에 의해 결정된다. 예를 들어, 교과서에서는 두 원의 반지름이 r_1, r_2이고 두 원의 중심과의 거리가 d일 때 $r_2 - r_1 < d < r_1 + r_2$이면 두 원이 교차하고 이를 작도하는데 이용하고 있으나, 엄밀히 따지자면 직선과 원, 원과 원들의 교차점의 존재성을 보장하기 위해서는 데데킨트(Dedekind)의 연속공리나 이와 동치인 힐베르트가 기하학 기초론에서 제시한 연속성 공리가 필요하다.

[정리 3.1] $r_1 < r_2$일 때 반지름을 각각 r_1과 r_2로 가지는 두 원의 위치관계는 다음을 만족한다.

① $r_2 - r_1 < d$이면 반지름 r_1인 원은 반지름 r_2인 원의 내부에 위치하며, 두 원은 서로 만나지 않는다.

② $r_2 - r_2 = d$이면 두 원은 내접하며, 한 점에서 만난다.

③ $r_2 - r_1 < d < r_1 + r_2$이면 두 원은 두 점에서 만난다.

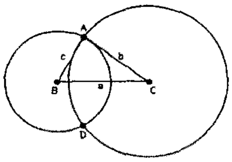
④ $r_1+r_2=d$이면 두 원은 외접하며, 한 점에서 만난다.

⑤ $r_1+r_2<d$이면 반지름 r_1인 원은 반지름 r_2인 원의 외부에 위치하며, 두 원은 서로 만나지 않는다.

세변의 길이가 a, b, c인 세 선분이 주어졌을 때 이를 변으로 하는 삼각형은 반지름이 b, c이고 중심과의 거리가 a인 두 원의 교점을 이용하여 표현할 수 있다.

[정리 3.2] 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형은 반지름이 각각 b, c이고 중심들 간의 거리가 a인 교차하는 두 원으로 표현 가능하고 역도 성립한다.

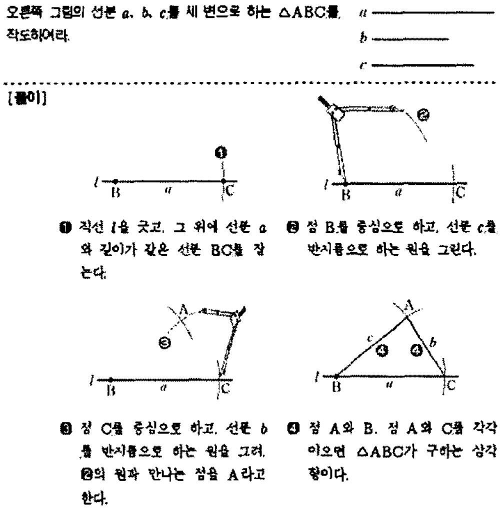
[증명] (⇒) 세 변의 길이를 a, b, c로 가지는 삼각형을 $\triangle ABC$라 하자. C_B를 점 B를 중심으로 반지름을 선분 BA의 길이 c로 가지는 원이라 하고 C_C를 점 C를 중심으로 하고 반지름이 b인 원이라 하면 점 A는 두 원 C_B와 C_C의 교점이다. 즉, 세 변의 길이를 a, b, c로 가지는 $\triangle ABC$의 꼭짓점 A, B, C는 각각 두 원 C_A, C_B의 중심과 두 원의 교점이다.



<그림 11> 삼각형과 두 원의 위치관계

(⇐) 반지름이 각각 b, c이고 두 원의 중심과의 거리가 a인 두 원이 서로 교차한다고 하자. 두 원의 중심을 각각 B, C라 하고 교차하는 두 점 중 하나를 A라 하면 두 원은 교차하므로 $a-b<c<a+b$이 성립한다. 이는 세 점 A, B, C가 삼각형을 이룰 수 있는 것을 의미하며 이 때 $\triangle ABC$는 세변의 길이를 각각 a, b, c로 가지는 삼각형이다.

다음은 교과서에서 제시된 세 변의 길이가 주어진 삼각형의 작도법이다.



