

van Hiele의 학습단계에 따른 초등학교 4학년의 도형지도 방안연구1)

서 은 영 (통영초등학교)

장 혜 원 (진주교육대학교)

학생들은 학교수학에서 중요한 위상을 차지하는 도형과 관련하여 다양한 사고를 하게 되며 학생들의 사고 수준의 파악은 교수-학습 효과로 직결되기 때문에 도형 지도와 관련하여 van Hiele의 기하 사고수준 이론은 중요하게 다루어진다. 기하 사고 수준의 도약적 특성 때문에 서로의 의사소통 불가능성까지 감안해야 한다는 시사점을 고려하면 지도하고자 하는 학생의 기하 사고 수준을 파악하는 것은 필수적이며, 뿐만 아니라 그들의 사고 수준 향상을 위해서 어떠한 지도 내용 및 방법을 구현해야 하는가도 핵심적인 기하 영역의 교육문제이다. 본 연구에서는 경남 통영의 한 초등학교 4학년 학생 10명을 대상으로 그들의 기하 사고 수준을 고려한 도형 단원의 교수-학습 지도안을 작성하여 적용함으로써 사고 수준의 변화를 관찰하고 수업을 분석한 결과, 학생들의 사고 특성 및 교수학적 시사점을 도출할 수 있었다.

I. 서론

초등수학에서 기하의 기초개념을 다루는 도형영역은 수학적 학습의 그 위치와 현대 사회에서의 창의성 및 수학적 힘의 신장을 위한 도구라는 측면으로 인해 수학 교과내용의 약 27%를 차지하고 있다(김복자, 2000). 초등학교에서의 도형학습은 직관적이고 비형식적인 방법으로 이루어진다. 즉 학생들은 실생활 주변의 구체물을 보고 만져보는 경험을 통해 도형이라는 수학적 개념을 추상화하게 되고, 학습한 개념을 바탕

으로 도형의 성질과 관계를 이해하게 된다. 그러나 학생들은 생활 주변의 가장 친근한 사물을 대상으로 학습하는 도형영역을 오히려 어려워하는 것이 현실이다. 이러한 현상은 교사가 학생보다 높은 수준에서 지도하고 있어 서로 다른 수준에서 추론하는 두 사람은 서로 이해할 수 없다는 van Hiele 이론으로 설명 가능하다.

van Hiele 이론은 1950년대 네덜란드의 중등학교 기하 교사인 van Hiele 부부가 자신들이 가르쳤던 학생들이 기하 학습에서 겪는 곤란의 원인을 밝혀보려고 노력한 결과 기하학습에서 보이는 교사와 학생들 사이의 사고 수준의 차이에 주목하여 체계화된 이론이다. 이에 van Hiele은 학생들의 기하 관련을 사고를 다섯 수준으로 구분하였다. 그리고 각 수준에서의 완전한 이해와 나아가 다음 수준으로의 이행을 위한 교수학적 처방으로 질의 안내 단계, 안내된 탐구 단계, 명료화 단계, 자유 탐구 단계, 통합 단계라는 5가지 학습 단계를 제안하였다.

van Hiele 이론의 타당성과 유용성을 입증하는 연구들은 이어져왔다. 김선렬(1992)은 학생들의 기하학습 성취도와 van Hiele 수준은 상관관계를 밝혔으며 류성림(2000)은 van Hiele 이론에 따라 제1, 2수준을 위한 교수·학습자료를 제시하였고 양규모(2002)는 많은 학생들이 제1, 2수준에 머물러 있음을 확인하고 교육과정 수준에 적합한 학생들의 기하 사고 수준 향상을 위한 각 수준별 다양한 활동지를 제안하였다. 그리고 김현미(1999), 김복자(2000), 이길섭(2004), 김자경(2005), 이민호(2005), 김덕수(2007) 등은 van Hiele 이론에 근거한 교수·학습 지도안을 실제 수업에 적용하여 그 효과를 검증하는 연구를 하였다. 특히 김현미(1999)는 제6차 교육과정의 도형 영역을 분석하고 교사와 학생들의 기하 수준을 판별한 결과 학생들의 기하 수준이 교과서 내용의 기하 수준에 비해 현저히 낮음을 지적하고 수준 향상을 위한 활동을 도입하여 4학년 2학기 4단원 평면도형의 3차시에 해당하는 지도안을 작성하고 수업을 하였

* 접수일(2010년 10월 22일), 수정일(2010년 11월 5일), 게재 확정일(2010년 11월 17일)

* ZDM분류 : D40

* MSC2000분류 : 97D40, 97D80

* 주제어 : 기하학습 수준, van Hiele 이론, 도형 지도

1) 본 논문은 서은영(2009)의 석사학위 논문 중 일부를 재구성한 것임.

