韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2010. 02. 제 49권, 제 1호, 39-51.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2010, Vol. 49, No. 1, 39-51.

숫자 또는 도형을 사용하여 제시된 비정형적인 문제에서 학생들의 반응에 대한 연구

황 선 욱 (숭실대학교)
심 상 길 (단국대학교)*

I. 서 론

기호로서의 형태만 생각한다면 2, 5, 100과 같은 숫자나 ○, □, △와 같은 수학적 도형은 모두 구체적인 대상으로서 특별한 차이가 없다. 이를테면, 응급전화번호 119나 이삿짐센터 전화번호 2424는 수(또는 숫자)가 갖는 계량적, 순서적 의미보다는 기호로서의 상징적 의미가 더 크다. 더욱이 ♥, ☆, ▷은 수학적 의미를 찾기 어려운 기호로서의 상징적 의미만 있는 도형이다.

그런데 덧셈, 곱셈 등을 배우면서부터 우리는, 숫자와 관련된 상황에서는 거의 자동적으로 그들 사이에 있을지 모르는 연산 구조를 파악하려는 시도를 하게 된다. 이와 같은 태도는 계산 기능을 숙달시키거나 수의 구조를 파악하는 등의 좌뇌적 활동에서는 유용하지만, 형태나 위치 등과 같은 기호로서의 기능을 파악하는 우뇌적 활동에서는 장애 요인이 되는 것으로 추측된다.

한편, 원, 정사각형 등의 수학적 정의는 다분히 추상적이지만 현실에서 구체적인 대체물이 있기 때문에, 대부분의 학생들은 기하학적 도형을 수에 비하여 더 구체적인 대상으로 인식한다. 또한 (가시적인) 도형을 다룰 때에는 수의 경우와는 달리 (비가시적인) 연산 구조를 생각하지 않아도 되기 때문에 상대적으로 쉽게 생각하는 성향이 있는 것으로 추측된다.

이와 같은 추측으로부터, 수학적 활동이나 수학 학습에서 숫자로 제시된 상황보다 도형으로 제시된 상황이 심리적으로 학생들에게 더 쉽게 느껴지지 않을까 하는 예측은 지극히 당연한 것으로 여겨진다. 초등학교 저학년까지의 수학적 활동에서 구체물을 많이 사용하는 것이 이와 같은 예측을 뒷받침하고 있다.[1)]

1. 연구의 필요성 및 목적

학교수학에서 다루어지는 대부분의 문제들은 숫자와 도형을 사용하여 제시되어지고 있는데, 이들은 학생들에게 다양한 수학적 경험을 제공하기 위한 소재로도 활용된다. Carter와 Russell(2001)은 좌뇌와 우뇌의 균형 있는 발달을 훈련할 수 있는 숫자와 도형을 이용한 비정형적인 문제를 소개하고 있다. 비정형적인 문제란 그 문제를 해결하는 알고리즘이나 답을 얻는 방법을 모르는 상태에서 문제해결 전략이나 독자적인 해결 방법을 구안하여 풀어야 하는 문제를 말한다(황혜정 외, 2007). 최근 들어 문제해결을 통하여 수학적 사고력을 키우기 위해 이러한 비정형적인 문항을 개발하여 활용하고 있다. 그런데 Carter와 Russell이 제시한 숫자와 도형에 관련된 문항은 정형적인 알고리즘에 대한 기계적인 계산만을 연습한 학생들에게는 매우 어렵게 느껴진다.

계산 기능을 배양하기 위해서는 반복된 연습을 많이 하여 그 기능이 자동화[2)]되어야 한다. 문제는 자동화를

* 접수일(2009년 12월 22일), 수정일(2010년 2월 9일), 게재확정일(2010년 2월 16일)
* ZDM분류: C30
* MSC2000분류: 97C30
* 주제어: 숫자, 도형, 비정형적 문제, 직관, 표상, 좌뇌와 우뇌
* 교신저자

1) 초등학교에서 미지수로 x 대신 □를 사용하는 것도 시각적으로 익숙한 도형을 사용하여 학생들의 심리적 부담을 덜어주려는 의도가 있다.
2) 기계적인 기호 조작 체계로서의 알고리즘적인 측면에서, 기호체계에 대한 의미 있는 자동조작을 가능하게 하여 초보적인 과정에 일일이 주의하지 않도록 숙달되는 과정을 말한다(우정호, 1998).

위하여 어떤 방법으로 연습을 하는 것이 좋은가 하는 점일 것이다. 계산 방법만을 암기하여 기계적으로 적용하는 연습이 바람직하지 않다는 것은 우리의 경험이 잘 말해 준다. 무엇보다도 먼저 계산 방법의 바탕이 되는 원리를 잘 이해한 다음 그러한 계산 기능이 안정되고 유연한 사고 양식으로 형성되도록 연습을 하여야 할 것이다. 그렇게 하기 위해서는 문제의 특성을 잘 나타내는 전형적인 예로부터 극단적인 경우까지 관련된 요소나 자료를 여러 가지로 바꾸어 생각해보고, 표현을 다양하게 변화시켜 가며 연습을 해보는 것도 좋은 방법일 것이다. 그리고 여러 가지 계산과 표현의 변환이 요구되는 문제를 많이 해결해봄으로써 계산의 원리를 반성하고 지적 기능이 통합되고 안정되어 가도록 노력해야 할 것으로 생각된다(우정호, 1998). 따라서 단순 계산 위주의 문제 상황을 탈피하여 관련된 요소나 자료를 여러 가지로 바꾸어 생각해보고, 표현을 다양하게 변화시켜 가며 연습할 수 있는 문제를 개발하여 학생들에게 제공하는 것이 수학적 사고력을 키우는 데 매우 효과적일 것이다. 이러한 이유로 숫자와 도형을 사용한 퍼즐, 스도쿠, 방진 등과 같은 다양한 문항이 개발되어 여러 형태의 교육기관에서 활용되고 있다.

이 연구에서는 숫자와 도형을 사용하여 제시된 새로운 문제 상황에서 학생들의 문제해결 과정을 분석하고 이러한 문제에서 어려움을 느끼는 요소와 해결 과정에서 나타나는 현상을 조사하여, 숫자와 도형을 사용하여 구성된 문항 개발과 그 활용에서 예상되는 시사점을 찾으려고 한다. 이를 위하여 직관과 표상에 대해 조사하고, 연산이나 수의 규칙 등을 찾는 데 큰 어려움이 없는 학생들을 대상으로 Carter와 Russell이 제시한 문항과 이를 기초로 변형한 문항을 해결하도록 하여 학생들이 제시한 풀이 과정을 분석하였다.