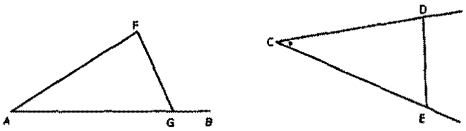
<그림 12> 변의 길이가 주어진 삼각형 작도

교과서에서 제시된 작도 방법에서 ①에서 주어진 선분을 원하는 곳에 옮겨놓거나 작도할 수 있는 것은 힐베르트 합동공리군에서 제1 공리로서 보장하였기 때문에 길이가 a인 선분을 l상에 작도할 수 있다. ②는 점 B와의 거리가 c인 점들을 찾는 작업으로 점 B를 중심으로 하고 반지름이 c인 원 C_B를 그리고 있다. ③은 점 C와의 거리가 b인 점들을 찾는 작업으로 점 C를 중심으로 하고 반지름이 b인 C_C를 그리고 있다. 점 A는 두 원 C_B와 C_C의 교차점으로 선분 BC의 상반평면과 하반평면에 각각 하나씩 존재한다. ④에서 $\triangle ABC$는 변의 길이를 a, b, c로 가지는 삼각형으로 꼭짓점은 각각 두 원 C_B, C_C의 중심과 교점이다.

3.2 주어진 각과 합동인 각의 작도

교과서에서 한 변과 양끝 각이 주어진 삼각형을 그릴 때 핵심 작업은 주어진 각과 같은 크기의 각을 작도하는 것이다. 주어진 각과 합동인 각의 작도 문제는 유클리드는 원론의 제 1권에서 정리 23으로 다루었고 힐베르트는 기하학 기초에서 합동의 공리에서 첫 번째 공리로 다루고 있다.

[유클리드 원론 제 1권 정리 23] 어떤 각을 주었다고 하자. 직선에서 한 점을 잡았을 때, 주어진 각과 같은 크기의 각을 그 점에서 만드시오.



<그림 13> 유클리드 원론에서의 주어진 각의 작도

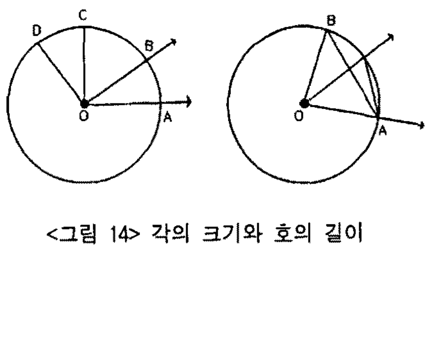
각은 초등학교 3학년 가에서 "한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형" 으로 도입되고 5학년에서는 평각을 180°로 설정한 각도기를 사용하여 각의 크기를 잰다 (교육인적자원부 수학 3-나, 5-나, 2005). 중학교 1학년 작도문제에서는 각도기를 사용하지 않고 컴퍼스로 각의 크기를 재어 이동하게 되는데 이는 각의 크기를 직선거리로 재는 것이므로 먼저 각의 크기 개념에 대해 논의하고자 한다.

각은 도형이고 각의 크기란 실수이므로 각의 크기는 모든 각의 집합 Ω을 정의구역으로 가지는 실수값 함수 $f:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ 로 정의할 수 있다. 따라서 주어진 고정된 반직선을 기선으로 가지는 각의 크기를 잴 때, 측정의 도구로 사용되기 위해서는 측도함수로써 적어도 다음의 조건을 갖추어야 한다.

(a) 모든 각의 크기를 표현할 수 있어야 한다.

(b) 두 각이 합동이면 각의 크기도 같아야 한다.

컴퍼스를 이용하여 각의 크기를 재는 방법은 컴퍼스는 원을 작도할 수 있고 각은 O를 중심으로 모든 방향으로 갈 수 있으므로 원을 이용하고자 하는 것은 자연스러운 발상이다.