다. 수업 후 학생들이 여러 활동에 흥미로워 하고 자발적으로 참여하는 모습을 보고 학생 수준에 맞는 활동을 중심으로 수업을 한다면 수준 향상은 가능할 것이라고 기대하며 학생의 수준을 상승시킬 수 있는 지도안의 개발과 그에 따른 실천 연구를 제안하였다.

이에 본 연구는 '사각형과 도형 만들기' 단원이 초등학교에서 다루는 도형영역의 주요 부분인 것과 학생들이 도형학습에서 겪는 어려움이 사고 수준의 차이를 주목한 van Hiele 이론으로 설명된다는 점에 착안하여, 이 단원에 대해 학생들의 기하 사고 수준을 고려하여 van Hiele 이론에 근거한 교수-학습 지도안을 개발, 적용함으로써 학생들의 기하 사고 수준 향상을 위한 도형 지도 방안을 제시하고자 한다.

II. van Hiele 이론에 근거한 기하 학습 단계 및 활동

1. van Hiele 이론에 근거한 학습 단계

van Hiele은 각 수준에서의 완전한 이해와 나아가 다음 수준으로의 이행을 위한 교수학적 처방으로 질의 안내 단계, 안내된 탐구 단계, 명료화 단계, 자유 탐구 단계, 통합 단계라는 5가지 학습 단계를 제안하였다 (van Hiele, 1986). 각 단계의 특징은 다음과 같다.

제1단계 질의 안내 단계(Inquiry/ Information): 교사와 학생은 학습 대상에 대해 대화하고 활동한다. 관찰하고, 질문하고, 특별한 수준 언어가 소개되는 과정에서 학생은 학습 내용과 친숙해지게 된다.

제2단계 안내된 탐구 단계(Directed Orientation): 학생은 교사가 제공하는 자료를 다루면서 학습 주제에 관해 탐구한다. 이 때 교사는 학습 주제를 탐구하는 활동에 학생이 능동적으로 참여하도록, 목표로 정해진 개념과 절차가 잘 드러나는 과제를 통해 신중하게 계열화된 활동을 제시하여야 한다.

제3단계 명료화 단계(Explication): 학생들은 앞 단계에서 경험하고 관찰한 사항에 대해 토론한다. 정확하고 적절한 언어를 사용하면서 자신의 의견을 개념화하고 제안한다. 이 때 교사는 학생의 토론을 관찰하며 적절한 수학적 용어를 도입하는 것을 돕는다.

제4단계 자유 탐구 단계(Free Orientation): 교사는

많은 사고 단계가 들어 있는 과제, 여러 가지 방법으로 완성할 수 있는 과제 등 좀 더 복잡한 과제를 제시하여 학생이 배운 지식을 종합적으로 적용해 보게 한다. 학생은 복잡한 과제를 접하면서 자신만의 방식을 찾는 경험을 하게 되며, 그럼으로써 탐구 대상 사이의 많은 관계들이 학생에게 더욱 명확해진다.

제5단계 통합 단계(Integration): 학생 스스로 경험한 지금까지의 단계를 종합하고 음미하는 단계로서 탐구활동을 개관하여 전체를 조망하게 되면서 사고 수준 비약에 이르게 된다. 제5단계가 끝나면 학생은 다음 수준으로 넘어갈 준비가 된 셈이다.

본 연구에서는 이 단계에 따라 학습지도안을 작성하였으며, 따라서 각 단계의 특징에 따른 구체적인 활동은 <표 2>, <표 3>에서 확인할 수 있다.