2. 연구의 가설

이와 같은 관점에서, 숫자 또는 도형을 사용하여 제시된 비정형적인 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 학생들의 반응에 대하여 다음과 같은 가설을 세웠다.

- 숫자로 제시된 문제의 해결 과정에서 연산 관계를 고려해야 하는 경우에는, 숫자를 도형으로 바꾸어서 제시된 상황이 학생들에게 더 쉽게 여겨질 것이다.
- 도형으로 제시된 문제의 해결 과정에서 위치 관계 또는 규칙성을 고려해야 하는 경우에는, 도형을 숫자로 바꾼 상황이 학생들에게 더 쉽게 여겨질 것이다.

II. 문제해결에서 직관과 표상

직관은 분석적 사고를 거치지 않은 직접적인 이해나 인지를 의미한다. 직관적 지식은 충분한 경험적인 증거나 엄밀한 논리적 논증에 의해 뒷받침되지 않음에도 불구하고 확실하고 분명한 것으로 수용되는 경향이 있는 지식이다(우정호, 2000). 이러한 직관적 지식을 조두경과 박만구(2008)는 문제해결 과정에서 나타나는 수학적 지식 중 비형식적 지식에 포함하였다. 수학적 지식은 개념적 지식과 절차적 지식으로 구성된 형식적 지식과 직·간접 경험으로 얻은 비형식적 지식으로 구성된다.

문제해결은 수학 활동의 핵이고 수학적 지식을 발전시키기 위한 주된 수단이다. 그것은 즉각적으로 도달할 수 없는 목표에 도달할 수 있는 길을 찾는 것이다(NCTM, 2000). 학생들은 수학적 지식을 이용하여 문제의 내용을 정확히 이해하고 그 이해를 바탕으로 문제해결의 계획을 세우고 문제에 적합한 해결전략을 수립하여 문제를 해결한다. 이때 학생들이 어떤 발견 전략을 사용하고 해결과정을 조정하고 확인하는지의 일련의 수학적 사고 과정이 문제해결의 본질이며 수학교육의 초점이 될 수 있다(조두경, 박만구, 2008).

직관은 원시적인 느낌으로 생각되거나 그 의미가 자명한 상식적인 용어로 사용되고 있으며, 보다 근원적인 요소로 환원할 수 없는 즉각적인 일차적 인지작용으로 간주되면서 여러 가지 현상에 대한 기술과 설명에 사용된다. 추론이나 판단 과정에서 우리는 자명한 것으로 생각되는 표상이나 관념에 의존하지 않을 수 없는바, 직관은 그러한 기본적인 정신 작용으로 수학적 사고와도 매우 밀접한 관련성이 있다. 그러나 직관은 현상에 대한 소박한 판단에서 나타나는 여러 가지 전형적인 오류가 보여주듯이 수학의 발달과 학습의 심각한 장애 요인이 되기도 한다(우정호, 2000). 따라서 직관적 장애는 회피할 수 없기 때문에 분명한 교수학적 전략을 바탕으로 그것을 극복해야 한다.

직관은 수학 학습이나 문제를 해결하는 상황에서 즉각적인 판단에 의존한다는 면에서 '즉각성(immediacy)'이라는 특징을 가지고 있다. 직관의 즉각성은 시각화를 통한 수학적 개념이나 수학적 사실의 이해와 같이 수학 학습 과정에서 학습 내용에 대한 즉각적인 이해가 가능하도록 해준다. 또한 직관의 즉각성은 수학적 문제를 해결하는 과정에서 문제의 조건이나 구조에 대한 통찰을 바탕으로 즉각적인 판단과 해결에 이르게 한다. 이러한 판단은 옳은 해를 산출하도록 이끌기도 하지만, 때로는 잘못된 판단의 결과를 초래하기도 한다. 학생들은 수학 학습이나 수학적 문제해결의 상황에서 기능적 고착화에 의해 즉각적으로 판단을 하게 된다. 선택이 자동적이기 때문에 학생들은 정보의 중요한 부분을 이용하지 않을 뿐만 아니라, 과거의 경험에 우선적인 조건을 무조건적으로 수용한다. 이러한 결과는 과거의 경험에 의한 과신에 의한 것이다(이대현, 2006). 이와 같이 직관은 학습에서 기능적 고착화와 같은 인지적 장애로 진행될 수 있다.

직관은 문제해결에 유용한 단서를 제공하며, 참된 지식의 근원으로 인식되고 있다. 그러나 직관으로 인해 문제해결 과정에서 야기되는 오류는 새로운 교수전략의 개발의 필요성을 암시한다. 수학 학습에서 수학적 사실이나 개념의 형식적 해석과 직관적 해석의 적절한 균형을 위한 교수전략으로는 직관과 논리의 조화, 기능의 고착화 현상의 극복, 유용한 직관 모델의 개발, 메타인지 능력의 개발 등을 들 수 있다(이대현, 박배훈, 2001). 또, 인지적 장애는 충분한 사례와 반례를 통한 인지적 유연성이 확보됨으로써 극복된다(유윤재, 2007).

직관은 경험을 요약하고, 일단의 자료에 대한 간결하고 전체적인 표상을 제공하며, 정보의 불충분함을 극복하도록 도와주고, 추론과정에서 의미 있는 해석을 도입하고, 정신활동에 유연한 연속성과 능동적인 적응행위를 특징짓는 굳건함과 효율성을 부여한다. 직관의 역할은 우리의 사고에 신뢰감 있고 행동적으로 의미 있는 내적으로 구조화된 표상을 부여하는 것이다(우정호, 2000).

이양미(2005)는 내적 표상을 언어, 구체물, 형상 등을 이미지화하고 구조화하여, 수학적 지식・개념・의미・전략 등을 획득하고 이해하는 내적 사고과정과 방식으로 정의하고, 외적 표상을 내적 표상의 외적 구현체로, 수학적 내용을 표현하는 그림, 표와 그래프, 문자와 식, 기호, 조작 등의 표현 체계와 표현 양식으로 정의하였다. 또한, 표상은 수학의 전 내용 영역에 걸쳐 있으며, 수학 교수-학습의 많은 부분을 차지한다고 할 수 있다. 학생들이 사고를 조직하고, 문제를 해결하며, 의사소통을 하는 데 표상의 사용은 필수적이다. 표상을 통하여 문제에 제시된 정보나 상황을 알기 쉽게 나타내고, 체계적으로 조직하며 추론해간다. 그럼으로써, 문제를 효율적으로 해결하고, 논리적으로 추상화하는 능력을 발전시킬 수 있다. 교사는 학생의 표상을 통하여 그들이 수학을 어떻게 학습하고 사고하는지 보다 잘 이해할 수 있다. 이처럼, 표상은 교사와 학생 모두에게 중요한 요소이다.