<그림 14> 각의 크기와 호의 길이

각의 크기를 일정한 길이를 반지름으로 하는 원에서 주어진 각을 중심각으로 가지는 호의 길이로 재면 조건 (a)를 만족하고, 한 원에서 중심각의 크기가 같은 두 부채꼴의 호의 길이는 같으므로 조건 (b)도 만족한다. 더 나아가 호의 길이로 각의 크기를 재면 일대일 대응하는 증가함수가 되어 이상적이라 할 수 있으나 호의 길이를 컴퍼스나 자로 잴 수 없다는 결점이 있다.

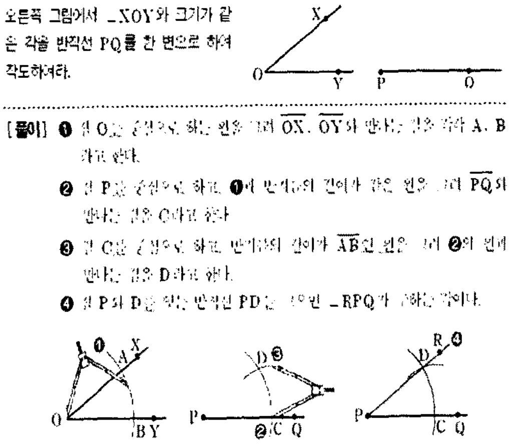
현의 길이를 각의 크기를 재는 측정값으로 사용하면 모든 각이 그 각을 중심각으로 하는 현의 길이로 나타낼 수 있으므로 조건 (a)를 만족한다.

<그림 14>의 왼쪽에서 두 각 $\angle AOB$와 $\angle COD$가 서로 합동이면 $\triangle AOB$와 $\triangle COD$는 두 변의 길이가 반지름의 길이와 같으므로 서로 SAS합동이다. 그러므로 선분 AB와 선분 CD의 길이는 같다. 이처럼 두 각 $\angle AOB$와 $\angle COD$가 서로 합동이면 반지름이 같은 원에서 이 각을 각각 중심각으로 가지는 부채꼴의 현 $\overline{AB}$ 와 $\overline{CD}$ 의 길이도 서로 같아지므로 조건 (b)를 만족한다.

<그림 14>의 오른쪽에서처럼 0°에서 180°사이에서는 각의 크기가 커지면 현의 길이도 길어지므로 삼각형을 구성하는 각의 크기는 현의 길이와 일대일로 대응하는 증가함수이다. 그러므로 각의 크기를 잴 때 각도기가 없이 컴퍼스만 주어지더라도 반지름이 동일한 원을 이용하면 중심각의 크기는 대응하는 현의 길이로 측정가능하다.

이처럼 컴퍼스로 각의 크기를 옮길 때는 중심각과 현들의 상호관계에 대한 이해가 필수적이므로 현행 교과서에서 작도단원 뒤에 배치되어 있는 중심각과 호, 현의 내용이 작도단원 앞으로 이동 된다면 학생들의 작도 교육이 더 의미를 가지고 효율적으로 이루어질 수 있을 것이다. 실제로 중학교 3학년의 '원'이라는 단원의 첫 부분에서 '한 원에서 크기가 같은 두 중심각에 대한 현의 길이는 서로 같다', '같은 길이의 두 현에 대한 중심각의 크기는 서로 같다'는 내용을 다룬다. 이것은 컴퍼스로 같은 각을 작도할 때 기본바탕이 되는 원리이므로 작도의 선행학습으로 다루어지는 것이 바람직하다.

다음은 교과서에서 제시된 주어진 각과 합동인 각을 작도하는 방법이다.



<그림 4> 교과서에서의 각의 작도 방법

여기서 $\angle XOY$와 크기가 같은 각을 작도할 수 있는 이유는 원하는 반직선과 반평면에 각의 크기가 같은 각을 작도할 수 있음을 힐베르트의 합동공리군에서 공리 3으로 정했기 때문이다. 그리고 $\angle XOY$와 크기가 같은 각을 작도할 때 ①, ②에서 반지름이 같은 원을 각각 그리는 이유는 반지름이 같은 원에서는 중심각의 크기가 같으면 현의 길이도 같아지기 때문이다. 그리고 ③에서 C를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{AB}$ 인 원을 그린다는 의미는 중심각 $\angle AOB$의 현의 길이와 같은 현을 가지는 각을 작도하기 위함이다. 이는 각의 크기가 현의 길이와 일대일 대응하므로 각의 크기를 현의 길이로 표현하고 같은 길이의 현을 옮겨 작도한 다음, 다시 현의 길이를 중심각의 크기로 다시 전환하는 절차를 따르고 있다.

