대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 20 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 20, No. 1, 57-71. Feb 2010

교수학적 변환 과정에서의 은유와 유추의 활용

이 경 화*

개념과 개념, 원리와 원리, 이론과 이론 사이의 유사성은 새로운 수학적 지식의 구성을 촉진하는 원동력이다. 은유와 유추는 유사성에 근거한 추론 양식이라는 공통점을 가진다. 이 두 추론 양식은 수학자 뿐 아니라 학생들의 지식 구성 과정을 촉발하고 기술하기 위해서도 유용한 것으로 알려져 왔다. 그러나 은유와 유추를 관련지어 논의한 연구는 매우 드물다. 특히 학문적 지식을 교수학적으로 변환할 때, 은유와 유추가 서로 어떻게 관련되는지에 대한 연구는 찾아보기 어렵다. 이 연구에서는 은유와 유추에 의한 수학적 지식의 구성 과정을 파악하고, 교과서, 수업 등 교수학적 변환 과정에서 은유와 유추를 활용한 구체적인 예를 분석하였다. 이를 통해, 교수학적 변환 과정에서의 은유와 유추의 활용에 대한 세 가지 모델을 제시하였다.

I. 서 론

이승우(2001)는 유추가 새롭고 낯선 것을 낯익은 것에 비추어 설명하는 데 도움이 되기 때문에 유의미 학습을 가능하게 한다고 본다. 또한 수학 개념과 알고리즘을 이해하기 위해 이전의 지식으로부터 은유를 구성하고, 문제를 해결하기 위해 은유를 추이적으로 적용하며, 효율성을 향상시키기 위해 은유를 자동화한다고 설명한다(83-84). 이와 같은 설명에서 유추와 은유가 공통적으로 이전 경험 또는 지식에 대한 반성적 사고를 통해 새로운 지식을 구성하는 도구임을 알 수 있다.

이전 경험 또는 지식에 대한 반성적 사고는 많은 연구에서 수학적 지식의 구성에 필수적인 과정으로 설명되어왔다. 예를 들어, Piaget(1972)는 세 종류의 추상화, 곧, 경험적 추상화, 의사-경험적 추상화, 그리고 반영적 추상화에 의한 지속적인 반성적 사고를 통해 수학적 지식을 발전시킬 수 있다고 설명한다. Dubinsky(1991)와 Sfard(1991), Skemp(1986), 그리고 Gray & Tall(1994)의 연구 등에서도 이미 알고 있는 개념 또는 조작을 대상으로 반성적인 사고를 거듭하는 것이 새로운 수학적 지식을 구성하는 중요한 과정이라는 것을 강조하였다. 그러므로 유사성에 초점을 두어 이전 경험 또는 지식에 대한 반성적 사고를 가능하게 하는 유추와 은유는 수학적 지식의 교수학적 변환 과정에서 고려해야 할 중요한 추론 양식이라고 할 수 있다. 특히 유추와 은유에 의해 이전 지식과 새로운 지식을 연결하는 과정에서 활용되고 다시 발전을 거듭하게 되는 경험, 언어, 조작 등의 인식 도구는 수학교육의 내용이며 동시에 방법이 될 수 있다. 이 연구에서는 은유와 유추에 의한 수학적 지식의 구성에 관련된 논의를 세부적으로 살펴보고, 교수학적 변환 과정에서 은유와 유추를 어떤 방식으로 활용할 것인지 알아본다.

* 서울대학교, khmath@snu.ac.kr

II. 은유와 유추에 의한 수학적 지식의 구성

이하에서는 은유와 유추에 의한 수학적 지식의 구성 과정에 대한 선행연구들의 논의를 세부적으로 살펴본다. 이는 교수학적 변환 과정에서의 은유와 유추의 주된 역할과 기능을 확인하는 기회가 될 것이다.

1. 은유에 의한 수학적 지식의 구성

Lakoff와 Nunes는 은유에 의한 수학적 지식의 구성에 대해 다음과 같이 무한대의 점을 예로 하여 설명하였다:

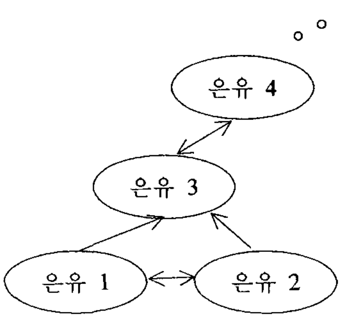
> 상상 속에서 무한히 긴 선을 따라 훑어볼 때, 그 선 위에서 같은 거리에 있는 두 점이라도 멀리 있는 점들일수록 더 가까이 있는 것처럼 보인다. 시선이 지평선에 가까이 감에 따라 마치 그 선의 무한한 확장이 어느 한 점에서 계속되는 느낌을 가질 수 있다(Lakoff와 Nunes, 2009: 63).

위에서 무한대라는 추상적인 개념은 은유적으로 표현되어 있으며, "x가 무한대에 접근할 때" 또는 "무한대에서의 함숫값"과 같은 표현은 이 은유적 표현에 기초한 것이다(Ibid: 64). 무한대의 점 은유는 미술에서의 원근법에 기원하며, 이후 화법기하학과 사영기하학, 더 나아가 비유클리드기하학으로 이어지는 수학적 발전의 원동력이 되었다. Lakoff와 Nunes(2009)는 이 예와 같이 수학적인 아이디어가 인간의 마음과 독립적으로 존재하기보다는 은유에 의해 존재하는 것으로 본다. 은유는 추상적인 개념에 일상의 경험 또는 의사-경험에 기초한 구체적인 존재성을 부여한다. 은유에 의해 존재하게 된 수학적 아이디어는 종종 모호하거나 불완전하지만 수학적 조작과 반성적 사고의 대상이 되면서 점차 체계적인 지식으로 발전하게 된다. 여기서 은유는 인간의 신체, 정신 활동, 일상적인 경험을 반영하여 개념을 그와 유사한 대상을 사용하여 기술하는 과정과 그 결과를 의미한다는 것을 알 수 있다. 추상적인 개념이 은유에 의해 개념화되고, 다시 은유로부터 추상화된 개념이 재개념화를 통해 성장하면서 수학적 지식은 이론적 체계를 갖추게 되는 것이다. 결국, 은유는 마음의 산물이면서 동시에 마음을 변화시키는 원동력이 됨으로써 수학적 지식의 구성을 가능하게 한다.