한편, 표상은 과정과 산출 모두에 관련된다. 즉, 어떤 형태로 수학적 개념이나 관계를 획득하는 행위와도 관련됨은 물론 형식 그 자체와도 관련된다. 게다가 표상은 외적으로 관찰할 수 있는 과정과 결과뿐만 아니라 수학을 하는 사람들의 마음속에 내적으로 발생하는 그것에도 적용된다. 표상은 학생들이 자신의 생각을 조직화하는 것을 도울 수 있다. 학생들이 표상을 사용하면 더 구체적이고 반성에 대해 쓸모 있는 수학적 사고를 형성시킬 수 있다(NCTM, 2000). 표상은 학습자나 수학적 문제해결과 별개로 존재하는 것이 아니라 수학적 개념이나 문제해결 전략 등과 밀접하게 연결되어 있다. 학습자가 스스로 구성하고 상호작용을 통하여 더욱 발전시킬 수 있는 수학적 활동으로 지도하려는 노력이 요망된다. 표상을 따로 지도하려 하기보다 수학적 문제해결 과정에서 지도하고, 종이에 나타난 결과만으로 학생의 표상을 이해하려기보다 활동과 상호작용을 고려하여 지도해야 할 필요가 있다(이양미, 2005).

III. 실험 방법 및 절차

1. 실험 대상

이 연구에서는 선행학습에 상관없이 숫자와 도형을 사용하여 제시된 비정형적인 문제 상황에서 학생들이 어떤 반응을 보이는 가를 알아보기 위해 사칙계산, 수의 규칙, 대응 등에 충분한 기초 지식이 있는 대학생을 실험 대상으로 하였다. 이 실험에 참여한 대상은 서울에 위치한 4년제 S대학교 재학생 115명(1차 평가 대상 61

명, 2차 평가 대상 54명)으로, 이 학생들은 해당 학기에 수학의 필요성과 활용에 대한 이해를 높이기 위하여 개설된 "수학의 이해"란 교양과목을 수강한 학생들이며, 수학에 대해 긍정적인 관심을 갖고 있으며 이 실험에 성실하게 참여하겠다고 자원한 학생들이었다. 실험의 특성상, 1차 평가와 2차 평가 대상은 서로 다른 학생으로 구성하였다.

2. 실험 방법

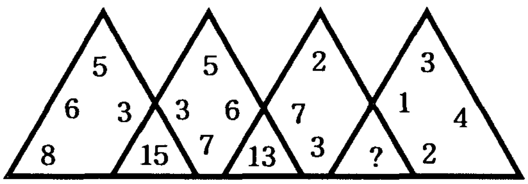
숫자와 도형을 사용하여 제시된 문항에서, 숫자와 관련된 문항(이하 '숫자 문항')이 제시된 다음에 도형과 관련된 문항(이하 '도형 문항')이 제시된 집단과 도형 문항이 제시된 다음에 숫자 문항이 제시된 집단의 반응 사이에 어떠한 현상이 발생하는지를 알아보기 위해, 실험에 참여한 대상에게 문제를 제시하고 그 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 현상을 분석하는 실험을 수행하였다. 실험 대상들이 문제를 해결하는 과정에서 어떤 반응을 나타내는지를 살펴보기 위해 그들이 작성한 기록지를 수집하여 그 내용 중에서 유의미한 반응을 선정하고, 선정된 반응이 의미하는 바에 따라 이를 조직화하고 주제별로 분류하여 분석하였다.

3. 실험 문항 및 실험 절차

(1) 실험 문항

이 실험에서 사용된 문항은 Carter와 Russell(2001)이 우뇌를 훈련시키기 위하여 고안한 숫자 문항 및 이들을 근거로 하여 숫자를 도형으로 바꾼 도형 문항으로 구성되었다.

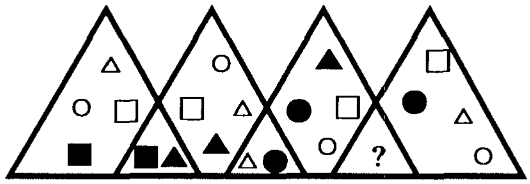
① 숫자 문항 1(Carter & Russell, 2001, p. 77)



<그림 1> 숫자와 관련된 우뇌 훈련 문항 1

<그림 1>의 문항은 각 삼각형의 내부에 제시된 숫자와 이웃하는 두 삼각형이 겹쳐져서 만들어진 삼각형에 제시된 숫자 사이의 관계를 파악하여 ?에 알맞은 숫자를 찾는 문제이다. 이 경우, 문제가 숫자로 주어진 관계로 수 사이의 연산 구조가 문제해결의 범주에 포함되게 된다.

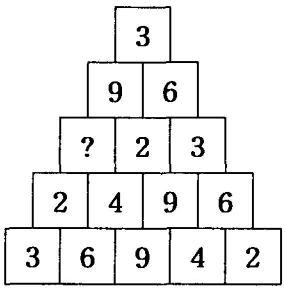
② 도형 문항 1



<그림 2> 숫자를 도형으로 바꾼 문항 1

<그림 2>의 문항은 ①번 문항에서 숫자를 도형으로 각각 바꾼 것으로 ①번 문항에서는 고려 대상이 되었던 수 사이의 연산 구조가 필요 없게 된다. 그 대신 도형이 배열되어진 위치 관계를 고려하게 된다.

③ 숫자 문항 2(Carter & Russell, 2001, p. 81)

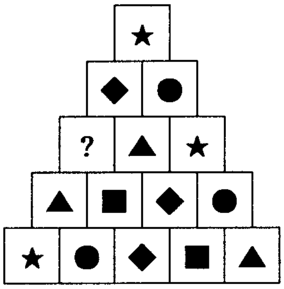


<그림 3> 숫자와 관련된 우뇌 훈련 문항 2

<그림 3>의 문항은 ①번 문항보다는 형태가 단순하며, 숫자를 사용하여 순서 구조[3] 또는 개수를 파악하는 문제이다.

