

이중 불확실성하의 공정-저장조 망구조 최적설계

Optimal Design of Process-Inventory Network under Cycle Time and Batch Quantity Uncertainties

서근학, 이경범*
(Kuen-Hack Suh and Gyeongbeom Yi)

Abstract: The aim of this study is to find an analytic solution to the problem of determining the optimal capacity of a batch-storage network to meet demand for finished products in a system undergoing joint random variations of operating time and batch material loss. The superstructure of the plant considered here consists of a network of serially and/or parallel interlinked batch processes and storage units. The production processes transform a set of feedstock materials into another set of products with constant conversion factors. The final product demand flow is susceptible to joint random variations in the cycle time and batch size. The production processes have also joint random variations in cycle time and product quantity. The spoiled materials are treated through regeneration or waste disposal processes. The objective function of the optimization is minimizing the total cost, which is composed of setup and inventory holding costs as well as the capital costs of constructing processes and storage units. A novel production and inventory analysis, the PSW (Periodic Square Wave) model, provides a judicious graphical method to find the upper and lower bounds of random flows. The advantage of this model is that it provides a set of simple analytic solutions while also maintaining a realistic description of the random material flows between processes and storage units; as a consequence of these analytic solutions, the computation burden is significantly reduced. The proposed method has the potential to rapidly provide very useful data on which to base investment decisions during the early plant design stage. It should be of particular use when these decisions must be made in a highly uncertain business environment.

Keywords: optimal lot size, process-inventory network, joint uncertainty

I. 서론

불확실성을 다루는 공급사슬망 최적화의 해석적인 해가 개발되었다[1]. 불확실성의 근원은 회분식 공정에서 공정크기와 가동주기의 변화였다. 공정들은 불확실성의 특성에 따라 세가지 유형으로 분류되었는데, (i) 가동주기에만 불확실성을 가지고 있는 공정, (ii) 공정크기에만 불확실성을 가지고 있는 공정 그리고 (iii) 가동주기와 공정크기 모두에 불확실성을 가지고 있는 공정이다. 현대사회에서 원료구매와 수송공정에 관련하여 물질손실은 별로 일어나지 않는다. 따라서 이러한 공정들은 이전연구에서 제 1 유형으로 분류되었다. 생산공정은 제 1 유형일 수도 있고 제 2 유형일 수도 있다. 배합공정은 보통 물질손실을 일으키지 않으므로 제 1 유형에 해당한다. 그러나 물질의 손실이 많은 반응공정은 제 2 유형으로 분류되었다. 대부분의 공정은 기본적으로 가동주기와 공정크기에 있어서 이중의 불확실성을 가지고 있지만 그 난이도를 고려하여 이중의 불확실성을 다루는 작업은 이전 연구에서 배제되었다. 본 연구에서는 이중의 불확실성을 다루는 어려움을 극복하고, 모든 공정이 가동주기와 공정크기에 있어서 이중의 불확실성을 가지고 있다고 가정한다. 따라서 모든 공정은 제 3 유형에 속하게 된다. 제 1 과 제 2 유형은 제 3 유형의 특수한 경우에 속하므로 따로 고려할 필요가 없다. 증가된 문제의 난이도에도 불구하고, 최적화 문제의 해석적인 해는 여전히 가능하다. 이 해석적인 해는 계산시간을 현저히 줄여 줄 것이다.

회분식 생산공정이 무작위 고장에 노출되었을 때 주어진 원료량에 대해 규격제품 물량이 무작위로 변한다. 다시 말하면 원료물질 물량 빼기 규격제품 물량에 해당하는 무작위 물량의 폐기물이 발생한다. 따라서 생산 시스템은 폐기물 저장조와 폐기물 처리공정을 포함해야 한다. 본 연구에서는 폐기물 처리공정과 폐기물 저장조와 연결된 회분식 공정과 저장조에서 폐기물 흐름이 포함되도록 공정-저장조 망구조가 수정되었다.

본 연구에서는 [1]에서 변수와 매개변수의 장기적 추세를 다루기 위해 소개되었던 다분기 수식이 생략되었다. 따라서 본 연구는 변수와 매개변수의 단기변화만을 고려하는 단분기 수식이다. 다분기 수식은 필요하면 이전 연구로부터 쉽게 유도될 수 있다.

사각파 모형이라고 불리는 새로운 생산재고 해석기법이 병렬 공정-저장조 시스템의 최적설계를 결정하는데 사용되었다[2]. 사각파 모형은 순차적인 공정-저장조 망구조를 갖는 복잡한 공장구조의 모형화로 확장되었다[3]. 또다른 연구에서 재순환 물질흐름을 갖는 비순차 망구조가 제시되었고[4], 생산활동을 지원하는 재무거래[5]와 반연속 공정[6]에 까지 모형의 적용대상을 넓혔다.

II. 이중 불확실성을 갖는 흐름의 상한값과 하한값

그림 1은 세가지 유형의 불확실성을 보여 주는데, 각각 (a) 가동주기에서의 불확실성, (b) 공정크기에 있어서의 불확실성, (c) 가동주기와 공정크기에 있어서의 이중 불확실성을 나타낸다. 본연구에서는 이중 불확실성을 다루고자 한다. 이중 불확실성의 무작위 성질은 그림 1(c)에 나타난 것처럼 두개의 확률 변수 B_0 와 ω_0 에 의해 표현될 수 있다. 여기서 하첨

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2009. 12. 7., 수정: 2009. 12. 29., 채택확정: 2010. 1. 4.

서근학, 이경범: 부경대학교(khsuh@pknu.ac.kr/gbyi@pknu.ac.kr)

※ “이 논문은 2009 학년도 부경대학교 연구년 교수 지원사업에 의하여 연구되었음”(PS-2009-026).

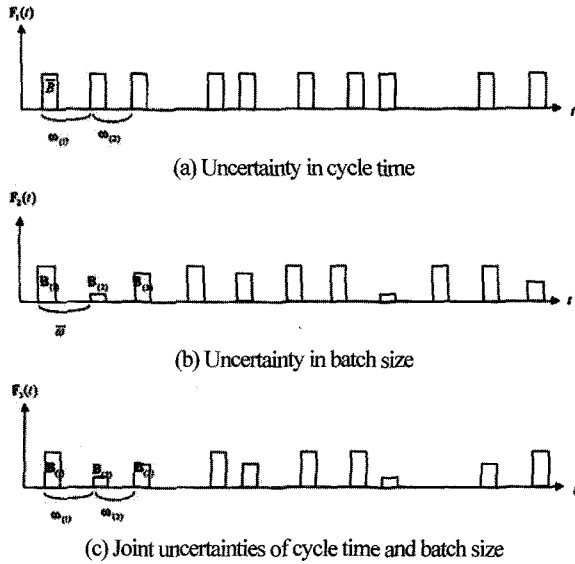


그림 1. 불확실성의 유형.
Fig. 1. Types of uncertainty.