Lakoff와 Nunes(2009)는 은유를 기반 은유와 연결 은유로 구분한다. 기반 은유는 수학적 아이디어의 기반이 되는 은유로 일상적인 경험과의 유사성에 근거한다. 예를 들어, 함수 개념을 위한 기반 은유로는 '입력', '출력' 등을 들 수 있다. 기계를 다루는 일상적인 경험이 이 은유에 관련되고, 이를 통해 함수 개념을 형성할 수 있다. 이와 달리 연결 은유는 수학의 여러 분야 사이의 유사성에 근거한다. 예를 들어, 수를 수직선 위의 점에 대응시키는 것은 산술과 기하 사이의 유사성에 근거한 연결 은유이다. 수학의 역사에서 기반 은유와 연결 은유를 생성하고, 수정하고, 그로부터 새로운 지식을 구성한 예를 풍부하게 찾을 수 있다(45-90).

Sfard(2009)는 학생들의 유리수 개념 형성 과정에서 은유가 어떻게 기능하는지 살펴보고, 단일한 은유가 아니라 여러 은유 사이의 교배에 의해 수학 개념을 발전시킨다고 주장하였다. 예를 들어, '$\frac{2}{5}$'가 답이 되는 문제를 만들어 보도록 했을 때, 학생들의 응답 속에서 '분할'과 '조각' 등의 다양한 은유 그리고 여러 은유 사이의 관계에 대한 통찰의 증거가 나타났다고 한다. "파이 하나를 똑같은 크기의 5조각으로 만들었는데, 세 사람이 와서 한 조각씩 먹었다.

얼마나 많은 조각이 남았을까?"와 같은 응답에서는 구체적인 분할 과정과 조각들 사이의 관계를 '부호' $\frac{2}{5}$로 나타내 인지하고 있음을 알 수 있다. 이에 비해 '$5x=2$의 근은?'과 같은 응답에서는 '근'이라는 수학 내적인 은유에 의해 $\frac{2}{5}$를 개념화하고 있다. 이와 같이 '분할'과 '조각' 은유 사이의 연결, '부호', '근' 은유로의 이행이 유리수 개념의 형성을 가능하게 한다(406-411).



[그림 II-1] 은유에 의한 수학적 지식의 구성 과정

다양한 은유 사이의 관련성을 파악하거나 새로운 은유로 이행하는 것 뿐 아니라, 기존의 은유를 포기함으로써 수학적 지식 구성의 새로운 단계로 나아간다는 근거가 Pirie와 Kieren (1994)의 연구에 의해 보고되었다(Sfard, 2009: 412에서 재인용). 이들은 학생들의 유리수 개념 형성 과정에서 형성된 '조각' 은유가 $\frac{2}{5}$와 $\frac{4}{10}$가 동치인 분수라는 것을 파악하는 데 방해가 되며, 이를 버려야만 유리수 개념 형성이 가능하다는 것을 확인하였다. 결론적으로, [그림 II-1]과 같은 여러 은유의 존재와 은유 사이의 상호작용 또는 이행이 수학적 지식의 구성을 가능하게 하는 것으로 볼 수 있다. 이에 기초할 때, 교수학적 변환과 관련된 다음과 같은 질문을 제기할 수 있다: 수학적 지식을 교수학적으로 변환할 때, 여러 은유 사이의 상호작용의 의미가 무엇이며, 이를 어떻게 고려할 것인가?

2. 유추에 의한 수학적 지식의 구성

English(2009: 211)는 피상적인 유사성이 아니라 구조적인 관계성에 기초한 유사성에 따른 유추에 의해서만 수학적 지식의 구성이 가능하다고 주장한다. 구조적인 관계성은 서로 다른 두 체계 내의 요소 사이의 대응에 의해 파악되며, 기저가 되는 체계에 대한 이해가 목표 체계로 투사될 때 목표 체계에 대한 새로운 지식을 구성할 수 있게 된다(English & Sharry, 1996; Rattermann, 2009).

평면기하와 공간기하 사이의 유추를 통해 공간기하의 내용을 설명하는 것은 평면기하에 대한 이해를 적극적으로 활용하는 좋은 방법이다. 예를 들어, 평면기하에서의 원은 공간기하에서의 구에 대응되며, 평면기하에서 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 공간기하에서 곡면으로 둘러싸인 도형의 부피에 대응된다는 것을 활용할 수 있다. 평면기하에서 선분에 의해 둘러싸여 만들어지는 다각형은 공간기하에서 면에 의해 둘러싸여 만들어지는 다면체에 대응한다(Polya, 1978: 22).

Koetsier(1991: 17-18)은 유추에 의한 수학적 지식의 구성 과정을 다음과 같은 세 가지 규칙의 활용으로 설명한다:

규칙 1. 문제 P를 해결할 때, 이 문제와 유사한 문제 P'를 유사한 방법으로 해결한 경험이 있는지 생각해본다;

규칙 2. 서로 다른 두 유사한 상황에서 불확실한 요소를 발견하였을 때, 일반적인 관점에 의한 유추를 시도한다;

규칙 3. 일반적인 원리 또는 문제의 특수한 경우를 파악해본다.

위에서 규칙 1은 Fischbein(1987)이 제한된 영역에서 성립하는 성질을 더 넓은 영역으로 확장하여 적용하는 방식으로 유추의 활용을 설명한 것과 관련된다. 규칙 3은 이와 역 방향으로 유추를 활용하는 것으로 볼 수 있다. 규칙 2는 겉으로는 달라 보이지만 공통의 일반적인 성질에 의해 그 유사성을 확인함으로써, 두 대상의 구조적 연결을 가능하게 하는 원리로 볼 수 있다. 이와 같이 수학자들이 유추에 의해 새로운 표현 방법이나 새로운 가설을 구성하는 것은, 의도적으로 안정된 지식 체계 내에 검증되지 않은 추측을 포함시켜 모호성을 유발하고 이를 해결함으로써 새로운 지식을 구성하는 과정이다(이경화, 2009). 이와 같은 논의를 바탕으로 교수학적 변환 과정에서 유추를 활용할 때 다음과 같은 문제를 제기할 수 있다: 새로운 지식을 다룰 때, 기존의 지식 또는 경험과 유사하다는 것을 어떤 방식으로 주목하게 할 것인가? 또, 일반적인 관점에 의해 유사성을 파악하도록 하기 위한 교수학적 변환 방식은 무엇인가?