3) Carter와 Russell(2001)은 이 문제를 순서 구조를 파악하는 활동으로 제시하였다.

④ 도형 문항 2



<그림 4> 숫자를 도형으로 바꾼 문항 2

<그림 4>의 문항은 ③번 문항의 숫자를 도형으로 각각 바꾼 것으로 ③번 문항과 해결하는 방법은 같다.

(2) 실험 절차

실험 대상에게 문제에 대해 충분히 설명한 다음 문제지(부록 1)를 나누어 주고, 각 문항 당 각각 10분의 시간을 주었다. 1차 실험은 2006년 1학기에 실시하였으며

①번 → ②번 → ③번 → ④번

의 순서로 문제를 풀도록 하였고, 2차 실험은 2006년 2학기에 실시하였으며

②번 → ①번 → ④번 → ③번

의 순서로 문제를 풀도록 하였다.

문제를 푼 답과 함께 풀이 과정도 모두 기록하게 하였다. 평가가 끝난 후 회수한 답안지의 내용을 검토하여 학생들이 제시한 답들이 의미하는 유형에 따라 조직화하고 분류하여 분석하였다(부록 2).

IV. 실험 결과 및 분석

1. 실험 문항의 설명과 정답률

(1) 실험 문항의 설명과 정답

학생들에게 실시한 실험 문항에 대한 내용 설명 및 풀이 방법과 정답은 다음과 같다.

①번 문항은 이웃하는 두 삼각형이 겹쳐지지 않은 부분에 놓여 있는 숫자들의 그룹(이를테면, 왼쪽에서 첫 번째와 두 번째 삼각형에서 5, 6, 3, 8 및 5, 3, 6, 7)에서 공통으로 포함되지 않은 수들(8과 7)의 합이, 겹쳐져서 만들어진 작은 삼각형에 놓여 있는 숫자(15)가 된다. 즉,

$$8+7=15,\ 5+6+2=13$$

이 성립한다. 따라서 $?=7+1+4=12$이다.

②번 문항은 ①번 문항에서처럼 이웃하는 두 삼각형이 겹쳐지지 않은 부분에 놓여 있는 도형들의 그룹에서, 공통으로 포함되지 않은 것들을 왼쪽과 오른쪽의 위치를 유지하여 배열하는 방법이다. 따라서 ? = ▲△이다.

이 경우, ①번 문항에서 덧셈의 연산 구조가 답을 결정하는 요소인 점과 대비시켜서 ②번 문항에서는 도형의 위치 관계를 답을 결정하는 요소로 정하였다.

③번 문항은 피라미드 모양으로 배열된 정사각형 속에 다섯 개의 숫자 2, 4, 9, 6, 3이 바닥의 오른쪽에서 시작하여 사슬 구조를 이루면서 위로 배열되는 규칙이다. 따라서 $?=4$이다.

④번 문항은 ③번 문항에서 다음과 같이 숫자를 도형으로 바꾼 문제이다.

2 → ▲, 4 → ■, 9 → ◆, 6 → ●, 3 → ★

따라서 ③번 문항에서와 같은 원리에 의하여 ? = ■이다. Carter와 Russell(2001)은 그들의 책에서 ③번 문항의 답을 찾는 원리로서 수열의 사슬 형태의 순서 구조만을 제시하였으나, 이 외에도 단순하게 정사각형 속에 들어 있는 숫자(2, 4, 9, 6, 3) 또는 도형(▲, ■, ◆, ●, ★)의 개수를 세어서 답을 해도 무관한 결과가 발생하였다. 그러나 이 실험에서는 후자의 방법은 오답으로 처리하였다.

(2) 실험 문항의 정답률

1차 실험에 참여한 학생 61명에 대한 정답률은 <표 1>과 같다.

<표 1> 1차 실험의 정답률

문항	정답자 수	정답률(%)	실험 순서
①	10	16.39	1
②	21	34.43	2
③	23	37.70	3
④	30	49.18	4

2차 실험에 참여한 학생 54명에 대한 정답률은 <표 2>와 같다.

<표 2> 2차 실험의 정답률

문항	정답자 수	정답률	실험 순서
①	13	24.07%	2
②	4	7.41%	1
③	20	37.04%	4
④	10	18.52%	3

2. 실험 결과 분석

(1) 1차 실험의 분석

①번 문항에서는 61명의 학생 중 12라고 답한 학생은 12명이었으나 그 중 2명의 학생은 풀이 과정이 정확하지 않아 정답으로 인정하지 않고 10명만을 정답으로 인정하였다.

②번 문항에서는 ▲△이라고 답한 학생은 21명이었고, 순서를 바꾸어 △▲라고 답한 학생도 7명이 있었다. 그러나 ①번 문항에 내재되어 있는 연산 구조와 비교하여 ②번 문항에서 도형 사이의 순서 구조를 감안해야 하는 것으로 하여 △▲라는 답을 오답으로 처리하여 21명만 정답으로 인정하였다.[4)]

①번 문항을 해결한 학생 10명 중 2명을 제외한 8명의 학생은 ②번 문항도 해결하였다. 또, ①번 문항의 답을 찾을 수 없었던 학생 중 13명이 ②번 문항의 답을 찾았다.

(①번 → ②번)의 순서로 문제를 푼 학생 중 정답자는 2.1배 증가하였다. 숫자 문항에서는 대부분의 학생들이 연산이나 수열에 대해서만 생각하는 경우가 많았으나 ①번 문항을 거쳐 ②번 문항을 해결하는 경우 연산 구조보다는 도형 사이의 관련성이나 공통성을 조사하여 2.1배의 학생들이 올바른 풀이를 하였다.

③번 문항에서는 61명의 학생 중 4라고 답한 학생은 41명이었으나 그 중 18명의 학생들은 풀이에서 순서 구조를 생각하지 못하고 숫자의 개수만 세어서 풀었다. 따라서 이들은 정답으로 인정하지 않고 23명만을 정답으로 처리하였다. ④번 문항에서는 ■라고 답한 학생은 55명이었으나 ③번에서와 같은 이유로 25명의 학생을 오답으로 처리하고 30명만 정답으로 인정하였다.

③번 문항을 해결한 학생 23명 중 2명을 제외한 21명의 학생은 ④번 문항도 해결하였다. 또, ③번 문항을 해결할 수 없었던 학생 중 9명이 ④번의 정답을 찾았다.