자 (1)는 회분 발생순서를 나타낸다. $B_{(0)}$ 와 $\omega_{(0)}$ 의 정확한 확률분포함수를 알아야 할 필요는 없다. 우리는 $B_{(0)}$ 는 $\underline{B} \leq B_{(0)} \leq \bar{B}$ 의 범위 내에서 대칭적인 확률분포함수를 가진다고 가정하고, $\omega_{(0)}$ 는 $\underline{\omega} \leq \omega_{(0)}$ 의 범위내에서 비대칭 확률분포함수를 가진다고 가정한다. $B_{(0)}$ 와 $\omega_{(0)}$ 의 평균값은 각각 $\bar{B} = \frac{\underline{B} + \bar{B}}{2}$ 와 $\bar{\omega}$ 이다.

우리는 두개의 설계 매개변수 시간이용도 α 와 크기이용도 β 를 소개하고자 한다. 시간이용도 α 는 $\alpha = \frac{\omega}{\bar{\omega}}$ 로 정의되고, $0 < \alpha \leq 1$ 의 범위에 있고, 크기이용도 β 는 $\beta = \frac{B}{\bar{B}}$ 와 $\beta = 2 - \frac{\bar{B}}{B}$ 로 정의되고, $0 \leq \beta \leq 1$ 의 범위에 있다. $B_{(0)}$ 와 $\omega_{(0)}$ 는 (1) 에 대하여 서로 독립이며 동일한 확률분포함수를 갖는다고 가정한다. 주어진 수렴한계 $0 < \epsilon_1, \epsilon_2 \ll 1$ 와 신뢰수준 $0 < \delta_1, \delta_2 \ll 1$ 에 대하여, 대수의 약한 법칙은 $P\left\{\left|\frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^{\eta} B_{(0)} - \bar{B}\right| < \epsilon_1\right\} \geq 1 - \delta_1$ 와 $P\left\{\left|\frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^{\eta} \omega_{(0)} - \bar{\omega}\right| < \epsilon_2\right\} \geq 1 - \delta_2$ 를 만족하는 정수 η 가 존재함을 주장한다. 여기서 Tchebycheff 부등식으로부터 $\eta \geq \frac{Var(B_{(0)})}{\delta_1 \epsilon_1^2}$ 와 $\eta \geq \frac{Var(\omega_{(0)})}{\delta_2 \epsilon_2^2}$ 가 성립하고, 만약 최소의 정수가 선택되면 $\eta = \max\left\{\text{int}\left[\frac{Var(B_{(0)})}{\delta_1 \epsilon_1^2}\right], \text{int}\left[\frac{Var(\omega_{(0)})}{\delta_2 \epsilon_2^2}\right]\right\} + 1$ 가 된다. 여기서 η 는 발생횟수로 불리며,

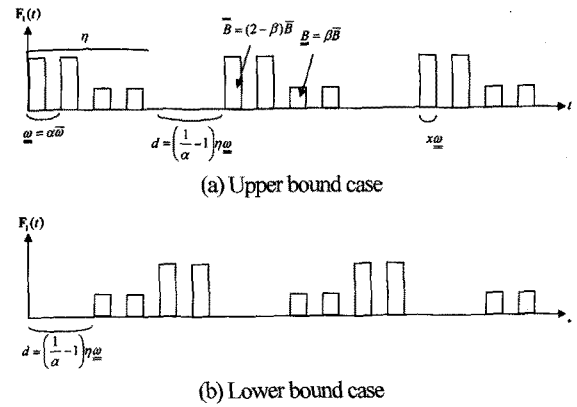


그림 2. 흐름의 두 극단적인 경우.
Fig. 2. Two extreme cases of flow.

0.5η 가 정수가 되기 위하여 짝수가 되어야 한다. η 횟수의 회분이 일어난 시간 간격을 장기 가동주기 $\bar{\omega}$ 로 정의한다. $B_{(0)}$ 와 $\omega_{(0)}$ 의 표본평균은 대수의 약한 법칙에 따라 장기 가동주기 동안 진짜 평균값에 수렴하므로 $\bar{\omega} = \eta \bar{\omega} = \frac{\eta}{\alpha} \bar{\omega}$ 식이 성립한다. 여기서 장기 가동주기는 주어진 신뢰수준 내에서 모든 무작위 효과가 사라지는 최소의 기간이란 의미가 있다.

우리는 편의상 두개의 매개변수, 평균유속 $D = \frac{\bar{B}}{\bar{\omega}} = \frac{\alpha \bar{B}}{\bar{\omega}}$ 와 장기 가동주기내에서 총 가동중단 시간 $d = \bar{\omega} - \eta \bar{\omega} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \eta \bar{\omega}$ 를 정의한다.

최적화 모형을 만들기 위하여 필요한 것은 이중 불확실성 하에서 저장조 재고수준의 상한값/하한값과 평균값이다. 재고수준의 상한값은 저장조 크기를 계산하는데 사용될 것이다. 재고수준의 하한값은 재고수준이 음수가 아니라는 최적화 모형의 제약식에 사용될 것이다. 재고수준의 평균값은 최적화 문제에서 재고유지비용을 계산하는데 사용될 것이다. 만약 저장조에 들어오고 나가는 모든 흐름의 상한값/하한값과 평균값을 안다면 저장조 재고수준의 상한값/하한값과 평균값을 발견할 수 있다. 각 흐름은 장기 가동주기 동안 일정한 평균유속 D 를 가지고 있다. 이 사실은 불확실성에도 불구하고 장기 가동주기 동안 처리된 총 물량은 일정함을 의미한다. 그림 2에서 보여진 것처럼 이중 불확실성을 가진 흐름의 두가지 극단적인 경우, (a) 상한값을 가진 경우와 (b) 하한값을 가진 경우가 존재한다. 그림 2에서 $\eta = 4$ 이다. 상한값을 가진 경우는 반복되는 장기 가동주기 내에서 최소 가동주기 $\underline{\omega}$ 와 함께 최대공정크기 \bar{B} 가 0.5η 회 발생하고, 연이어 최소 가동주기 $\underline{\omega}$ 와 함께 최소 공정크기 \underline{B} 가 0.5η 회 발생하고, 연이어 총 가동중단 시간 d 가 발생한다. 하한값을 가진 경우는 반복되는 장기 가동주기 내에서 총 가동중단 시간 d 가 먼저 발생하고, 최소 가동주기 $\underline{\omega}$ 와 함께 최소 공정크기 \underline{B} 가 0.5η 회 발생하고, 연이어 최소 가동주기 $\underline{\omega}$ 와 함께 최대 공정크기 \bar{B} 가 0.5η 회 발생한다. 두개의 극단적으로