III. 은유와 유추의 비교와 교수학적 변환

앞에서 은유와 유추가 각각 기저 영역과 목표 영역 사이의 연결을 통해 수학적 지식을 구성하는 데 기여한다는 것을 확인하였다. 이 장에서는 은유와 유추를 비교하여 논의한 연구들을 살펴본다.

1. 은유의 교육적 인식론으로서의 유추

먼저 은유와 유추에 대한 첫 번째 비교 관점은 은유를 유추에 포함되는 것, 곧, 은유가 유추의 한 형태라고 생각하는 것이다. Gentner, Bowdle, Wolff & Boronat(2001: 202-205)가 이와 같은 주장을 하였으며, 특별히 은유는 구조 사상에 따른 유추라고 설명하였다. 예를 들어, 인간의 인지 과정을 컴퓨터의 자료 처리 과정에 은유하는 것은, 부호화와 저장, 회상 등의 요소가 두 영역 사이의 구조적 사상에 의해 연결되기 때문에 가능하다는 것이다.

은유를 유추의 한 형태로 보는 관점에 기초할 때, 교수학적 변환의 주된 내용과 의도는 은유에 의해 연결된 기저 영역과 목표 영역 사이의 구조적 관계를 이용하여 기저 영역에 대한 이해를 돕는 것이 되어야 한다. 예를 들어, 중학교 1학년 교과서에서는 다음과 같이 수직선을 정의하며, 이 때 정수는 수직선 위의 점으로 은유된다(우정호 외 9인, 2009: 51):

위의 설명에서 '기준'은 '0', '원점으로부터 그 정수를 나타내는 점까지의 거리'는 '절댓값', '오른쪽에 있는 정수'는 '양의 정수' 그리고 '왼쪽에 있는 정수'는 '음의 정수'와 구조적인 대응

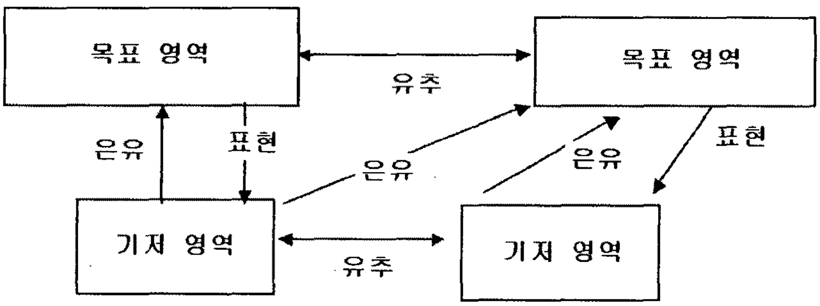
다음과 같은 방법으로 정수를 직선 위에 나타내어 보자.

1. 한 직선 위에 기준이 되는 점을 정하고, 이 점에 수 0을 대응시킨다.
2. 기준점의 오른쪽과 왼쪽에 같은 간격으로 점을 찍는다.
3. 기준점에서 오른쪽으로 거리가 1, 2, 3,...인 점에 각각 +1, +2, +3,...을 대응시킨다.
4. 기준점에서 왼쪽으로 거리가 1, 2, 3,...인 점에 각각 -1, -2, -3,...을 대응시킨다.

관계를 이룬다. 그러므로 '정수'를 '위의 조건을 만족하는 수직선 위의 점'으로 은유하는 것은 구조의 사상에 의한 유추로 볼 수 있다. 이 때, 교수학적 변환의 주된 내용은 정수와 수직선 위의 점 사이에 성립하는 구조적 관계를 파악하면서 정수의 이해를 돕는 것이며, 수직선 위의 점에 대한 추론이 정수에 대한 추론으로 전이되도록 하는 것이다. 교과서에서는 이를 위해, '다음 수직선 위의 네 점 A, B, C, D에 대응하는 정수를 각각 말하여라'와 '다음을 만족하는 네 점 A, B, C, D를 수직선 위에 나타내어라'와 같은 문제(우정호 외 9인, 2009: 51)를 제시하고 있다. '절댓값이 4인 정수', '$|-6|$'와 같은 문제 역시 수직선 위의 점 사이의 관계에 대한 추론에 기초하여 정수에 대한 이해를 꾀하도록 하기 위한 것이다. 이와 같은 구조적 대응 관계를 활용한 탐구는 다음과 같은 정수의 대소 관계에 대한 지식으로 나아가게 하는 원동력이 된다:

- 양의 정수는 0보다 크고, 음의 정수는 0보다 작다;
- 양의 정수는 음의 정수보다 크다;
- 양의 정수끼리는 절댓값이 큰 정수가 크다;
- 음의 정수끼리는 절댓값이 큰 정수가 작다(우정호 외 9인, 2009: 53).

위에서 살펴본 바와 같이, 은유를 구조적인 대응 관계에 따른 유추의 산물로 보는 경우, 교수학적 변환의 주된 내용이나 방법은 은유에 의해 연결된 기저 영역과 목표 영역 사이의 상호작용을 가능하게 하는 유추가 된다. 교수학적 변환 과정에서의 은유와 유추 사이의 이러한 관계를 '은유의 교육적 인식론으로서의 유추'로 표현할 수 있다. 이 경우, 교수학적 변환을 담당하는 교과서 저자와 교사의 주된 책임은 은유가 임시방편적으로 추상적인 지식을 대신하는 것이 아니라 체계적인 탐구의 대상이 될 수 있음을 인식하는 것이며, 유추의 기회를 적절하게 제공함으로써 은유에 의해 투사된 수학적 개념이나 절차에 대한 이해를 시도하도록 하는 것이다. 위의 예에서 정수의 대소 관계에 대한 지식은 정수의 은유로 제시된 수직선 위의 점에 대한 적절한 탐구와 그 탐구 과정에 대한 반성적 사고에 의해 구성될 수 있으며, 교과서의 문제들은 적절한 유추의 기회를 통해 이를 가능하게 하기 위한 것으로 볼 수 있다. 수업을 담당하는 교사는 학생들에게 왜 이와 같은 문제들이 제공되고 있으며, 이를 통해 기저 영역에 대한 어떤 지식을 구성하도록 해야 하는가를 이해해야 할 것이다.