(③번 → ④번)의 순서로 문제를 푼 학생 중 정답자는 1.3배 증가하였다. 이는 (①번 → ②번)의 순서로 문제를 풀어 정답자가 증가한 수보다는 적은 증가였다. 그 이유를 살펴보면 ①번 문항은 ③번 문항보다 문제를 해결하는 변수가 많아 정답률이 낮았고, ①번 문항의 문제 해결 경험을 통해 ②번 문항에서는 많은 학생들이 정답을 찾은 반면 ③번 문항에서는 이미 많은 학생들이 정답을 찾아 ③번 문항의 경험을 통해 ④번 문항을 해결한 학생의 증가율이 (①번 → ②)번의 순서로 문제를 푼 경우보다 낮게 나타났다.

(2) 2차 실험의 분석

②번 문항에서는 54명의 학생 중 ▲△라고 답한 학생은 6명이었으나 그 중 2명의 학생은 풀이 과정이 정확하지 않아 정답으로 인정하지 않았다. 또한, 순서를 바꾸어 △▲라고 답한 학생도 4명이 있었으나 앞에서 언급한 바와 같이 이 경우는 오답으로 처리하였다. 따라서 ▲△라고 답한 학생 중 풀이 과정이 정확한 4명만을 정답으로 인정하였다.

①번 문항에서는 12라고 답한 학생은 14명이었으나 그 중 1명의 학생은 풀이가 정확하지 않아 13명만을 정답으로 인정하였다.

②번 문항을 해결한 학생 4명 모두 ①번 문항도 해결하였다. 또, ②번 문항에서는 해결할 수 없었던 학생 중 9명이 추가로 답을 찾았다.

(②번 → ①번)의 순서로 문제를 푼 학생 중 정답자는 3.25배 증가하였다. 먼저, 도형 문항이 주어졌을 때 문제가 요구하는 것이 무엇인지 파악하지 못해 문제를 해결하지 못하였으나, 숫자로 주어진 경우 단순히 연산이나 수의 규칙을 생각하는 경우도 있었으나 먼저 풀었던 ②번 문항과 유사성을 생각하면서 연산이나 수의 규칙 외의 풀이를 찾으려는 노력으로 인해 문제를 해결하

4) 순서 구조를 무시하는 경우에는 정답자가 28명이 되어, 정답률은 45.90%가 된다.

여 높은 정답률 상승을 보였다.

④번 문항에서는 54명의 학생 중 ■라고 답한 학생은 41명이었으나 그 중 31명의 학생들은 풀이에서 순서 구조를 생각하지 못하고 주어진 도형의 개수만 세었으므로 정답으로 인정하지 않았다. 따라서 10명이 답을 찾았고, ③번 문항에서도 4라고 답한 학생은 48명이었으나 ④번과 같은 이유로 28명의 학생을 오답으로 처리하여 20명만 정답으로 인정하였다.

④번 문항을 해결한 학생 10명 모두는 ③번 문항도 해결하였다. 또, ④번 문항을 해결할 수 없었던 학생 중 10명이 추가로 ③번 문항의 답을 찾았다.

(④번 → ③번)의 순서로 문제를 푼 학생 중 정답자는 2배 증가하였다. 이는 도형이 주어졌을 때 생각하지 못하였던 순서 구조가 도형보다 더 구체적이고 경험적으로 많이 다룬 숫자가 주어지면서 문제에서 주어진 구조를 쉽게 파악하여 더 수월하게 문제를 해결한 것으로 보인다.

(3) 1차 실험과 2차 실험 결과의 비교

동일한 구조를 갖는 ①, ②번 문항 중에서, 1차 실험에서는 ②번 문항의 정답률이, 2차 실험에서는 ①번 문항의 정답률이 높게 나왔다. 구조가 동일한 문제를 해결하는 경우에는, 앞에서 사용한 유용한 사고가 뒤의 문제 풀이에 긍정적 영향을 미쳤고, 더 나아가 숫자에서 도형으로, 도형에서 숫자로 문제의 형태가 바뀌면서 앞에서 생각하지 못했던 아이디어가 서로 다른 기호를 사용한 문제에 대한 경험을 통해 문제를 해결한 것이다. 따라서 숫자 또는 도형이 지니는 직관의 즉각성에서 발생할 수 있는 오류를 서로 다른 기호에 대한 문제를 통해 극복하게 된 것으로 볼 수 있다. 이는 직관적 해석뿐만 아니라 형식적 해석이 가능해진 것이고 직관과 논리의 조화와 기능의 고착화를 극복하게 된 것이다(이대현, 박배훈, 2001).

마찬가지로, ③번과 ④번 문항의 정답률을 살펴보면 먼저 푼 문제보다 뒤에 푼 문제의 정답률이 높은 것을 볼 수 있다. 이와 같은 현상도 ①, ②번 문항에서와 같은 양상임을 알 수 있다.

1차 실험에서 ①번 문항을 틀리고 ②번 문항의 답을 맞힌 학생 A는 "도형이 더 풀기가 쉬운 것 같아요. 숫자는 도형보다 더 여러 가지 생각을 하게 되어 풀기가 더 어려워요 (ex) 수열, 약수, 덧셈, 뺄셈, …"라고 기록하였고, 또, ①, ②번 문항을 모두 맞힌 학생 B는 "도형 안에 도형이 흩어져 있는 게 눈에 더 빨리 들어와 숫자로 하는 것보다 더 거부감 없이 풀었다."라고 기록하였다.

위의 두 학생의 예를 통해 알 수 있듯이 같은 구조의 문제이더라도 숫자 문항은 연산, 규칙성, 수의 성질 등 다양한 구조에 대해 탐색해야 하므로 문제해결에 대한 변수가 많아 문제를 이해하는 단계에서부터 어려움을 나타낸 데 비하여, 도형 문항은 도형의 모양과 배열 위치만을 생각하기 때문에 숫자보다는 더 쉽게 문제를 이해하고 답을 찾을 수 있었다. 또한, 숫자로 주어진 문제에서는 연산이라는 즉각성에 의한 기능의 고착화라는 인지적 장애 때문에 연산 이외에 다른 문제해결 방법을 구안하지 못한 학생들도 있었다.