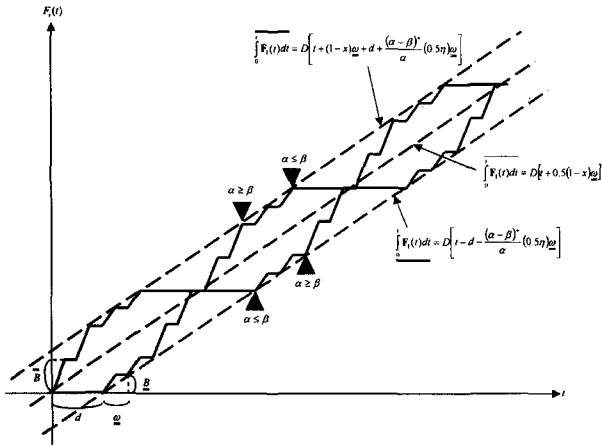


그림 3. 두 극단적인 경우의 누적흐름함수.
Fig. 3. Cumulative flow functions for two extreme cases.

로 다른 경우에도 불구하고 두 경우의 장기 가동주기동안 처리된 물량은 $D\omega$ 이다.

그림 3은 두 경우의 누적흐름함수를 보여주고 있다. 점선은 두 극단적인 경우의 상한값과 하한값이다. 이중 불확실성을 가지는 모든 흐름 $F(t)$ 의 적분은 두 점선 사이에 존재한다.

즉, $\underline{UPSW} \leq \int_0^t F(t)dt \leq \overline{UPSW}$ 인데,

$$\underline{UPSW}(t; D, \omega, t', x, \theta) = D[t - t' - \theta\omega] \quad (1)$$

$$\overline{UPSW}(t; D, \omega, t', x, \theta) = D[t - t' + (1-x)\omega + \theta\omega] \quad (2)$$

여기서

$$\theta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\eta + \frac{(\alpha - \beta)^+}{\alpha}(0.5\eta) \quad (3)$$

여기서 $(X)^+ \equiv \max\{0, X\}$.

평균 재고수준은 고장의 확률적 성질에 크게 의존한다. 평균 재고수준의 정확한 값은 모든 무작위변수의 확률분포함수를 정의해야 구할 수 있는데 이것은 매우 어려운 일이다. 본 연구에서는 직감적인 접근을 시도한다. 흐름의 평균값

$\overline{UPSW} \equiv \int_0^t F(t)dt$ 는 상한값과 하한값으로부터 같은 거리에

떨어져 있는 선을 선택한다[1].

$$\overline{UPSW}(t; D, \omega, t', x) = D[t - t' + 0.5(1-x)\omega] \quad (4)$$

이 선택은 가장 가능성이 큰 것이다.

III. 최적화 모형

원료물질을 다수의 물리화학적 처리단계를 거쳐서 최종제품으로 전환하는 화학공장은 그림 4에서 보여진 것처럼 저장조 집합 (J) 와 회분식 공정 집합 (I) 로 구성되어 있다.

저장조 목록부호 $j \in J$ 는 상첨자로 쓰여지고 공정 목록부호 $i \in I$ 는 하첨자로 쓰여진다. 수송공정은 일관성의 유실없이 회분식 공정의 부분집합으로 고려된다. 각 저장조는 6개

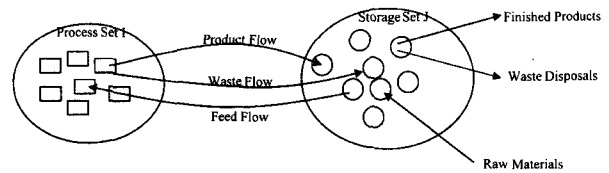


그림 4. 공정-저장조 망구조의 일반적인 구조 - 공정과 저장조 집합.

Fig. 4. General structure of batch-storage network - process and storage sets.

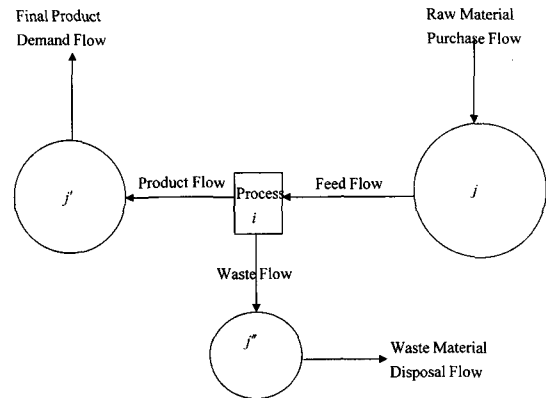


그림 5. 폐기물 흐름을 포함하는 공정 구성.

Fig. 5. Process configuration with waste flow.

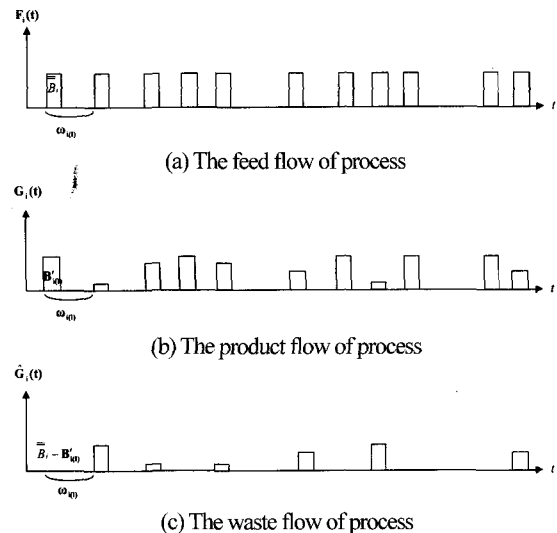


그림 6. 생산공정의 흐름들.

Fig. 6. Flows of production process.

의 물질이동 유형과 관련되어 있는데, 원료공급자 ($k \in K(j)$) 로부터 구매, 고객 수요 ($m \in M(j)$) 에 따른 출하, 폐기물 처리업체 ($n \in N(j)$) 로 배출, 생산공정에 대한 원료공급, 생산공정으로부터 제품생산과 생산공정으로부터 폐기물 생산이다.