2. van Hiele의 사고 수준에 따른 기하 활동

van Hiele 이론에 의하면 한 수준에서 다음 수준으로의 발달은 나이나 신체적 성숙보다 교육의 내용이나 방법에 더 많이 의존하여 수준향상에 있어 교육의 중요성을 강조하고 있다. 그리고 서로 다른 수준에서 생각하고 있는 교사와 학생은 서로를 이해할 수 없다고 하여 학생들의 수준을 파악하고 학생들의 수준에 맞는 지도를 요구하고 있다. 이에 본 연구대상 학생들의 수준에 적합한 경험을 제공하기 위한 기초자료로서, 김현미(1999)와 양규모(2002)를 참고하여 수준²⁾에 맞는 활동을 알아보았다.

가. 제1수준의 학생을 위한 활동

제1수준은 도형을 그 구성 요소에 대한 고려 없이 전체로서의 시각적 외관에 의해 인식하는 수준이므로 여기서의 활동은 학생이 도형을 인식하는데 주안점을 둔다. 시각에 따라 구체물의 모양이 다르게 보이는 것을 알고, 구체물에 있는 여러 가지 모양의 도형을 손으로 직접 그려 본다던가 가위로 오려보는 활동 등을 통해 도형을 인식하고, 생활 주변의 사물은 어떤 도형의 모양을 가지고 있는지 응용할 수 있게 한다. 구체

2) van Hiele의 기하학적 수준을 제1수준에서 제5수준의 다섯 수준으로 표시하였다. III장 연구대상의 수준 판별에서 제0수준은 Chicago project의 판정법대로 1~5번 문항을 통과하지 못한 학생을 지칭한다.

적으로, 패턴블록, 실, 이쑤시개, 빨대를 이용한 모양 만들기, 방향에 따라 달리 보이는 모양 확인하기, 생활 주변에서 도형 찾기, 비치는 종이를 이용한 도형 베끼기, 보여준 도형을 가리고 그려보기, 연필로 모양 본떠 오려내기 등이 있다.

나. 제2수준의 학생을 위한 활동

제2수준은 관찰과 실험을 통하여 주어진 도형의 구성 요소나 성질을 분석할 수 있는 수준으로 이 수준에서는 도형의 성질을 알고 분류하며 성질에 의해 도형을 구분하고, 성질을 사용하여 도형을 그릴 수 있게 해야 한다. 예컨대 도형을 접어서 다른 도형 만들기, 도형의 성질 카드 만들기, 성질에 따라 도형 분류하기, 도형의 성질에 따라 모양 비교하기, 성질을 보거나 듣고 도형 인식하기, 부분을 보고 전체 파악하기, 도형을 보고 성질 말하기, 모눈종이에 도형 그리기, 입체도형의 단면 예상하고 확인하기, 조건에 맞는 도형 그리기, 자로 도형 그리기, 사진 속에서 기하 개념 확인하기 등을 활용할 수 있다.

다. 제3수준의 학생을 위한 활동

제3수준에서는 여러 도형 사이에 존재하는 성질들의 논리적인 관계를 파악할 수 있어 도형의 성질을 비형식적으로 추론할 수 있고 도형을 특정의 관점으로 분류할 수 있다. 이 때, 도형의 포함 관계와 수학적 정의가 이해 될 수 있다. 구체적 활동으로는 도형의 성질에 따라 위계적으로 분류하기, 귀납적 추론으로 '삼각형의 세 각의 합은 180°이다'라는 정리를 유도해내고 이 사실을 이용하여 사각형의 내각의 합 구하기, 주어진 성질에서 특정 도형에 필요한 성질 구별하기, 도형 카드로 포함관계 나타내기, 주어진 성질로부터 도형의 이름 추론하기, 도형의 포함관계를 수형도로 나타내기 등이 있다.

III. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구를 위해 우선 경상남도 통영시에 있는 A초등학교 4학년 7개 학급 학생 275명을 대상으로 기하

사고 수준 검사(Chicago Project에서 개발한 5지 선다형의 번역본)를 실시하였다. 1학기 4월 중에 지도안 개발 및 연구 대상 선정을 위한 기초 작업으로서 검사를 실시하였으나 이후 4단원 수직과 평행의 이수 등, 지도안의 적용 시기인 2학기 말에는 그 동안 상당한 시간의 경과로 인한 학생들의 기하 사고 수준의 변화가 예상되어 학생들의 기하 사고 수준을 다시 확인할 필요가 있었다. 그래서 지도의 편의를 위해 임의의 학반 한 반을 선택하여 2학기 11월 중에 수준 검사(백은자, 2006의 검사지 활용)를 재실시하였다. 그 결과에 따라 제0~3수준의 각 수준별로 임의 선정한 2명씩 8명과 제0수준 학생 2명을 추가로 선정하여 총 10명을 연구 대상으로 하였다. 제0수준의 학생을 추가 선정한 것은 낮은 수준의 학생들의 반응에 근거하여 이 학생들의 수준이 어느 정도 변화 가능한지 좀 더 면밀하게 살펴 보기 위해서였다.