도식적 표상의 구조는 하나의 개념에 속성(attribute)이라고 하는 슬롯(slot)에 속성가(value)라는 명제로 구성된다(유윤재, 2007). 즉, 숫자는 모양, 연산, 순서, 규칙성과 같은 속성을 갖는 반면에 도형은 모양, 규칙에 대한 속성만을 갖는다. 따라서 숫자보다는 도형이 갖는 속성이 더 적기 때문에 문제를 해결할 때 고려해야 할 점이 더 적게 나타난다는 것과 같은 맥락이다.

그러나 2차 실험에서 도형 문항을 먼저 제시한 경우, 1차 실험에서 숫자 문항을 먼저 제시한 경우보다 더 낮은 정답률이 나왔다. 물론 실험 집단이 다르므로 먼저 제시된 문항끼리의 정답률을 비교하는 것은 무의미하나 이 연구에서 필요로 하는 기본적인 수학적 배경을 지닌 대학생이라고 생각할 때 의미 있는 결과로 볼 수 있다. 이 연구를 설계할 때, 속성을 더 많이 갖는 숫자 문항이 도형 문항보다 더 어려울 것으로 예상하였으나 결과적으로 볼 때, 도형 문항이 더 어려운 것으로 나타났다. 그 이유를 생각해 보면 속성을 많이 갖는 숫자로 문제가 먼저 제시된 경우, 문제해결을 위해 다양한 접근 방법을 생각하지만 도형으로 제시된 경우 문제의 이해 단계부터 어려움을 느끼고 단순히 도형들 사이의 관계만을 생각해 문제를 해결하지 못한 것으로 나타났다. 이러한 현상은 숫자보다 도형으로 구성된 문제에 대한 경험이 부족하기 때문에 이에 따른 아이디어가 부족한 것으로 보인다.

1차 실험에서 (① → ②)의 순서로, 즉 숫자 문항 다

음 도형 문항을 제시한 경우 정답률은 2.1배 상승하였고, 2차 실험에서 (② → ①)의 순서로, 즉 도형 문항 다음 숫자 문항을 제시한 경우 정답률은 3.25배 증가하였다. 즉, 1차 실험보다 2차 실험에서 정답률이 높게 상승했다.

1차 실험에서 (③ → ④)의 순서로 문제를 제시한 경우 정답률은 1.3배 상승하였고, 2차 실험에서 (④ → ③)의 순서로 문제를 제시한 경우 정답률은 2배 증가하였다. 이러한 현상도 ①, ②번 문항과 같이, 1차 실험보다 2차 실험에서 정답률이 높게 나왔다.

도형 문항에서는 찾기 힘들었던 구조가 도형보다 절대적으로 더 많이 다루고 친근하며 음독(音讀)이 편한 숫자로 바뀌면서 높은 정답률 상승을 보였다.[5] 1차 실험과 비교할 때 숫자 문항 다음에 도형 문항을 해결하는 것보다 도형 문항을 해결한 후 숫자 문항을 해결하는 경우 더 높은 정답률의 상승을 보인 것이다. 초기에 아무런 정보가 없이 도형의 공통성을 찾으려는 시도에서 답을 찾기 힘들었으나 위에서 언급한 바와 같이 도형보다 음독이 편한 숫자로 바뀐 경우에 그 구조를 좀 더 수월하게 찾는 경향을 보였다.

또한, 제시된 숫자나 도형의 배열이 불규칙하고 연산 구조가 내포된 ①, ②번 문항보다 배열의 규칙성과 순서 구조가 내포된 ③, ④번 문항의 정답률이 1, 2차 실험에 상관없이 높게 나타났다. 이와 같은 이유에서 ①, ②번 문항의 난이도가 더 높다고 볼 수 있다.

③, ④번 문항 중에서 ③번(숫자 문항)이 먼저 제시된 경우 4를 답으로 한 학생 41명 중 순서 구조를 생각한 학생이 23명이었고, 숫자의 개수를 세어 답을 찾은 학생이 18명이었다. 반면에 ④번(도형 문항)이 먼저 제시된 경우 ■를 답으로 한 학생 41명 중 순서 구조를 생각한 학생이 10명이었고, 도형의 개수를 세어 답을 찾은 학생이 31명이었다. 문제가 숫자로 주어지는 경우 숫자의 특성 상 숫자들의 순서나 수열 등의 순서 구조를 먼저 생각하는 학생이 많았고, 도형으로 주어지는 경우 도형의 특성 상 도형의 형태에 주목하게 되어 도형의 개수를 먼저 세는 학생이 많은 것으로 나타났다. 이는 수학적 문제해결의 상황에서 학생들이 숫자와 도형에 대한 기능적 고착화에 의해 즉각적으로 답을 판단한 결과로 볼 수 있다. 선택이 자동적이기 때문에 학생들은 정보의 중요한 부분을 이용하지 않을 뿐만 아니라, 과거의 경험에 우선적인 조건을 무조건적으로 수용하는 성향을 보였다. 이러한 결과는 과거의 경험에 의한 과신에 의한 것이다(이대현, 2006). 따라서 이 실험의 ③, ④번 문항에서는 숫자 문항이 먼저 제시되느냐 또는 도형 문항이 먼저 제시되느냐에 따라 정답률이 크게 다르게 나타나는 양상을 보였다.

V. 결론 및 제언

이 연구의 목적은 숫자 또는 도형으로 제시된 비정형적 문제의 해결 과정에서 학생들이 보이는 반응이나 성향을 알아보기 위한 것이다. 이를 위하여 1차 실험(61명), 2차 실험(54명)으로 나누어 숫자 문항을 먼저 해결한 후 도형 문항을 해결한 학생들과 도형 문항을 먼저 해결한 후 숫자 문항을 해결한 학생들이 제시한 답안지의 내용을 분석하여, 각각의 내용에서 유의미한 과정을 선정하고, 선정된 과정들은 과정이 의미하는 바에 따라 조직화하고 주제별로 분류하여 분석하였다.