[그림 III-1] 유추와 은유의 관계(Soto-Andrade, 2007: 192)

2. 은유 사이의 연결을 위한 도구로서의 유추

은유와 유추를 비교하여 설명하는 두 번째 관점은 각각이 대상을 달리하는 다른 성격의 추론이라는 것이다. Soto-Andrade(2007: 191-192)은 [그림 III-1]와 같이 은유와 유추가 다른 성격의 추론이라고 설명한다. 예를 들어, 확률을 '질량 또는 무게'로 은유하는 것은 질량이나 무게, 부피 등 양에 대한 측정 사이의 유추와는 다른 추론이다. 또, 확률을 '질량 또는 무게'로 은유한 후, 유리수, 백분율 등 여러 수학적 대상에 적용하는 것은 다시 은유와는 구분되는 새로운 추론으로서의 유추이다. 결국 유추는 은유의 기저 영역 내의 요소들 그리고 목표 영역 내의 요소들 사이의 연결을 위한 것이므로, 은유와는 독립적인 추론이다.

은유와 유추를 이와 같은 방식으로 구분하는 경우, 교수학적 변환의 주된 내용과 방법은 은유에 의해 만들어진 여러 목표 영역 사이의 연결 그리고 각각의 은유에 대한 기저 영역 사이의 연결이 된다. 예를 들어, 자연수의 곱셈은 '직사각형 모양의 배열을 이루는 원소의 개수의 총합'과 '수형도에 의한 경우의 수의 총합'이라는 두 가지 서로 다른 은유에 의해 표현된다. 이 두 가지 은유는 각각의 맥락 내에서 다양한 탐구를 가능하게 한다. 그런데 Soto- Andrade(2007)는 [그림 III-2]과 같이 두 은유를 탐구의 대상으로 택하여 서로 비교할 수 있으며, 두 은유가 각각의 맥락 내에서 '$2\times3=3\times2$'에 대한 설명을 제공한다는 것에 주목하였다. 직사각형 모양으로 배열된 원소의 개수의 총합은 가로 방향에 놓인 원소와 세로 방향에 놓인 원소의 개수를 각각 구한 후, 이를 곱하여 구할 수 있다. 이 때 배열을 [그림 III-2]과 같이 회전 이동하면 원소의 개수의 총합은 변하지 않으며, 결국 '$2\times3=3\times2$'임을 확인할 수 있게 된다. 경우의 수를 체계적으로 나타낸 수형도에서도 [그림 III-2]과 같이 '$2\times3=3\times2$'임을 확인할 수 있다(193). 이 예로부터 동일한 기저 영역에 있는 자연수의 곱셈에 대한 서로 다른 은유에 의해 서로 다른 목표 영역이 발생하였으며, 목표 영역들 사이의 구조적 유사성을 드러냄으로써, 보다 일반적인 지식을 구성하는 것이 가능함을 알 수 있다.

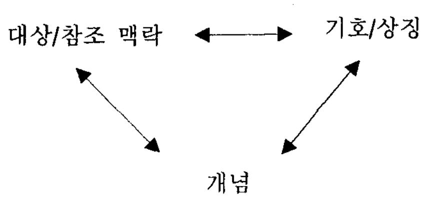
위의 예와 같이 은유와 은유 사이의 비교 또는 연결을 위해 유추를 활용하는 경우, 교수학적인 변환의 주된 과정은 일반성을 인식하고 표현하는 것에 놓인다. 이는 앞서 확인한 Koetsier(1991: 17-18)의 두 번째 규칙, 곧, '서로 다른 두 유사한 상황에서 불확실한 요소를 발견하였을 때, 일반적인 관점에 의한 유추를 시도한다'에 의해 수학적 지식을 구성하는 과정으로 볼 수 있다. 위의 예와 같이 학교수학에서는 자연수의 곱셈에 대한 교환법칙을 공리 체계에 따라 다루는 것이 아니라 은유에 의해 비형식적으로 다루게 된다. 그러므로 여러 방식의 은유에 의해 불변인 성질로 다루면서, 구조적인 유사성을 경험하는 것이 필요하다. 앞서 확인한 바와 같이, 은유에 의한 수학적 지식의 구성은 여러 은유 사이의 상호작용과 이행에 의해 가능하므로(Sfard, 2009), 교수학적 변환 과정에서도 이를 적극적으로 고려할 필요가 있으며, 이를 구현하는 데 유추가 중요한 역할을

[그림 III-2] 서로 다른 은유 사이의 유추

하도록 해야 한다.

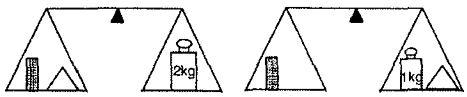
3. 은유를 확대하고 심화하는 도구로서의 유추

Steinbring(1998: 514)은 학교수학의 인식론적 특성을 "맥락-구체성(context-specificity)"으로 본다. 학교수학에서는 맥락과 별개의 지식을 다루는 것이 아니라 맥락에 의존하는 방식으로, 다시 말하여, 일반적이고 추상적인 수준이 아니라 구체적인 맥락과 구체적으로 연결되는 수준에서 수학적인 지식을 다룬다. 더욱이 어느 한 단계를 거치는 것으로 수학적 지식의 구성 과정이 종료되는 것이 아니라 다음과 같은 인식론적 삼각형의 각 꼭지점을 지속적으로 순환하면서 상호작용하는 가운데 개념의 성장을 이루면서 지식이 구성된다고 본다(Steinbring, 2005: 92).



[그림 III-3] 인식론적 삼각형

앞에서 확인한 바와 같이 은유는 추상적인 개념에 대한 일상적이거나 구체적인 또는 친숙한 맥락을 제공하는 한 가지 방법이다. Steinbring(2005)은 인식론적 삼각형의 세 꼭짓점 중 하나인 대상/참조 맥락이 양팔저울일 때 특별한 교수학적인 중재를 시도하고 이 때 일어나는 학습자의 인식 변화를 살펴보았다(95-101). 학생들은 이미 양팔저울 은유에 친숙하며, 이 수업에서는 무게가 각각 1kg과 2kg인 두 종류의 저울추로 두 종류의 물건, 곧, 파란색 원뿔과 붉은색 상자의 무게를 구하는 상황을 새로운 대상/참조 맥락으로 하여 학습하게 된다. 교사가 제공한 대상/참조 맥락은 다음 그림과 같다.