그림 5는 한 공정의 전형적인 구성요소를 보여주고, 그림 6은 각 공정의 물질흐름 유형을 보여준다. 생산공정의 원료주입 흐름은 일정한 최대 공정크기 \overline{B} 와 불확실한 가동주기 $\omega_{(0)}$ 를 가지는 것으로 가정한다. 생산공정의 원료주입 흐름

의 시간 유용도는 α_i 이고, 생산공정의 원료주입 흐름의 크기 유용도는 1인데 이것은 공정크기에 불확실성이 없음을 의미한다. 그러나 공정으로부터 배출하는 흐름의 공정크기는 무작위이다. (논의의 편의를 위해 공정 처리과정은 물질의 밀도를 변화시키지 않는다고 가정한다.) 그림 6에서 보여진 것처럼 성공한 규격제품 생산량 \overline{B}_{i0} ($\overline{B}_i \geq \overline{B}_{i0} \geq \underline{B}_i$) 은 제품저장조로 보내지고, 실패한 비규격 제품 생산량 $\overline{B}_i - \overline{B}_{i0}$ 은 폐기물 저장조로 보내진다. 생산공정으로부터 배출되는 규격제품 흐름과 폐기물 흐름의 시간 유용도는 α_i 로서 생산공정에 원료를 주입하는 흐름의 시간 유용도와 동일하다. 생산공정으로부터 배출하는 규격제품 흐름의 크기 유용도는 β_i 이고, 생산공정으로부터 배출하는 폐기물 흐름의 크기 유용도는 0 이다.

각 생산공정은 일정 조성 (f_i^j) 의 다수의 원료 물질을 소모하여 일정 수율 (g_i^j) 의 다수의 제품을 생산한다. 고장난 생산공정으로부터의 폐기물은 일정한 폐기물수율 (\hat{g}_i^j) 에 따라 규격제품과는 다른 저장조에 저장된다. 같은 저장조 j 와 공정 i 에 대해, $g_i^j/\hat{g}_i^j = 0$ 임을 유의해야 한다.

만약 고장이 없다면, 공정에서 저장조 또는 저장조에서 공정으로의 물질흐름은 사각파 모형으로 나타내어진다. 각 생산공정은 매 가동주기 ω_i 마다 일회분의 제품을 생산하는 것으로 가정한다. 생산공정의 가동주기는 원료주입시간 ($x_i\omega_i$), 공정처리시간 ($[1-x_i'-x_i]\omega_i$) 그리고 제품배출시간 ($x_i'\omega_i$) 으로 구성되어 있는데, 여기서 $0 \leq x_i', x_i \leq 1$ 는 저장조 운전시간분율 이라고 불린다. 변수의 back prime 표기는 변수가 생산공정의 원료주입 흐름에 대해서 정의 되었음을 나타내고 변수의 prime 표기는 변수가 생산공정으로부터 배출흐름에 대해서 정의되었음을 뜻한다. 생산공정의 가동시작시간은 γ_i (또는 t_i^j) 이다. 따라서 생산공정에 대한 사각파 모형의 결정론적 물질흐름 표현은 네개의 변수, 공정크기 B_i , 가동주기 ω_i , 저장조 운전시간분율 x_i (또는 x_i') 과 가동시작시간 γ_i (또는 t_i^j) 으로 구성되어 있다. 원료구매, 폐기물 처리, 최종제품 수요의 결정론적 물질흐름도 네개의 변수로 표현되며 각각 $B_k^j, \omega_k^j, x_k^j, t_k^j, B_n^j, \omega_n^j, x_n^j, t_n^j$ 와 $B_m^j, \omega_m^j, x_m^j, t_m^j$ 이다. 이들 변수 가운데 $\omega_i, \omega_k^j, \omega_n^j, \omega_m^j$ 와 B_i, B_k^j, B_n^j, B_m^j 는 무작위 변수로 고려될 것이다. 표현의 편의를 위해 상첨자나 하첨자가 없는 변수 B, ω 와 x 가 원료구매, 생산, 폐기물 처리 또는 최종제품 수요와 관련하여 임의의 공정의 공정크기, 가동주기와 저장조 운전시간분율을 나타내는데 사용될 것이다.

생산공정의 원료흐름의 시작시간과 제품 또는 폐기물 흐름의 시작시간 사이에는 다음과 같은 시간관계식이 존재한다.

$$t_i^j = \gamma_i + \Delta t_i(.) \tag{5}$$

여기서 $\Delta t_i(.)$ 는 임의의 변수의 함수이다. $D_i \equiv \frac{\overline{B}_i}{\omega_i} = \frac{\alpha_i B_i}{\omega_i}$

는 공정 i 에 대한 평균 원료주입 유속이다. $\frac{D_i}{2-\beta_i} = \frac{\overline{B}_i}{\omega_i}$ 와

$\frac{1-\beta_i}{2-\beta_i} D_i$ 는 각각 공정 i 를 통한 평균 제품유속과 평균 폐기물 유속이다. 원료구매, 폐기물 처리와 최종제품 수요에 대한

평균 물질유속은 각각 $D_k^j = \frac{\alpha_k^j \overline{B}_k^j}{\omega_k^j}$, $D_n^j = \frac{\alpha_n^j \overline{B}_n^j}{\omega_n^j}$ 와 $D_m^j =$

$\frac{\alpha_m^j \overline{B}_m^j}{\omega_m^j}$ 로 나타내어진다. 지금부터 대부분의 방정식에서 공정

크기 대신에 평균유속을 사용할 것이다. 저장조에 대한 전방적인 물질수지식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{|I|} \frac{1}{2-\beta_i} g_i^j D_i + \sum_{i=1}^{|I|} \frac{1-\beta_i}{2-\beta_i} \hat{g}_i^j D_i + \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j \\ & = \sum_{i=1}^{|I|} f_i^j D_i + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j + \sum_{n=1}^{|N(j)|} D_n^j \end{aligned} \tag{6}$$