이와 같은 분석의 결과에 근거하여 이 논문의 서론에서 세웠던 두 가지 가설을 분석하여 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다. 첫째, 숫자로 제시된 문제의 해결 과정에서 연산 관계를 고려해야 하는 경우에는, 숫자를 도형으로 바꾸어서 제시된 상황이 학생들에게 더 쉽게 여겨질 것이라는 가설에 대하여, 가설과 반대로 도형 문항이 더 어려운 것으로 실험 결과가 나타났다. 그 이유를 생각해 보면, 속성을 많이 갖는 숫자로 문제가 먼저 제시된 경우, 문제해결을 위해 다양한 접근 방법을 생각하지만 도형으로 제시된 경우 문제의 이해 단계부터 어려움을 느끼고 단순히 도형들 사이의 관계만을 생각하여 문제를 해결하지 못한 것으로 나타났다. 이러한 현상은 숫자보다 도형으로 구성된 문제에 대한 경험이 부족하기 때문에 이로부터 형성되어진 문제해결 전략이 부족했던 것 때문으로 보인다. 둘째, 도형으로 제시된 문제의 해결 과정에서 위치 관계 또는 규칙성을 고려해야 하는 경우에

5) 제시된 도형을 눈으로 보면서 입으로 "세모(또는 삼각형), 네모(또는 사각형), 마름모, 원, 별"을 읽는 것보다, 제시된 숫자를 눈으로 보면서 입으로 "이, 사, 구, 육, 삼"을 읽는 것이 훨씬 수월하다.

는, 도형을 숫자로 바꾼 상황이 학생들에게 더 쉽게 여겨질 것이라는 가설에 대하여는, 가설과 일치되게 숫자 문항이 더 쉬운 것으로 실험 결과가 나타났다. 그 이유를 생각해 보면, 위치 관계나 순서 관계를 파악하기 위하여 도형의 이름을 음독(音讀)하는 것이 숫자의 경우보다 부자연스럽고 불편하기 때문에 도형 문항보다 숫자 문항을 해결하는 상황이 학생들에게 더 쉽게 여겨졌다고 할 수 있다. 즉, 숫자 문항 다음에 도형 문항을 해결하는 것보다 도형 문항을 해결한 후 숫자 문항을 해결하는 경우 더 높은 정답률의 상승을 보인 것이다. 초기에 아무런 정보가 없이 도형의 공통성을 찾으려는 시도에서는 답을 찾기 힘들었으나 위에서 언급한 바와 같이 도형보다 음독이 편한 숫자로 바뀐 경우에 그 구조를 좀 더 수월하게 찾는 경향을 보였다.

따라서 이 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 내릴 수 있었다.

첫째, 숫자 문항과 도형 문항이 제시되는 순서에 상관없이 나중에 제시된 문항에 대해 정답률이 높게 나타났다. 이는 구조가 동일한 문제를 해결하는 경우에는 앞에서 사용한 유용한 사고가 뒤의 문제 풀이에 긍정적 영향을 미쳤다. 즉, 숫자에서 도형으로, 도형에서 숫자로 문제가 제시되는 형태가 바뀌면서 먼저 제시된 문제해결 과정에서는 생각하지 못했던 아이디어가 나중 문제를 해결하는 과정에서 유용하게 작용하여 나중 문제를 성공적으로 해결하는 성향을 보였다. 따라서 숫자 또는 도형이 지니는 직관의 즉각성에서 발생할 수 있는 오류를 서로 다른 기호에 대한 문제를 통해 극복하게 된 것으로 볼 수 있다.

둘째, 숫자나 도형이 불규칙적으로 배열되어 있고, 문제를 해결하기 위한 속성(변수)이 더 많은 문항에 대해 정답률이 낮게 나왔다. 이는 문제해결에 대한 변수도 많고, 경험적인 측면에서 많이 접해 보지 못한 문제인 ①, ②번 문제를 더 어렵게 생각하는 것으로 보인다. 따라서 문항을 개발할 때, 학생들의 이와 같은 성향을 참고하여 문항의 형태와 난이도를 조절할 수 있다.

셋째, 숫자 문항과 도형 문항을 학생들에게 동시에 제시할 때, 학생들의 특성이나 수업의 목표 등에 따라 먼저 제시되는 문제의 형태를 정할 수 있다. 예를 들어, 다양한 문제해결 전략을 찾는 능력을 평가하는 목적으로 문제를 제시하는 경우에는 숫자 문항을 먼저 제시하고, 학생들에게 새로운 사고를 요구하는 목적으로 문제를 제시하는 경우에는 도형 문항을 먼저 제시하는 것이 효과적일 수 있다.

이상으로부터 수학 학습에서 숫자와 도형으로 제시되는 문제를 효과적으로 활용할 수 있기 위해 다음과 같이 제언하고자 한다.

첫째, 이 연구는 선행 지식이나 연산에 대한 능력에 큰 차이가 없는 대학생을 대상으로 하였다. 따라서 다른 학교급(초등학교, 중학교, 고등학교) 학생들에게도 같은 결과와 성향을 기대할 수 있는지에 대한 연구가 필요하다.

둘째, ③, ④번 문항에 대한 학생들의 반응에서 알 수 있듯이, 숫자 문항이 먼저 제시되는 경우 순서 구조를, 도형 문항이 먼저 제시되는 경우 도형의 개수를 세는 방법을 사용하는 학생이 많은 것으로 나타났다. 그런데 이 연구에서는 순서 구조만 정답으로 인정하였으므로 1차 실험과 2차 실험에서 정답률의 차이가 나타나게 되었다. 이와 같이 비형식적인 문제에서는 출제자가 원래 의도한 풀이 방법과 비교할 때 논리적 접근 방법이 다른 답을 학생들이 찾는 경우가 발생할 수 있기 때문에, 문제를 제시하는 형태와 조건을 치밀하게 분석하여 가능한 한 학생들의 사고의 흐름이 출제자가 원래 의도한대로 흘러갈 수 있도록 주의할 필요가 있다.

참 고 문 헌

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

______ (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.

유윤재 (2007). 수학교육에 유용한 표상, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 46(1), pp.123-134.

이대현 (2006). 직관의 즉각성 요인과 효과에 대한 고찰, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 45(3), pp.263-273.