2. 연구 절차 및 방법

사전검사 결과에 기초하여 선정된 10명의 4학년 학생을 대상으로 모두 6차시의 수업에서 개발한 교수-학습 지도안을 적용하였다. 적용 시기는 정규수업에서 5단원에 들어가기 전인 2008년 11월 6일~11월 14일로, 수업 전 아침시간을 활용하여 8시 30분부터 9시 10분까지 40분 동안 소회의실에서 별도로 수업을 실시하였다. 매 수업 연구자가 직접 수업을 하면서 학생들의 활동을 관찰, 분석하였다. 사전 검사와 동일한 문제지를 이용하여 25분간 수행된 학생 결과를 본 연구자가 직접 채점하여 각 학생에게 사고 수준을 부여하였다. 수준 부여 방법은 각 수준의 5개 문항 중 4문항 이상을 맞혔을 때 점수를 부여하는 Chicago project의 방법(백은자, 2006)을 따랐다.

IV. 기하 사고 수준 향상을 위한 수업의 실제

1. van Hiele 이론에 근거한 교수-학습 지도안의 개발

van Hiele 사고 수준의 특징을 토대로 교과서의 수

준을 분석한 양규모(2002), 백은자(2006), 김원덕(2007)에 따르면 초등수학에서 다루는 평면도형 내용은 제1수준에서 제3수준에 해당하는 것을 알 수 있다. 그 중 본 연구에서의 지도 내용은 4-나 단계 5단원 '사각형과 도형 만들기'(<표 1>)이며, 이 단원의 10차시 중 제1차시에서 제6차시까지 총 여섯 차시의 교수-학습 지도안을 개발하였다. van Hiele의 5개 학습단계에 따라 구성하였으며, 각 단계마다 다양한 기하 경험을 할 수 있는 활동을 제공하여 학생들의 기하 사고 수준을 향상시키고자 하였다. 평행사변형을 다룬 2차시의 활동을 <표 2>, 지도안을 <표 3>에 제시하였다.

2. 교수-학습 지도안의 적용

기하 사고 수준 검사 결과에 기초하여 선정된 10명의 4학년 학생을 대상으로 모두 6차시의 수업을 통해 개발한 교수-학습 지도안을 적용하였다. 수준별로 고

<표 1> 제7차 교육과정의 4학년 도형단원과 사고 수준

단계	단원	차시주제	사고수준
4-나	4 사각형	·이등변삼각형 알아보기	2
		·정삼각형 알아보기	2
		·예각과 둔각 알아보기	2
		·예각삼각형과 둔각삼각형 알아보기	2
4-나	4.수직과 평행	·직선의 수직 관계	2
		·수선 긋기	2
		·평행선 이해	2
		·평행선 긋기	2
		·평행선의 성질	2
		·사다리꼴 알아보기	2
4-나	5.사각형과 도형 만들기	·평행사변형 알아보기	3
		·마름모 알아보기	3
		·직사각형과 정사각형 알아보기	3
		·다각형과 정다각형 알아보기	2
		·대각선 알아보기	2
		·여러 가지 모양 만들어 보기	3

<표 2> 사고 수준 향상을 위한 활동(2/10)