재고수준의 상한값 \overline{V}^j 는 초기재고량으로부터 모든 유입되는 흐름의 상한값을 더하고 모든 유출되는 흐름의 하한값을 뺀으로서 계산된다. 재고수준의 하한값 \underline{V}^j 는 초기재고량으로부터 모든 유입되는 흐름의 하한값을 더하고 모든 유출되는 흐름의 상한값을 뺀으로서 계산된다. 유입되는 흐름은 원료구매, 생산공정으로부터 배출되는 폐기물 흐름과 생산공정으로부터 배출되는 제품흐름이 있다. 유출되는 흐름은 생산공정에 원료주입 흐름, 폐기물 처리흐름과 최종제품 수요 흐름이 있다. (1)과 (2)를 사용하여 재고수준의 상한값과 하한값을 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{V}^j & = V^j(0) + \sum_{k=1}^{|K(j)|} \overline{\text{UPSW}}(t; D_k^j, \omega_k^j, t_k^j, x_k^j, \theta_k^j) \\ & + \sum_{i=1}^{|I|} \overline{\text{UPSW}}(t; \frac{1}{2-\beta_i} g_i^j D_i, \omega_i, t_i^j, x_i^j) \\ & + \sum_{i=1}^{|I|} \overline{\text{UPSW}}(t; \frac{1-\beta_i}{2-\beta_i} \hat{g}_i^j D_i, \omega_i, t_i^j, x_i^j, \hat{\theta}_i) \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{|I|} \underline{\text{UPSW}}(t; f_i^j D_i, \omega_i, \gamma_i, x_i, \theta_i) \\ & - \sum_{m=1}^{|M(j)|} \underline{\text{UPSW}}(t; D_m^j, \omega_m^j, t_m^j, x_m^j, \theta_m^j) \\ & - \sum_{n=1}^{|N(j)|} \underline{\text{UPSW}}(t; D_n^j, \omega_n^j, t_n^j, x_n^j, \theta_n^j, \theta_n^j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{V}^j & = V^j(0) + \sum_{k=1}^{|K(j)|} \underline{\text{UPSW}}(t; D_k^j, \omega_k^j, t_k^j, x_k^j, \theta_k^j) \\ & + \sum_{i=1}^{|I|} \underline{\text{UPSW}}(t; \frac{1}{2-\beta_i} g_i^j D_i, \omega_i, t_i^j, x_i^j, \theta_i^j) \\ & + \sum_{i=1}^{|I|} \underline{\text{UPSW}}(t; \frac{1-\beta_i}{2-\beta_i} \hat{g}_i^j D_i, \omega_i, t_i^j, x_i^j, \hat{\theta}_i) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{|I|} \underline{\text{UPSW}}(t; f_i^j D_i, \omega_i, \gamma_i, x_i, \theta_i) \\ & - \sum_{m=1}^{|M(j)|} \underline{\text{UPSW}}(t; D_m^j, \omega_m^j, t_m^j, x_m^j, \theta_m^j) \end{aligned}$$

$$-\sum_{n=1}^{|N(j)|} \overline{UPS\overline{W}}(t; D_n^j, \omega_n^j, t_n^j, x_n^j, \theta_n^j)$$

생산공정에 대한 원료주입 흐름은 크기유효도가 1이며 따라서 $\theta_i = \left(\frac{1}{\alpha_i} - 1\right) \eta_i$ 이다. 생산공정으로부터 배출되는 폐기

물 흐름은 크기유효도가 0으로서 $\hat{\theta}_i = \left(\frac{1}{\alpha_i} - 1\right) \eta_i + (0.5\eta_i)$

이다. 모든 다른 theta 값 $\theta_k^j, \theta_l^j, \theta_m^j$ 와 θ_n^j 은 적절한 상첨자와 하첨자를 가지고 (3)의 형태를 취하고 있다. 예를들어,

$\theta_l^j = \left(\frac{1}{\alpha_l} - 1\right) \eta_l + \frac{(\alpha_l - \beta_l)^+}{\alpha_l} (0.5\eta_l)$ 이다. (7)과 (8)은 (1)과 (2)

를 이용하여 더욱 전개될 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{V}^j &= V^j(0) + \sum_{k=1}^{|K(j)|} (1-x_k^j + \theta_k^j) D_k^j \omega_k^j - \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j t_k^j \\ &+ \sum_{i=1}^{|I|} (1-x_i^j + \hat{\theta}_i) \frac{1-\beta_i}{2-\beta_i} \hat{g}_i^j D_i \omega_i \\ &- \sum_{i=1}^{|I|} \frac{1-\beta_i}{2-\beta_i} \hat{g}_i^j D_i [\chi + \Delta t_i] \\ &+ \sum_{i=1}^{|I|} (1-x_i^j + \theta_i) \frac{1}{2-\beta_i} g_i^j D_i \omega_i \\ &- \sum_{i=1}^{|I|} \frac{1}{2-\beta_i} g_i^j D_i [\chi + \Delta t_i] \\ &+ \sum_{i=1}^{|I|} f_i^j D_i \chi + \sum_{i=1}^{|I|} f_i^j D_i \theta_i \omega_i \\ &+ \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j \omega_m^j + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j \theta_m^j \omega_m^j \\ &+ \sum_{n=1}^{|N(j)|} D_n^j t_n^j + \sum_{n=1}^{|N(j)|} D_n^j \theta_n^j \omega_n^j \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \overline{V}^j &= V^j(0) - \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j t_k^j - \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j \theta_k^j \omega_k^j \\ &- \sum_{i=1}^{|I|} \frac{1}{2-\beta_i} g_i^j D_i [\chi + \Delta t_i] \\ &- \sum_{i=1}^{|I|} \frac{1}{2-\beta_i} g_i^j D_i \theta_i \omega_i - \sum_{i=1}^{|I|} \frac{1-\beta_i}{2-\beta_i} \hat{g}_i^j D_i [\chi + \Delta t_i] \\ &- \sum_{i=1}^{|I|} \frac{1-\beta_i}{2-\beta_i} \hat{g}_i^j D_i \hat{\theta}_i \omega_i + \sum_{i=1}^{|I|} f_i^j D_i [\chi - (1-x_i^j + \theta_i) \omega_i] \\ &- \sum_{m=1}^{|M(j)|} (1-x_m^j + \theta_m^j) D_m^j \omega_m^j + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j \theta_m^j \omega_m^j \\ &- \sum_{n=1}^{|N(j)|} (1-x_n^j + \theta_n^j) D_n^j \omega_n^j + \sum_{n=1}^{|N(j)|} D_n^j \theta_n^j \omega_n^j \end{aligned} \tag{10}$$