[그림 III-4] 제시된 문제 상황(Steinbring, 2005: 96)

위의 대상/참조 맥락은 원뿔을 x로 상자를 y로 표현할 때, 다음과 같은 기호/상징 체계에 대응된다:

$$x + y = 2kg$$

$$1kg + x = y$$

교사는 기호/상징 체계 내에서가 아니라 대상/참조 맥락에서 문제를 해결하도록 하였다. 학생들은 주어진 조건에 따라 문제를 해결해야 하며, 저울추를 반으로 자르거나 새로이 만들 수 없음을 알고 있어야 한다. 이제 대상/참조 맥락에서 다음과 같은 추론을 할 수 있다:

- 빨간색 상자의 무게는 파란색 원뿔과 1kg을 합한 것만큼이다(빨간색=파란색+1kg);
- ([그림 III-4]의 왼쪽 양팔저울에서) 빨간색 상자를 파란색 원뿔과 1kg짜리 저울추로 바꾸어 놓을 수 있다.

저울추의 종류를 1kg, 2kg으로 제한하였기 때문에, 원래의 문제 상황을 변형한 '빨간색 상자 대신 파란색 원뿔과 1kg짜리 저울추를 놓는다'는 생각을 하지 못하면 문제를 해결하기 어렵다. Steinbring은 이 시점에서 구체적인 양팔저울이 수학적인 양팔저울로 바뀌었다고 설명한다. 구체적인 양팔저울 맥락에서는 직접적인 행동에 의해 무게를 측정해야 하지만, 위의 추론 과정에 의해 학생들은 이론적인 논의에 의해 무게를 구하였다는 것이다. 이러한 일련의

사고 과정에서 [그림 III-5]과 같이 기호/상징 체계와 대상/참조 맥락 사이의 구조적 유사성을 파악하는 것은 매우 중요하다.

$x+y=2kg$ ⟷ 상자 + 원뿔 = $2kg$

$1kg+x=y$ ⟷ $1kg$ + 원뿔 = 상자

[그림 III-5] 기호/상징 체계와 대상/참조 맥락 사이의 구조적 유사성

[그림 III-5]을 은유의 관점에서 다시 해석하면, 기호/상징 체계는 기저 영역에, 대상/참조 맥락은 목표 영역에 해당한다는 것을 알 수 있다. 이 때 두 영역 사이의 구조적인 유사점에 주목하여 목표 영역에서의 추론, 곧, '상자 하나를 원뿔 하나와 1kg으로 바꾸면, 두 개의 원뿔이 1kg이므로, 하나는 500g'이라는 생각을 기호/상징 체계 내의 지식으로 바꾸게 되고, 이로부터 대입에 의해 연립방정식을 풀이하는 방법적 지식을 얻게 된다. 목표 영역에서의 추론은 더 이상 저울추를 직접 활용하는 행동적인 탐구가 아니며, 수학적인 가정과 조작에 따른 탐구로 바뀐다. 이는 무게의 비교 또는 측정이라는 직접적인 행동이 아니라, 균형을 유지해야 한다는 조건을 만족하는 가운데 상황을 변형하는 대수적인 추론에 의존한 것이다(Steinring, 2005: 99). 결국 등식에 대한 양팔저울 은유에서 출발하여, 연립방정식 상황을 나타내는 대상/참조맥락으로 확대하고 이에 대한 탐구를 통해 연립방정식의 풀이 방법에 대한 지식으로 심화시키는 과정이 완성된다. 이와 같이 인식론적 삼각형의 한 꼭짓점에서 출발한 은유가 새로운 대상/참조 맥락으로, 새로운 기호/상징 체계로, 다시 새로운 대상/참조 맥락으로, 다시 새로운 기호/상칭 체계로 확대되고 심화되는 과정에서 구조적 유사성을 인식하는 과정, 곧, 유추 활동이 매우 중요한 역할을 한다.

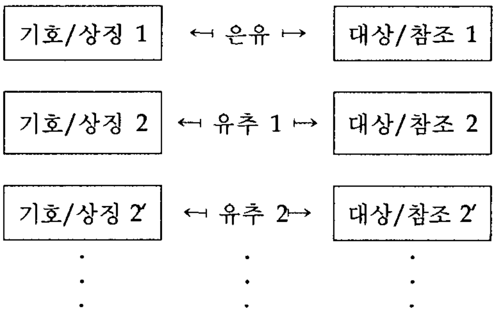
교수학적 변환 과정에서의 은유와 유추의 역할이 보다 드러나도록 위의 예를 다시 표현하면 [그림 III-6]과 같다. 등식에 대한 은유로서의 양팔저울은 이미 학생들이 알고 있는 지식에 해당한다. 이제 저울의 종류를 두 가지로 제한하여 새로 제시한 문제 상황은 양팔저울 은유를 깊이 탐구하도록 하기 위해 변형한 것이며, 유추에 의해 구조적인 유사성을 파악함으로써 새로운 문제 상황을 연립방정식 표현과 관련지어 이해할 수 있다. 이어서 제한된 조건 아래 두 종류의 사물의 무게를 알아보는 것은 직접 무게를 측정하는 것이 아니라 이론적인 논의에 따라 이루어지며, 이에 대한 반성적 사고와 구조적인 유사성의 파악에 의해 연립방정식의 이론적인 해법을 이해할 수 있다.

유추 1과 유추 2에 의해 양팔저울 은유는 수학적 지식의 구성에서 보다 중요한 역할을 하게 되며, 교수학적 변환의 과정도 보다 풍부하게 된다. 만약 은유와 유추에 의존하지 않고 연립방정식 개념과 그 풀이를 다루는 방식으로

등식	↤ 은유 ↦	양팔저울
연립방정식	↤ 유추 1 ↦	두 종류의 저울추만 가지는 양팔저울
연립방정식 풀이	↤ 유추 2 ↦	이론적인 논의에 의존하는 수학적 양팔저울

[그림 III-6] 연립방정식 풀이 과정에서의 은유와 유추의 역할

교수학적 변환을 고려한다면, 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화 과정(Kang, 1990)을 생략하는 것이 되며, 학생들의 자율적인 학습을 어렵게 하는 요인이 될 것이다. 이는 교수학적 변환 과정에서 은유와 유추가 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화를 위한 구체적인 도구가 될 수 있음을 시사한다. 은유에 의해 일상적인 맥락 또는 기존에 학습한 친숙한 맥락을 도입할 수 있고, 교수학적인 변환의 의도에 따라 제한 조건을 추가하여 새로운 문제 상황으로 발전할 수 있으며, 적절한 유추의 반복에 의해 탈배경화/탈개인화를 구현할 수 있다. 이 때 유추는 [그림 III-7]과 같이 기호/상징 체계의 변화와 대상/참조 맥락의 변화를 유기적으로 연결하고 이해하여 수학적 지식의 성장을 가능하게 하는 주된 도구가 된다.