V. 결론 및 제언

우리나라 중학교 교육과정의 증명교육에서 삼각형의 합동조건은 도형의 성질을 증명하는 과정에서 가장 많이 이용되는 부분으로 형식기하의 바탕이 된다고 할 수 있는데, 삼각형의 합동조건을 유도하는 결정조건은 실제적인 작도에 의해 정당화되고 있다. 작도문제는 기존의 기하지식을 재인식하고 재조직할 기회를 가지게 하고 전체적인 구조 하에서 문제를 해결해야 하므로 통찰력을 키울 수 있는 좋은 학습제재일 뿐 아니라 학습자의 활동에 의해 수학적 지식을 습득한다는 활동주의 교육 이론을 실행하기에 좋은 학습제재이다(장혜원, 1997). 이렇듯 작도 교육은 자체만으로도 기하와 수학교육에서 중요할 뿐 아니라 우리나라에서는 삼각형의 합동조건을 도입하는 도구로 사용되고 있다.

이 논문에서는 삼각형의 합동조건의 도입을 러시아나 독일과 달리하고 있는 우리나라의 교수학적 선택을 따르면서 교과서에서 제시된 작도방법이 의미를 가질 수 있는 교수 방안을 모색하였다. 삼각형의 합동조건과 관련한 우리의 기하교육이 보다 실질적이고 효과적으로 이루어지기 위해서는 다음과 같은 점이 고려되어야 할 것 같다.

첫째, 삼각형의 결정조건을 매개체로 사용하지 말고 삼각형의 합동조건을 직접적으로 공리처럼 도입하자는 것이다. 결정조건이 삼각형의 모양과 크기가 결정한다는 사실은 실제적인 작도가능성이 아니라 공리에 의해 보장받아야 하는 것으로, 공리를 다루지 않는 현행 교육과정에서는 삼각형의 세 가지 결정조건은 정당화의 절차 없이 도입되고 있다고 할 수 있다. 초등학교 5학년에서 모양과 크기가 같은 두 도형은 합동이라고 했기 때문에 의미를 이해하지 못한 상태에서 작도를 도입, 결정조건을 매개체로 삼각형의 합동조건을 사용하는 것보다는 오히려 합동조건을 직접적으로 도입하는 것이 더 자연스럽고 생각한다. 그리고 Hilbert의 유클리드 기하학에서도 삼각형의 SAS 합동조건과 동치인 조건을 공리로 택하고 있으므로 삼각형의 합동조건을 증명 없이 도입하더라도 현재의 결정 조건보다는 정당화의 근거를 가지고 있다고 할 수 있기 때문이다.

둘째, 합동단원을 배우고 난 다음 작도단원을 다루는 방안이다. 물론 작도가 현행 교육과정에서는 삼각형의 합동을 도입하기 위한 도구로 사용되므로 삼각형의 합동을 다른 방법으로 도입되어야 하겠지만, 선분의 수직이등분선이나 각의 이등분선 작도법은 삼각형의 SAS 합동에 의해 그 타당성이 입증되므로 이러한 작도법은 삼각형의 합동조건이 다루어진 다음 도입되는 것이 그 정당성을 확보할 수 있어 더 바람직하다. 실제로 유클리드 원론이나 힐베르트 기하학기초론, 러시아의 교육과정에서는 이러한 순서로 전개되어 있다.