(5)로부터 t_i^j 는 $\chi + \Delta t_i$ 로 바뀌었다. (4)로부터 평균 재고 수준도 쉽게 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{V}^j &= V^j(0) + \sum_{k=1}^{|K(j)|} \overline{UPS\overline{W}}(t; D_k^j, \omega_k^j, t_k^j, x_k^j) \\ &+ \sum_{i=1}^{|I|} \overline{UPS\overline{W}}(t; \frac{1}{2-\beta_i} g_i^j D_i, \omega_i, t_i^j, x_i^j) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i=1}^{|I|} \overline{UPS\overline{W}}(t; \frac{1-\beta_i}{2-\beta_i} \hat{g}_i^j D_i, \omega_i, t_i^j, x_i^j) \\ &- \sum_{i=1}^{|I|} \overline{UPS\overline{W}}(t; f_i^j D_i, \omega_i, \chi, x_i^j) \\ &- \sum_{m=1}^{|M(j)|} \overline{UPS\overline{W}}(t; D_m^j, \omega_m^j, t_m^j, x_m^j) \\ &- \sum_{n=1}^{|N(j)|} \overline{UPS\overline{W}}(t; D_n^j, \omega_n^j, t_n^j, x_n^j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{V}^j &= V^j(0) + \sum_{k=1}^{|K(j)|} \frac{(1-x_k^j)}{2} D_k^j \omega_k^j - \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j t_k^j \\ &+ \sum_{i=1}^{|I|} \frac{(1-x_i^j)}{2} \frac{1}{2-\beta_i} g_i^j D_i \omega_i \\ &- \sum_{i=1}^{|I|} \frac{1}{2-\beta_i} g_i^j D_i [\chi + \Delta t_i] \\ &+ \sum_{i=1}^{|I|} \frac{(1-x_i^j)}{2} \frac{1-\beta_i}{2-\beta_i} \hat{g}_i^j D_i \omega_i \\ &- \sum_{i=1}^{|I|} \frac{1-\beta_i}{2-\beta_i} \hat{g}_i^j D_i [\chi + \Delta t_i] \\ &- \sum_{i=1}^{|I|} \frac{(1-x_i^j)}{2} f_i^j D_i \omega_i + \sum_{i=1}^{|I|} f_i^j D_i \chi \\ &- \sum_{m=1}^{|M(j)|} \frac{(1-x_m^j)}{2} D_m^j \omega_m^j + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j t_m^j \\ &- \sum_{n=1}^{|N(j)|} \frac{(1-x_n^j)}{2} D_n^j \omega_n^j + \sum_{n=1}^{|N(j)|} D_n^j t_n^j \end{aligned} \tag{12}$$

공정-저장조 망구조 설계의 목적함수는 각 공정의 장기 가동주기내에서 주어진 발생횟수, 시간유효도, 크기유효도와 함께 공정과 저장조의 자본비용, 저장조의 재고유지비용과 공정의 준비비를 포함하는 총비용의 연간 기대치를 최소화 하는 것이다.

$$\begin{aligned} TC &= \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{k=1}^{|K(j)|} \left[\frac{\eta_k^j A_k^j}{\bar{\omega}_k^j} + a_k^j B_k \right] + \sum_{i=1}^{|I|} \left[\frac{\eta_i A_i}{\bar{\omega}_i} + a_i B_i \right] \\ &+ \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{n=1}^{|N(j)|} \left[\frac{\eta_n^j A_n^j}{\bar{\omega}_n^j} + a_n^j B_n \right] + \sum_{j=1}^{|J|} \left[H^j \overline{V}^j + b^j V^j \right] \end{aligned} \tag{13}$$

(13)을 $\frac{\eta A}{\bar{\omega}} = \frac{\alpha A}{\omega}$ 와 $\frac{B}{B} = \frac{(2-\beta)D\omega}{\alpha}$ 를 이용하여 수정하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} TC &= \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{k=1}^{|K(j)|} \left[\frac{\alpha_k^j A_k^j}{\omega_k^j} + a_k^j \left(\frac{(2-\beta_k^j) D_k^j \omega_k^j}{\alpha_k^j} \right) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^{|I|} \left[\frac{\alpha_i A_i}{\omega_i} + a_i \left(\frac{(2-\beta_i) D_i \omega_i}{\alpha_i} \right) \right] \\ &+ \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{n=1}^{|N(j)|} \left[\frac{\alpha_n^j A_n^j}{\omega_n^j} + a_n^j \left(\frac{(2-\beta_n^j) D_n^j \omega_n^j}{\alpha_n^j} \right) \right] \\ &+ \sum_{j=1}^{|J|} \left[H^j \overline{V}^j + b^j V^j \right] \end{aligned} \tag{14}$$

$\overline{V^j}$ 와 $\underline{V^j}$ 는 (9)와 (12)로부터 더 전개될 수 있다. 최적화의 제약식은 모든 저장조가 바닥나지 않는 것으로서 $0 \leq \underline{V^j}$ 인데, 여기서 $\underline{V^j}$ 는 (10) 에 주어져 있다. 설계변수는 $\underline{\omega}_k^j$, $\underline{\omega}_n^j$, \underline{t}_k^j , $\underline{\gamma}$ 와 \underline{t}_n^j 이다. D_k^j , D_i 와 D_n^j 는 일단계 최적화 문제에서 상수로 고려된다.

IV. 일단계 최적화 문제의 Kuhn-Tucker 해

일단계 최적화 문제의 Kuhn-Tucker 해를 풀기 위한 과정은 [1]에 주어져 있다. 최적 가동주기는 다음과 같다.

$$\underline{\omega}_k^j = \sqrt{\frac{\alpha_k^j A_k^j}{D_k^j \Psi_k^j}} \tag{15}$$

$$\underline{\omega}_n^j = \sqrt{\frac{\alpha_n^j A_n^j}{D_n^j \Psi_n^j}} \tag{16}$$

$$\underline{\omega}_i = \sqrt{\frac{\alpha_i A_i}{D_i \Psi_i}} \tag{17}$$

여기서

$$\Psi_k^j = [0.5H^j + b^j](1 - x_k^j) + \frac{(2 - \beta_k^j)\alpha_k^j}{\alpha_k^j} + (H^j + 2b^j)\theta_k^j \tag{18}$$

$$\Psi_n^j = [0.5H^j + b^j](1 - x_n^j) + \frac{(2 - \beta_n^j)\alpha_n^j}{\alpha_n^j} + (H^j + 2b^j)\theta_n^j \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \frac{(2 - \beta_i)\alpha_i}{\alpha_i} + (1 - \gamma) \sum_{j=1}^{|I|} \left(\frac{H^j}{2} + b^j \right) f_i^j \\ &+ (1 - x_i^j) \sum_{j=1}^{|I|} \left(\frac{H^j}{2} + b^j \right) \frac{1}{2 - \beta_i} g_i^j \\ &+ (1 - x_i^j) \sum_{j=1}^{|I|} \left(\frac{H^j}{2} + b^j \right) \frac{1 - \beta_i}{2 - \beta_i} \hat{g}_i^j \\ &+ \sum_{j=1}^{|I|} (H^j + 2b^j) \left(f_i^j \theta_i^j + \frac{1}{2 - \beta_i} g_i^j \theta_i^j + \frac{1 - \beta_i}{2 - \beta_i} \hat{g}_i^j \hat{\theta}_i^j \right) \end{aligned} \tag{20}$$