단원명	5. 사각형과 도형 만들기	학습주제	평행사변형 알아보기
학습 목표	· 평행사변형을 이해하고 식별할 수 있다. · 평행사변형의 성질을 알고, 그릴 수 있다.		
학습단계	사고 수준 향상을 위한 활동		수준
질의 안내 단계	· 여러 사각형 중에서 사다리꼴 찾기 · 계단의 난간에서 볼 수 있는 사각형 알아보기		1, 2 1
안내된 탐구 단계	· 여러 모양의 사다리꼴을 분류 기준을 정하여 나누어 보기 · 가지고 있는 여러 도형 중에서 계단 모양의 사각형 찾기 · 모눈종이에 그려보기/지오보드로 계단 모양의 사각형 만들어보기 · 모눈종이에 그려진 계단 모양의 사각형을 색종이로 옮겨 잘라보기 · 모눈종이 칸 수 세기/ 자와 각도기로 재어 보기/ 접어 보기/ 잘라 보기		2 1, 2 2 1, 2 2
명료화 단계	· 평행사변형의 성질을 알고 이름 붙이기, 약속하기 · 평행사변형의 성질에 대해 모둠별로 의논하여 발표하기		2 2
자유 탐구 단계	· 모눈종이에 모양이나 크기가 다른 평행사변형 그려보기 · 모눈종이에 그려진 점을 연결하여 평행사변형 그리기 · 제시된 모양대로 지오보드에 만들어보기 · 지오보드를 활용하여 여러 모양의 평행사변형 만들어보기 · 지오보드에 제시된 사다리꼴의 한 꼭짓점을 옮겨서 평행사변형 만들기 · 주어진 조건에 맞게 평행사변형 그리기		2 1 1 2 2 2
	· 패턴 블록으로 짝이 만든 모양대로 만들어보기 · 소마큐브를 다양한 위치에서 보고 그 모양 그리기 · 도형 퍼즐 맞추기		1 1 1
	· 평행사변형의 성질을 적용하여 변의 길이와 각의 크기 알아보는 문제 해결하기 · 여러 도형의 성질 카드 중에서 평행사변형에 해당하는 성질 카드 찾기		2 2

<표 3> 교수-학습 지도안(2/10)

단원명	5. 사각형과 도형 만들기		단계	4-나	차시	2/10						
학습주제	평행사변형 알아보기		교과서	66~67쪽	익힘책	73~74쪽						
학습목표	<ul style="list-style-type: none"> · 평행사변형을 이해하고 식별할 수 있다. · 평행사변형의 성질을 알고, 그릴 수 있다. 											
학습자료	자, 각도기, 모눈종이, 지오보드, 여러 가지 모양의 사각형, 도형 성질 카드, 실물 화상기											
학습단계	학습흐름	교수·학습 활동			시간	자료 및 유의점						
질의 안내 단계	전체	<ul style="list-style-type: none"> ● 마음열기 - 노래 부르기 ● 전시 학습 상기 <ul style="list-style-type: none"> · 사다리꼴은 어떤 도형을 말하는가? <ul style="list-style-type: none"> - 한 쌍의 마주 보는 변이 평행인 사각형 · (여러 가지 모양의 사각형을 제시하며) 사다리꼴과 아닌 것으로 나누어 보자. ● 학습 동기 유발 (이상한 부분 찾기) <ul style="list-style-type: none"> · 다음 그림에서 잘못 되어있는 부분을 빨리 찾아보자. (계단의 한 부분인 평행사변형의 한 변이 평행이 아닌 그림을 보여준다.) · 이상하게 생각한 이유를 말해 보자. 			5'	그림에서 생활 주변에서 평행사변형의 모양을 띠고 있는 것을 알아보도록 한다.						
		<ul style="list-style-type: none"> ● 공부할 문제 확인 <ul style="list-style-type: none"> · 오늘 배울 내용을 확인해 보자. 계단 모양의 사각형을 이해하고 그려 보자. ● 학습 방법 및 순서안내 <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20%;">활동 1</td> <td>계단 모양의 사각형 찾기</td> </tr> <tr> <td>활동 2</td> <td>계단 모양의 사각형들의 공통점 찾기</td> </tr> <tr> <td>활동 3</td> <td>계단 모양의 사각형 그려보기</td> </tr> </table> ● 활동하기 <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20%;">활동 1</td> <td>계단 모양의 사각형 찾기</td> </tr> </table> 			활동 1	계단 모양의 사각형 찾기	활동 2	계단 모양의 사각형들의 공통점 찾기	활동 3	계단 모양의 사각형 그려보기	활동 1	계단 모양의 사각형 찾기
활동 1	계단 모양의 사각형 찾기											
활동 2	계단 모양의 사각형들의 공통점 찾기											
활동 3	계단 모양의 사각형 그려보기											
활동 1	계단 모양의 사각형 찾기											
안내된 탐구 단계	개별/ 모둠	<ul style="list-style-type: none"> · (여러 모양의 사다리꼴을 가리키며) 다음 사다리꼴을 둘로 나누어 보자. 그렇게 나눈 이유를 말해보자. <ul style="list-style-type: none"> - (주어진 사각형을 각자의 생각에 따라 둘로 나누고 그 이유를 말한다.) - 각의 크기에 따라/변의 길이에 따라/마주 보는 변이 평행한 것에 따라/직각이 있는 것과 없는 것 · 지난 시간에 사각형 중에서 한 쌍의 마주 보는 변이 평행인 사각형을 사다리꼴이라고 한다는 것을 공부했는데, 오늘은 하나의 조건을 더 붙여 두 쌍의 마주 보는 변이 평행인 사각형을 찾아보자. <ul style="list-style-type: none"> - 마주 보는 두 쌍의 변이 평행인 사각형을 잘 찾는다. 			10'	다양한 생각을 수용한다.						
		<ul style="list-style-type: none"> 활동 2 계단 모양의 사각형들의 공통점 찾기 · 계단 모양의 사각형을 만들어보자. 어떤 방법이 있을까? <ul style="list-style-type: none"> - 각자의 생각을 발표한다. · 그림 여러분이 발표한 것처럼 계단모양의 사각형을 만들어 보자. 먼저 모눈종이 위에 그려보자. · 지오보드로 만들어 보자. · 색종이를 이용해서 만들어볼까? · 단 모양의 여러 사각형의 공통점을 찾아보자. 각의 크기와 변의 길이를 보면서 생각해 보자. <ul style="list-style-type: none"> - 변이 4개 있다/꼭짓점이 4개 있다/위, 아래의 변의 길이가 같다/세로의 변의 길이가 같다/마주 보는 변의 길이가 같다/마주 보는 각의 크기도 같다/마주 보는 변들이 평행하다. 				모눈종이, 지오보드, 자, 각도기, 가위 도형의 성질을 학생이 직접 찾도록 한다.						