[그림 III-7] 은유와 유추를 활용한 교수학적 변환

V. 논의 및 결론

지금까지 은유와 유추에 의한 수학적 지식의 구성, 은유와 유추의 비교 관점과 교수학적 변환 과정에서의 은유와 유추의 역할을 살펴보았다. 이로부터 은유와 유추가 바람직한 교수학적 변환을 가능하게 하는 도구가 될 수 있음을 확인하였다. 그러나 은유와 유추는 역기능을 가지기도 하고 교육적 활용을 어렵게 하는 측면도 있다. 이에 대한 논의를 통해 교수학적 변환 과정에서의 은유와 유추의 활용에 대한 이 논문에서의 관점을 정립할 것이다.

1. 은유와 유추의 교육적 활용에 있어서의 난점

Sfard(2009)는 음수와 복소수가 수학적 담화의 확장 또는 기존의 체계에서 성립하는 형식을 보존하도록 유추함으로써 구성한 새로운 수학적 대상임에도 불구하고, 은유에 의한 보조물이 없이는 수학자들이 새로이 형성한 대상을 인정하지 않았다는 것에 주목한다. 수학자들이 방정식의 근으로 도입한 음수와 복소수를 개념적으로 인정하지 못하다가, -a를 수직선 위에 표시하고, $\sqrt{-1}$을 복소평면 위의 한 점으로 은유한 후에야 음수와 복소수를 수로서 인정하였다는 것이다. 은유의 도움을 받지 않으면 수학적 개념을 형성하기 어려움을 알 수 있다. 그러나 Sfard(2009)는 은유가 언제나 수학적 개념화를 가능하게 하는 도구가 아니라는 것을 Sacceri가 사영기하를 연구할 때 평행선 공준의 독립성을 증명하고도 자신의 은유와 조화를 이루지 못하였기 때문에 믿지 못했던 예를 들어 설명한다(413-415). 이와 같이 은유는 수학적인 개념화를 촉진하는 동시에 더 이상 탐구를 진전시키지 못하게 하는 역기능도 가진다.

홍진곤(2009)은 다른 각도에서 은유의 교육적 활용의 난점을 설명한다. 그는 수학에서 직선이나 선분을 개념화하기 위하여 사용한 두 가지 은유에 기초하여 무한 개념의 이해에 필요한 인식론적 조건을 확인하였다. 직선에 대한 첫 번째 은유는 자연적인 연속체, 곧, 이산적이지 않고 절대적으로 연속적이며, 점은 직선 위에서의 위치로 보는 것이다. 두 번째 은

유는 점의 집합으로 직선을 나타내는 것이며, 이 때 점은 직선을 구성하는 실체가 된다. 연속체로서의 직선의 존재를 가정하고 그로부터 점의 존재를 파악하는 것은 가무한의 관점이며, 점의 집합으로 직선을 구성할 수 있다고 보는 것을 실무한의 관점이다(473). 이로부터 홍진곤(2009: 475)은, 직선에 대한 두 가지 은유를 어떻게 이해할 수 있는지, 학습자의 인식 수준에 맞는 적절한 은유가 무엇인지, 초기 단계의 학습에 활용할 적절한 은유가 없을 때 어떻게 할 수 있는지 등의 문제를 제기하였다.

유추 역시 수학적 지식의 확장에 필수적인 도구이지만, 오개념의 원인이 되기도 한다는 것이 여러 연구에 의해 보고되어왔다. 유추의 유용성에 대해 대표적으로 인용되는 연구 중의 하나인 Polya(1954, 1962)의 책에서는 오일러를 비롯한 수학자들이 유한개의 항에 대해 성립하는 성질과 유사한 성질이 무한개의 항에 대해 성립할 것으로 기대한 후 문제를 해결했던 사례를 제시하였다. 그러나 유한개의 항에 대해 성립하는 성질, 예를 들어, 분배법칙과 결합법칙이 무한개의 항에 대해서도 성립할 것이라고 가정하는 무리한 유추는 다음과 같은 오류의 원인으로 지적되기도 하였다:

$x = 1 + 2 + 2^2 + \cdots$ 이면
$x = 1 + 2(1 + 2 + 2^2 + \cdots) = 1 + 2x$ 이므로
$x = -1$(홍진곤, 2009: 478).

이미 사용했던 추론을 다른 대상에 대해 무리하게 활용하는 것, 곧, 추론의 유추는 확률 개념의 이론화 과정에서 많은 오류와 패러독스의 원인이 되었다. 예를 들어, Simpson의 패러독스는 각 부분에 대해 어떤 성질이 성립하면 전체에 대해서도 그 성질이 성립할 것이라는 수학적 추론의 유추에 의해 발생하는 패러독스로 다음과 같이 설명할 수 있다(Borovcnik & Kapadia, 1991: 66-67; 이경화, 1996: 37-38에서 재인용).

> 1973년 캘리포니아 대학에 지원한 학생의 성별에 따른 입학률은, 여학생의 경우 35%, 남학생의 경우 44%였다. 그런데 학과별 입학률 조사 결과, 대부분의 학과에서 남녀의 입학률이 비슷하고, 몇 개의 학과에서는 여학생의 입학률이 남학생의 입학률보다 높았다. 여학생이 남학생보다 낮은 입학률을 보인 경우가 없었는데도 전체적으로는 여학생의 입학률이 남학생의 입학률보다 낮았다.