최적 목적함수값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} *TC(D_k^j, D_n^j, D_i) &= 2 \sum_{j=1}^{|I|} \sum_{k=1}^{|K(j)|} \sqrt{\alpha_k^j A_k^j \Psi_k^j D_k^j} \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{|I|} \sqrt{\alpha_i A_i \Psi_i D_i} + 2 \sum_{j=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(j)|} \sqrt{\alpha_n^j A_n^j \Psi_n^j D_n^j} \\ &+ \sum_{j=1}^{|I|} \sum_{m=1}^{|M(j)|} \left(\frac{H^j}{2} + b^j \right) (1 - x_m^j) \underline{\omega}_m^j D_m^j \\ &+ \sum_{r=1}^{|R|} \sum_{j=1}^{|I|} \sum_{m=1}^{|M(j)|} \theta_m^j D_m^j \underline{\omega}_m^j (H^j + 2b^j) \end{aligned} \tag{21}$$

공정 i 의 목적함수에 대한 기여도는 다음과 같다.

$$\text{Cost of Process } i = 2\sqrt{\alpha_i A_i \Psi_i D_i} \tag{22}$$

최적 가동시작시간은 제약식 $0 \leq \underline{V^j}$ 의 등식으로부터 유도 되는데, 여기서 $\underline{V^j}$ 는 (10)으로부터 주어진다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j t_k^j + \sum_{i=1}^{|I|} \left(\frac{1}{2 - \beta_i} g_i^j + \frac{1 - \beta_i}{2 - \beta_i} \hat{g}_i^j - f_i^j \right) D_i \gamma \\ - \sum_{n=1}^{|N(j)|} D_n^j t_n^j = V^j(0) - \sum_{m=1}^{|M(j)|} (1 - x_m^j + \theta_m^j) D_m^j \underline{\omega}_m^j \\ + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j t_m^j - \sum_{i=1}^{|I|} \frac{1}{2 - \beta_i} g_i^j D_i \Delta t_i - \sum_{i=1}^{|I|} \frac{1 - \beta_i}{2 - \beta_i} \hat{g}_i^j D_i \Delta t_i \end{aligned} \tag{23}$$

최적 저장조 크기는 (23)과 (9)로부터 유도된다.

$$\begin{aligned} \underline{V^j} &= \sum_{i=1}^{|I|} \left[(1 - \gamma) f_i^j + (1 - x_i^j) \frac{1}{2 - \beta_i} g_i^j \right] D_i \underline{\omega}_i \\ &+ \sum_{i=1}^{|I|} \left[(1 - x_i^j) \frac{1 - \beta_i}{2 - \beta_i} \hat{g}_i^j \right] D_i \underline{\omega}_i \\ &+ \sum_{k=1}^{|K(j)|} (1 - x_k^j) D_k^j \underline{\omega}_k^j + \sum_{m=1}^{|M(j)|} (1 - x_m^j) D_m^j \underline{\omega}_m^j \\ &+ \sum_{n=1}^{|N(j)|} (1 - x_n^j) D_n^j \underline{\omega}_n^j + 2 \sum_{i=1}^{|I|} \frac{1}{2 - \beta_i} g_i^j D_i \theta_i^j \underline{\omega}_i \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{|I|} \frac{1 - \beta_i}{2 - \beta_i} \hat{g}_i^j D_i \hat{\theta}_i^j \underline{\omega}_i + 2 \sum_{i=1}^{|I|} f_i^j D_i \theta_i^j \underline{\omega}_i \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j \theta_k^j \underline{\omega}_k^j + 2 \sum_{m=1}^{|M(j)|} \theta_m^j D_m^j \underline{\omega}_m^j + 2 \sum_{n=1}^{|N(j)|} \theta_n^j D_n^j \underline{\omega}_n^j \end{aligned} \tag{24}$$

저장조 j 에 대한 공정 i 의 기여도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left[(1 - \gamma) f_i^j + (1 - x_i^j) \frac{1}{2 - \beta_i} g_i^j \right] D_i \underline{\omega}_i \\ + \left[(1 - x_i^j) \frac{1 - \beta_i}{2 - \beta_i} \hat{g}_i^j \right] D_i \underline{\omega}_i + \frac{2}{2 - \beta_i} g_i^j D_i \theta_i^j \underline{\omega}_i \\ + 2 \frac{1 - \beta_i}{2 - \beta_i} \hat{g}_i^j D_i \hat{\theta}_i^j \underline{\omega}_i + 2 f_i^j D_i \theta_i^j \underline{\omega}_i \end{aligned} \tag{25}$$

최적의 평균유속 D_k^j , D_n^j 와 D_i 를 계산하려면, 목적함수 (21) 과 제약식 (6)으로 구성된 일단계 최적화 문제를 수치해석적으로 풀어야 한다. 비록 최적화 문제가 두개의 최적화 문제로 분리되었지만 원래문제의 Kuhn-Tucker 조건들과 분리된 문제의 Kuhn-Tucker 조건들은 동일하다[4]. 다시 말하면, 일단계 최적화 문제의 Kuhn-Tucker 조건은 해석적인 해를 구할 수가 있고 이 해를 원래문제에 삽입하여 일단계 문제의 설계변수를 소거하면 원래문제는 일단계 최적화 문제로 바뀌게 된다. 일단계 최적화 문제가 전범위 최적점에 수렴할수록 전체 문제는 전범위 최적점에 수렴하게 된다.

V. 설계예제

공정-저장조 망구조에서 세개의 원료물질로부터 두개의 제품과 한개의 폐기물을 생산하는 공정을 고려하자. 이 공정의 구성은 그림 7에 계산에 필요한 대부분의 입력자료와 함께 나타나 있다. D_i , a_i 와 A_i 는 각각 공정 1을 통한 평균유속, 공정 1의 용량당 연간 자본비용과 공정 1의 준비비이다. b^j 와 H^j $j=1,2, \dots, 6$ 은 각각 저장조 j 의 용량당 연간 자본비용과 저장조 j 의 재고유지비용이다. 원료조성 f_1^j, f_2^j 와 f_3^j 는 각각 0.5, 0.3과 0.2 이다. 제품수율 g_i^j 와 \hat{g}_i^j 은 각각 0.1

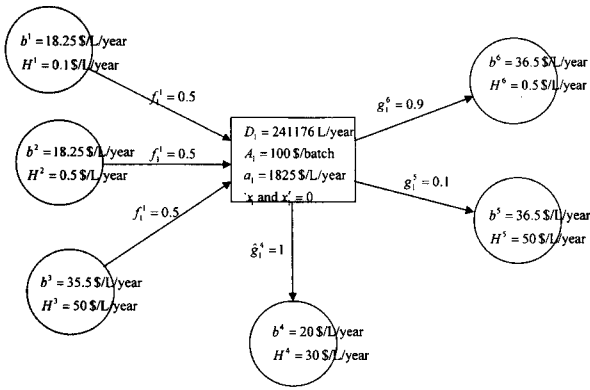


그림 7. 설계예제.
Fig. 7. Design example.