셋째, 대부분의 교과서가 작도 단원의 뒤쪽에 배치하고 있는 직선과 원의 위치관계, 두 원의 위치관계, 부채꼴에서의 호와 현의 관계에 관한 학습내용이 작도단원을 다루기 전에 선행되어야 한다. 예를 들어, 자와 컴퍼스를 사용하여 그리는 직선도형은 꼭짓점에 의해 결정되므로 작도에서는 이 교점들을 생성하는 원과 직선, 두 원에 관한 이해가 선행되어야 한다. 또한 컴퍼스는 원을 그릴 뿐만 아니라 선분의 길이를 옮길 때도 사용되며 실제로 주어진 각을 원하는 반직선과 반평면에 옮기거나 작도할 때 더 많이 사용된다. 각의 크기를 그 각을 중심각으로 가지는 부채꼴의 현의 길이로 대신하여 작도하기 때문에 작도 문제를 다루기전에 원과 부채꼴, 중심각과 현의 관계에 대한 성질을 먼저 학습하여야만 작도에 대한 타당성과 의미를 학생들이 느낄 수 있을 것이다. 그러므로 현재 작도 단원보다 뒤에 배치되어 있는 이러한 단원들은 작도를 다루기 전의 위치로 옮겨 재배치되어야 한다.

참 고 문 헌

강옥기 외 2인 (2008). 중학교 수학 8-나, 서울: (주)두산

고상숙 · 장훈 (2005). 수학교사들의 내용지식이 학생들의 기하평가에 미치는 영향, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **19(2)**, pp.445-452.

교육인적자원부 (2008). 중학교 교육과정 해설(III), 서울:(주)대한교과서

박규홍 외 7인 (2002). 중학교 수학 8-나, 서울: (주)두레교육

박윤범 외 3인 (2002). 중학교 수학 7-나, 서울: (주)대한교과서

교육인적자원부 (2008). 수학 5-나, 서울: (주)두산

박혜숙 (2003). 중등교사양성을 위한 기하영역의 교육과정개발, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **42(4)**, pp.503-521

장혜원 (1997). 중학교 기하 영역 중 작도 단원에 대한 고찰, 대한수학교육학회논문집, **7(2)**, 327-336

정순영 외 5인 (2009). 중학교 수학 1, 서울: (주)두산

정환옥 · 노정학 (2005). 한국과 독일의 중등학교 수학교과서 비교연구 II -중학교 기하영역을 중심으로- 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **44(1)**, pp.1-14

한인기 (2005). 한국과 러시아의 수학교과서에 제시된 '삼각형의 합동'에 관련된 학습내용의 비교 연구, 한국학교수학회논문집, **8(1)**, pp.89-100

홍승표 (2005). 유클리드 기하 개론, 서울: 경문사.

유클리드·토마스 히드 씀, 이무현 옮김 (1998). 기하학원론 1권 해설서 -평면기하-, 서울: 교우사.

Fennerma, E., & Loef, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York: Macmillan.

Greenberg M. J. (이우영 역) (1988). 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학, 서울: 경문사.

Martin, G. E. *Transformation Geometry, an Introduction to Symmetry*, Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

Ryan P. J. (1984). *Euclidean and Non-Euclidean Geometry An analytical approach*, Cambridge

Schulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher*, 15(2), pp.4-14.

A Study on the Comparison of Triangle Congruence in Euclidean Geometry

Kang, Meekwang
Department of mathematics, Dongeui University, 995 Eumkwangro, Busanjin-gu, Busan Korea
E-mail : mee@deu.ac.kr

'The congruent conditions of triangles' plays an important role to connect intuitive geometry with deductive geometry in school mathematics. It is induced by 'three determining conditions of triangles' which is justified by classical geometric construction.

In this paper, we analyze the essential meaning and geometric position of 'congruent conditions of triangles in Euclidean Geometry and investigate introducing processes for them in the Elements of Euclid, Hilbert congruent axioms, Russian textbook and Korean textbook, respectively.

Also, we give justifications of construction methods for triangle having three segments with fixed lengths and angle equivalent to given angle suggested in Korean textbooks, are discussed, which can be directly applicable to teaching geometric construction meaningfully.

* ZDM classification : G53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D20
* Key Words : Congruent conditinons of triangles, congruent axiom, geometric construction