2개의 학과만 있다고 단순화시켜서 <표 V-1>과 같이 생각하면,

<표 V-1> Simpson의 패러독스

	여 학 생		남 학 생	
	합격	불합격	합격	불합격
학과 1	2	3	1	2
학과 2	3	1	5	2
대학 전체	5	4	6	4

전체의 경우, 여학생의 입학률 $\frac{5}{9}$는 남학생의 입학률 $\frac{6}{10}$보다 낮다. 그러나 학과 1과 학과 2에서는 각각 $\frac{2}{5} > \frac{1}{3}, \frac{3}{4} > \frac{5}{7}$이므로 여학생이 남학생보다 높은 입학률을 보인다. 수학에서 경우를 나누어, 각 경우에 대하여 성립하는 성질이 전체에 대해 성립한다고 주장한 경험에 비추어보면, 곧, 추론 방식을 유추에 의해 확장 적용하여 문제 상황을 이해하려고 하면 모순이 발생하여 패러독스가 된다.

지금까지 은유가 개념화를 촉진하는 동시에 오히려 개념의 발전을 저해하며, 같은 기저 영역에 대한 복수 은유 중 어떤 것을, 언제, 어떤 방식으로 다룰 것인가라는 교육적 판단의 문제

가 발생한다는 점을 확인하였다. 유추 역시 수학적 발견 또는 구성의 도구가 되는 한편, 오개념 또는 패러독스의 원인이 되기 때문에, 신중한 접근과 별도의 수학적 정당화에 따른 이해가 필요하다는 것을 알아보았다.

2. 교수학적 변환 과정에서의 은유와 유추의 활용

이 연구의 목적은 교수학적인 변환 과정에서의 은유와 유추의 활용에 대해 알아보는 것이었다. 앞서 제시한 바와 같이 교수학적인 변환 과정에서 은유와 유추를 세 가지 서로 다른 방식으로 활용할 수 있다. 이하에서 이들 각각에 대해 연구 결과를 요약하고 간략하게 논의를 추가한다.

첫 번째로 유추를 은유의 교육적 인식론으로 보는 교수학적 변환 모델의 경우, 은유에 의해 연결된 기저 영역과 목표 영역 사이의 구조적 유사성을 파악해보는 활동이 교수학적 변환의 중요한 요소이었다. 예를 들어, 이미 살펴본 바와 같이 우리 교과서에서는 정수를 수직선 위의 점으로 은유하고, 주어진 정수를 수직선 위에, 수직선의 점을 정수로 나타내도록 하고 있다. 이러한 활동은 은유에 의해 연결된 기저 영역과 목표 영역 사이의 구조적 유사성을 의식하도록 하는 교수학적 변환의 주된 내용이자 결과이며, 기저 영역인 정수에 대한 개념적 지식을 구성하는 핵심적인 과정이다. English & Sharry(1996)는 유추 과정에서 기저 영역과 목표 영역 사이의 모호한 구조적 대응이 명확해질 때, 기저 영역의 구조를 분명하게 인식하게 되며, 이것이 기저 영역에 대한 개념적 이해를 가능하게 한다고 보았다(139). 그러나 학생들은 종종 구조적인 유사성보다는 피상적인 유사성에 주목하여 기저 영역과 목표 영역 사이의 대응을 시도한다는 점(Halford, 1992; Halford, Andrews, Dalton, Boag, & Zielinski, 2002)에 주의할 필요가 있다. 그러므로 교사에 의한 적절한 안내에 의해 구조적인 유사성에 주목하도록 하는 것이 은유와 유추의 생산적인 역할을 가능하게 하는 매우 중요한 조건이다.

두 번째로 유추에 의해 은유와 은유 사이의 연결을 시도하는 교수학적 변환 모델에 대해 알아보았다. 이미 살펴본 바와 같이, 자연수의 곱셈에 대한 두 가지 서로 다른 은유, 곧, 점을 직사각형 모양으로 배열하는 것과 수형도를 그려서 경우의 수를 구하는 것 사이의 유사성을 교환법칙이라는 보다 일반적인 의미에서 파악할 수 있다. 이는 Koetsier(1991)가 기술한 수학적 지식 구성의 두 번째 원리, 곧, '서로 다른 두 유사한 상황에서 불확실한 요소를 발견하였을 때, 일반적인 관점에 의한 유추를 시도한다'는 아이디어와 관련된다는 것을 확인한 바 있다. 이 예와 같이 다양한 은유를 활용하여 수학적 지식을 교수학적으로 변환하였을 때, 여러 은유 사이의 구조적 유사성에 주목하도록 하기 위해 유추를 도입하면 지식의 구조적 일반성을 획득하는 것을 촉진할 수 있다. 이는 은유에 의한 수학적 지식의 구성을 여러 은유 사이의 교배에 의해 설명한 Sfard(2009)의 관점을 좀 더 구체적으로 설명하는 것이기도 하다. 그러나 실수의 수직선 은유와 점의 집합 은유는 그 배경에 들어 있는 가무한과 실무한이 전혀 다른 수준의 개념적 이해를 요구하기 때문에(홍진곤, 2009), 서로 연결되기 어려운 경우이다. 특히, 대부분의 학생들은 실무한을 이해하지 못하기 때문에 유추에 의한 두 은유의 연결은 불가능하다. 그러므로 교수학적 변환 과정에서 유추가 은유와 은유를 연결하는 도구로 활용되려면, 두 은유에 의해 생성된 맥락에 대한 충분한 탐구가 가능해야 하며, 그 탐구에

대한 반성적 사고에 의해 유추가 가능해야 한다.

세 번째로 은유의 확대와 심화를 촉진하는 도구로서 유추를 활용한 교수학적 변환 모델의 경우, 은유와 유추는 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화가 자연스럽게 이루어질 수 있도록 한다는 점을 확인하였다. 이 때 유추는 은유에 의해 생성된 대상/참조 맥락에 제한된 조건을 추가하여 기호/상징 체계와 동형인 구조를 부여하는 단계, 대상/참조 맥락에서 제한된 조건을 따르면서 문제를 해결하는 단계, 그 해결 과정을 반성적으로 사고하여 기호/상징 체계 내의 지식으로 전이시키는 단계에서 각각 매우 중요한 역할을 한다. 은유에 의해 생성된 초기 대상/참조 맥락을 변형하여 새로운 대상/참조 맥락을 구성하는 단계에서 배경화/개인화가 구현되며, 대상/참조 맥락에서의 탐구 과정에 대한 반성적 사고 결과를 기호/상징 체계로 전이시키는 과정에서 탈배경화/탈개인화가 일어날 수 있다. 그러나 주어진 대상/참조 맥락에 제한된 조건을 부여하는 것이 문제 상황을 실제와는 거리가 먼 인위적인 것으로 만들 여지가 있다. 앞에서 살펴본 문제 상황도 저울추가 왜 두 종류만 있는지에 대해 학생들이 납득할 만한 이유를 찾기 어렵다. 그러므로 은유에 의해 구현된 대상/참조 맥락을 자연스럽게 변형하여 유추하도록 함으로써, 새로운 지식의 교수학적 변환으로 자연스럽게 발전하도록 하는 방안에 대한 후속 연구가 필요하다.