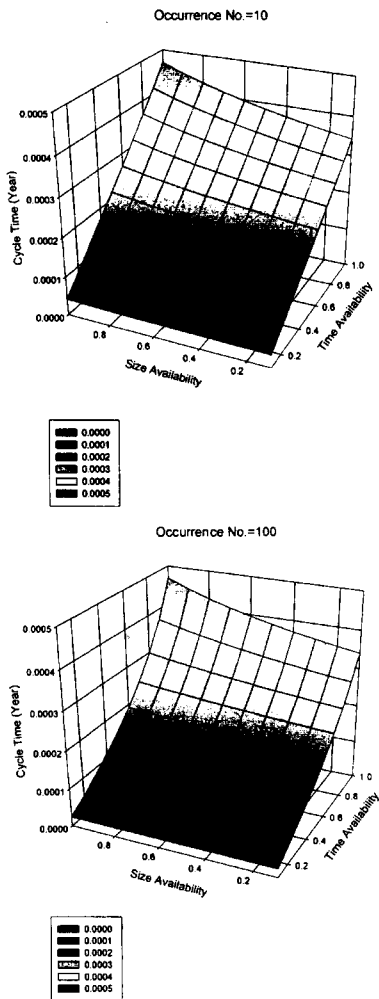


그림 8. 민감도 분석 - 가동주기.
Fig. 8. Sensitivity analysis - cycle time.

과 0.9 이다. 폐기물 수율 $\hat{g}^1 = 1$ 이다. 시간유효도 α_1 , 크기 유효도 β_1 과 발생횟수 η_1 이 주어진다면, 우리는 최적 가동 주기, 최적 공정크기, 최적 공정비용과 최적 저장조크기를 계산할 수 있다. 제일먼저 계산 순서는 (3)으로부터 θ 값을 계산하는 것이다. 다음단계는 (20)으로부터 Ψ_1 값을 계산하는 것이다. 여기서 x 와 $x' = 0$ 로 두었다. 그리고 나서 (17)

$$\text{로부터 최적 가동주기 } \omega_1, \text{ 최적 공정크기 } \bar{B}_1 = \frac{D_1 \omega_1}{\alpha_1}, \quad (22)$$

로부터 최적 공정비용과 (25)로부터 최적 저장조 크기를 계산할 수 있다. 계산결과는 α_1, β_1 와 η_1 의 여러가지 값에 대하여 그림 8에 나타나 있다.

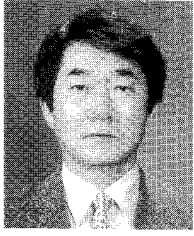
그림 8은 고정된 발생횟수 10과 100에 대하여 최적 가동주기의 시간유효도와 크기유효도에 대한 함수관계를 나타낸다. 최적 가동주기는 두개의 유효도가 증가함에 따라 증가한다. 시간유효도의 효과는 크기유효도보다 강하다. 발생횟수의 효과는 두 유효도보다 약하다.

VI. 결론

본 연구는 공정이 가동시간과 공정물량에 있어서 이중 불확실성에 노출되었을 때 망구조로 연결된 공정과 저장조의 최적크기를 결정하는 것이다. 폐기물 재생 또는 처리공정이 실패한 회분으로부터 나오는 폐기물을 처리하기 위하여 설치된다. 가동주기와 공정크기의 단기 무작위 변화에 노출된 흐름의 상한값과 하한값을 발견하기 위하여 사각과 모형이 효과적으로 사용되었다. 무작위 성질을 정의할 때 널리 사용되는 매개변수인 평균과 분산 대신에 유효도와 발생횟수가 입력 매개변수로서 소개되었다. 유효도는 FMEA (Failure Modes and Effects Analysis) 같은 공정 신뢰성 분석에 흔히 사용되고, 발생횟수는 분산에 비례한다. 이러한 매개변수들은 좀더 실제적이고 인간의 직각으로 평가하기가 용이하다. 최적화 문제는 무작위 제품수요를 만족하고 재고량이 바닥나지 않는 제약하에 준비비와 재고유지비, 공정과 저장조의 자본비용의 합을 최소화 하는 것이다. 누적흐름의 효과적인 도형적 해석과 결합된 사각과 모형은 최적화 문제의 해석적인 해를 제공한다. 이 해석적인 해는 계산량을 현저히 줄이는데 이것이 본 연구의 큰 수확이다. 해석적인 최적해를 통하여 입력 매개변수 유효도와 발생횟수에 대한 민감도 분석을 실시할 수 있었다.

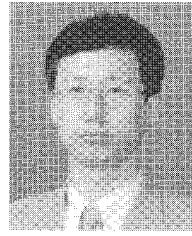
참고문헌

- [1] G Yi and G V. Reklaitis, "Optimal design of batch-storage network with uncertainty and waste treatments," *AIChE J.*, vol. 53, pp. 1737-1753, 2007.
- [2] 이경범, "원료 및 제품 저장조를 포함하는 병렬 비연속 공정의 최적설계," 제어·자동화·시스템공학회 논문지, 제3권 제5호, pp. 532-541, 1997.
- [3] 이경범, 이의수 "회분식 공정-저장조 그물망 구조의 최적설계," 제어·자동화·시스템공학회 논문지, 제4권 제6호, pp. 802-810, 1998.
- [4] 이경범, 이의수 "비순차 회분식 공정-저장조 망구조 최적설계," 제어·자동화·시스템공학회 논문지, 제9권 제5호, pp. 407-412, 2002.
- [5] 이경범, 이의수, 이인범 "현금흐름을 포함하는 회분식 공정-저장조 망구조의 최적설계," 제어·자동화·시스템공학회 논문지, 제11권 제11호, pp. 956-962, 2005.
- [6] G Yi and G V. Reklaitis, "Optimal design of batch-storage network with multitasking semi-continuous processes," *AIChE J.*, vol. 52, pp. 269-281, 2006.



서근학

1974년 부산대학교 화학공학과 학사. 1978년 부산대학교 석사학위. 1986년 부산대학 화학공학과 박사학위. 1974년~1983년 한국비료 근무. 1983년 이후 부경대학교 근무. 현재 화학공학과 교수 재직중. 관심분야는 화학 장치 및 공정 분야.



이경범

1983년 서울대학교 화학공학과 학사. 1985년 KAIST 화학공학과 석사학위. 1992년 PURDUE 대학 화학공학과 박사학위. 1985년~1988년 쌍용정유에서 공정기사. 1992년~1996년 호남정유 기술연구소 연구원. 1996년~현재 부경대학교 화학공학과 교수. 관심분야는 화학공장 생산계획 및 물류 최적화, 재고관리, 공정제어 및 최적화 등.