이대현 · 박배훈 (2001). 수학교육에서 직관과 그 오류에

관한 고찰, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 40(1), pp.15-25.
이양미 (2005). 문제해결을 위한 초등학교 3학년 학생의 표상과 표상의 정교화 과정 분석, 한국교원대학교 석사학위 논문.
조두경·박만구 (2008). 수학 문제해결 과정에서 나타나는 초등학생들의 수학적 사고 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A 수학교육, 47(2), pp.169-180.
황혜정·나귀수·최승현·박경미·임재훈·서동엽 (2007). [개정판] 수학교육학신론, 서울: 문음사
Carter. P., & Russell. K. (2001). *Workout for a Balanced Brain*, Pleasantville, NY: The Reader's Digest Association, Inc.
NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

A Study on Students' Responses to Non-routine Problems Using Numerals or Figures

Hwang, Sunwook
Department of Mathematics, Soongsil University, Seoul 156-743, Korea
E-mail: shwang@ssu.ac.kr

Shim, Sang Kil*
Accreditation Center for Educational Development, Dankook University, Chungcheongnam-do cheonan-si 330-714, Korea
E-mail: skshim22@dankook.ac.kr

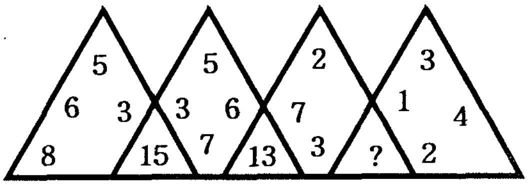
The purpose of this article is to study students' responses to non-routine problems which are presented by using solely numerals or symbolic figures. Such figures have no mathematical meaning but just symbolical meaning. Most students understand geometric figures more concrete objects than numerals because geometric figures such as circles and squares can be visualized by the manipulatives in real life. And since students need not consider (unvisible) any operational structure of numerals when they deal with (visible) figures, problems proposed using figures are considered relatively easier to them than those proposed using numerals.

Under this assumption, we analyze students' problem solving processes of numeral problems and figural problems, and then find out when students' difficulties arise in the problem solving process and how they response when they feel difficulties. From this experiment, we will suggest several comments which would be considered in the development and application of both numerical and figural problems.

* ZDM Classification : C30
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : numeral, figure, non-routine problem, intuition, representation, left brain and right brain
* Corresponding author

<부록 1> 평가 문제지

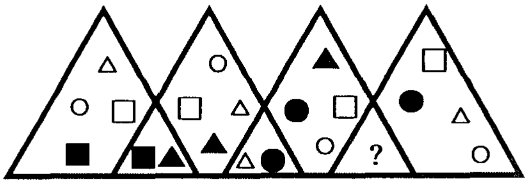
(1) 아래 그림에서 ?에 들어갈 가장 적절한 숫자는 무엇입니까? 또, 그 숫자가 들어가는 이유를 자세하게 쓰시오. (10분)



(풀이)

(답)

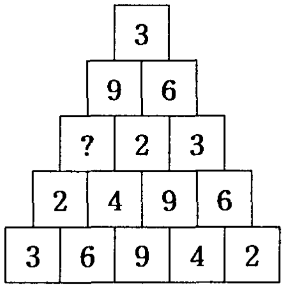
(2) 아래 그림에서 ?에 들어갈 가장 적절한 그림은 무엇입니까? 또, 그 그림이 들어가는 이유를 자세하게 쓰시오. (10분)



(풀이)

(답)

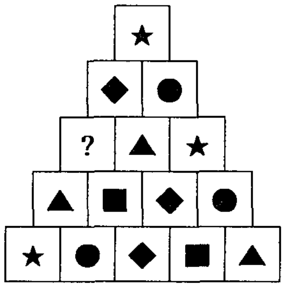
(3) 아래 그림에서 ?에 들어갈 가장 적절한 숫자는 무엇입니까? 또, 그 숫자가 들어가는 이유를 자세하게 쓰시오. (10분)



(풀이)

(답)

(4) 아래 그림에서 ?에 들어갈 가장 적절한 그림은 무엇입니까? 또, 그 그림이 들어가는 이유를 자세하게 쓰시오. (10분)



(풀이)

(답)

<부록 2> 학생들이 제시한 답 및 분석 결과

(1) 1차 실험 결과

①번 문항 분석 결과

학생이 제시한 답	정답자 수(명)	비율(%)
12	12	19.7
11	4	6.6
7	3	4.9
2	2	3.3
5	1	1.6
9	1	1.6
15	1	1.6
17	1	1.6
무응답	36	59.0
합 계	61	99.9

②번 문항 분석 결과

학생이 제시한 답	정답자 수(명)	비율(%)
▲ △	21	34.4
△ ▲	7	11.5
○ ●	5	8.2
○ ○	4	6.6
■ ▲	2	3.3
□ ●	2	3.3
■	2	3.3
▲ ●	2	3.3
○	2	3.3
■ ●	1	1.6
△ ●	1	1.6
▲ ▲	1	1.6
□ ○	1	1.6
▲ ○	1	1.6
● □	1	1.6
△ ○	1	1.6
● △	1	1.6
○ ■	1	1.6
무응답	5	8.2
합 계	61	99.8

③번 문항 분석 결과

학생이 제시한 답	정답자 수(명)	비율(%)
4	41	67.2
13	7	11.5
18	1	1.6
3	1	1.6
6	1	1.6
2	1	1.6
무응답	9	14.8
합 계	61	99.9

④번 문항 분석 결과

학생이 제시한 답	정답자 수(명)	비율(%)
■	55	90.2
◆	2	3.3
●	1	1.6
무응답	3	4.9
합 계	61	100

(2) 2차 실험 결과

①번 문항 분석 결과

학생이 제시한 답	정답자 수(명)	비율(%)
12	14	25.9
11	6	11.1
5	3	5.6
6	3	5.6
15	1	1.9
10	1	1.9
7	1	1.9
29	1	1.9
18	1	1.9
13	1	1.9
17	1	1.9
30	1	1.9
무응답	20	37.0
합 계	54	100.4

②번 문항 분석 결과

학생이 제시한 답	정답자 수(명)	비율(%)
▲ △	6	11.1
■	6	11.1
○ ○	5	9.3
△ ▲	4	7.4
○ ●	3	5.6
○ ■	2	3.7
● △	2	3.7
○ □	2	3.7
▲ □	2	3.7
○ △	2	3.7
△ △ 또는 □ ○	1	1.9
■ ■ ● ▲	1	1.9
■ △	1	1.9
▲ ●	1	1.9
□ ●	1	1.9
▲ ■	1	1.9
▲ ▲	1	1.9
■ ▲	1	1.9
○ ▲	1	1.9
● ●	1	1.9
● ■	1	1.9
□ ○	1	1.9
무응답	8	14.8
합 계	54	100.6

③번 문항 분석 결과

학생이 제시한 답	정답자 수(명)	비율(%)
4	48	88.9
9	1	1.9
13	1	1.9
무응답	4	7.4
합 계	54	100.1

④번 문항 분석 결과

학생이 제시한 답	정답자 수(명)	비율(%)
■	41	75.9
◆	2	3.7
●	2	3.7
■ 또는 ◆ 또는 ★	1	1.9
□ △	1	1.9
무응답	7	13.0
합 계	54	100.1