이 연구에서 얻은 결론은, 은유와 유추가 수학적 지식의 구성 과정에서 중요한 역할을 하며, 교수학적 변환의 주요 과정을 개발함에 있어서도 그러한 역할을 적극적으로 활용할 필요가 있다는 것이다. 특히 이 연구에서는 그 동안 이루어진 은유와 유추 사이의 관계에 대한 연구, 인식론적 삼각형에 따른 Steinbring(2005)의 학습 과정 연구를 교수학적 변환의 관점에서 재해석하고, 은유와 유추의 활용을 고려한 세 가지 교수학적 변환 모델을 도출하였다. 이 세 가지 모델은 은유와 유추에 의한 수학적 지식의 구성 기능이 교수학적 변환의 과정에서 재현되도록 한다는 점에서 교육적인 의의가 있다. 그러나 은유와 유추는 각각 교육적 활용의 난점도 내포하고 있으므로 신중하게 다루어야 한다. 이 연구에서 제시한 세 가지 모델에 따라 교과서 또는 수업을 분석하여 그 자세한 특징을 파악하는 후속 연구가 이루어지고, 구체적인 논점으로 정리되기를 기대한다.

참고문헌

우정호 · 박교식 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 임재훈 · 박인 · 지은정 · 신보미 · 최인선(2009). **중학교 수학 1**. 서울: (주)두산.

이경화(1996). **확률개념의 교수학적 변환에 관한 연구**. 서울대학교 박사학위 논문.

______(2009). 수학적 지식의 구성에서 유추적 사고의 역할. **수학교육학연구, 19**(3). 355-369. 대한수학교육학회.

이승우(2001). **학교수학에서의 유추와 은유**, 서울대학교 석사학위 논문.

홍진곤(2009). 무한 개념의 이해에 관하여. **수학교육학연구, 18(4)**, 469-482.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, In D. Tall (Ed.), *AdvancedMathematicalThinking* (pp. 95-126)Boston:Kluwer.

English, L. D. (2004) (Ed.), *Mathematicaland Analogical Reasoning of Young Learners.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

______________(2009). (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. (권석일・김성준・나귀수・남진영・박문환・박영희・변희현・서동엽・이경화・최병철・한대희・홍진곤 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1997년 출판).

English, L. D., & Sharry, P. V. (1996). Analogical reasoning and the development of algebraic abstraction. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 135-157.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An educational Approach.* D. Reidel: Dordrecht.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.

Halford, G. S. (1992). Analogical reasoning and conceptual complexity in cognitive development. *Human Development*, 35, 193-217.

Halford, G. S., Andrews, G., Dalton, C., Boag, C., & Zielinski, T. (2002). Young children's performance on the balance scale: The influence of relational complexity, *Journal of Experimental Child Psychology*, 81, 417 - 445.

Kang, W. (1990). Mathematics knowledge in textbooks, Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia.

Koetsier, T. (1991). Lakatos' Philosophy of Mathematics: A Historical Approach. Amsterdam: North-Holland.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2009). Metaphorical structure of mathematics: sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics. In English, L (Ed.) *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images*(25-102). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. (권석일・김성준・나귀수・남진영・박문환・박영희・변희현・서동엽・이경화・최병철・한대희・홍진곤 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1997년 출판).

Piaget, J. (1972). The Principles of Genetic Epistemology. (translated by Mays, W.). NewYork: Basic Books.

Polya, G. (1978). Guessing and proving. *The Two-Year Colleage Mathematics Journal, 9(1)*, 21-27.

Rattermann, M. J. (2009). Commentary: Mathematical reasoning and analogy. In L. D. English (Ed.) Mathematical Reasoning: analogies, metaphors, and images (275-294). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. (권석일・김성준・나귀수・남진영・박문환・박영희・변희현・서동엽・이경화・최병철・한대희・홍진곤 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1997년 출판).

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

_________(2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing.* Cambridge,UK: Cambridge University Press.

_________(2009). On metaphorical roots of conceptual growth (A commentary). In English, L. (ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*(373-418).

Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. (권석일 · 김성준 · 나귀수 · 남진영 · 박문환 · 박영희 · 변희현 · 서동엽 · 이경화 · 최병철 · 한대희 · 홍진곤 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1997년 출판).

Skemp, R. R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics*. 2nd Edition. London: Penguin Books.

Soto-Andrade, J. (2007). Methphors and Cognitive modes in the teaching learning of mathematics. CERME 5. Working group 1 발표자료. http://ermeweb.free.fr/CERME5b/

Steinbring, H. (1998). Epistemological constraints of mathematical knowledge in social learning settings. In A. Sierpinka & J. Kilpatrick (Eds.) Mathematics Education as a Research Domain: A search for identity. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 513-526.

__________(2005). Do mathematical symbols describe or construct "Reality". In M. H. G. Hoffman, J. Lenhard, & F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education*. New York: Springer, 91-104.

The Role of Metaphor and Analogy in Didactic Transposition

Lee, Kyeong Hwa (Seoul National University)

Similarity between concept and concept, principle and principle, theory and theory is known as a strong motivation to mathematical knowledge construction. Metaphor and analogy are reasoning skills based on similarity. These two reasoning skills have been introduced as useful not only for mathematicians but also for students to make meaningful conjectures, by which mathematical knowledge is constructed. However, there has been lack of researches connecting the two reasoning skills. In particular, no research focused on the interplay between the two in didactic transposition. This study investigated the process of knowledge construction by metaphor and analogy and their roles in didactic transposition. In conclusion, three kinds of models using metaphor and analogy in didactic transposition were elaborated.

* **Key Words** : 은유(metaphor), 유추(analogy), 수학적지식의 구성(mathematical knowledge construction), 교수학적 변환(didactic transposition)

논문 접수 : 2009. 12. 16
논문 수정 : 2010. 02. 08
심사 완료 : 2010. 02. 17