학습 단계	학습 흐름	교수· 학습 활동	시간	자료 및 유의점		
명료화 단계	모둠/전체	·정말 그럴까? 어떻게 확인하면 좋을까? - 모눈종이 칸수를 세어본다/자와 각도기로 재어본다/접어본다/잘라 겹쳐본다. - 마주 보는 변의 길이가 같다/마주 보는 각의 크기가 같다. ·이렇게 두 쌍의 마주 보는 변이 평행인 사각형에 이름을 붙여보자. - 여러 가지 의견을 자유롭게 말한다.	7'	평행사변형 모형을 사전에 준비하여 학습의 흐름을 원활하게 한다.		
자유 탐구 단계	개별	·약속하기 - 마주 보는 두 쌍의 변이 서로 평행인 사각형을 '평행사변형'이라고 이름 붙이기를 약속한다. ·(마주 보는 두 쌍의 변이 서로 평행인 사각형을 붙이면서) 이런 평행사변형들의 공통점이 무엇일까? 모듬별의 의논하여 정리해서 발표해 볼까요? - 평행사변형의 마주보는 변의 길이가 같다. - 평행사변형의 마주보는 각의 크기가 같다.	8'			
		<table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 50%;">활동 3</td> <td style="width: 50%;">평행사변형 그려보기</td> </tr> </table>	활동 3	평행사변형 그려보기		
활동 3	평행사변형 그려보기					
		·모눈종이 위에 모양과 크기가 다른 평행사변형을 3개 이상 그려 보기/지오보드를 이용하여 주어진 사각형을 평행사변형으로 만들어 보기/한 변의 길이가 3cm인 평행사변형 그려 보기 - 자유롭게 여러 크기의 평행사변형을 그린다.		모눈종이, 지오보드, 자		
통합 단계	전체	● 학습내용 정리 ·(한 각의 크기가 120°이고 한 변의 길이가 5cm인 평행사변형을 제시하며) 평행사변형의 한 변의 길이와 나머지 한 각의 크기는 얼마인가? 왜 그럴까? - 각 $\angle C = 120^\circ$, 각 $\angle C = 60^\circ$, 변 $BC = 5cm$ ·다음에서 평행사변형에 해당하는 성질 카드를 찾아보자. ① 변이 4개 이다/② 각이 4개이다/③ 한 쌍의 마주 보는 변이 평행이다/④ 적어도 한 개의 각이 직각이다/⑤ 마주 보는 각의 크기가 같다/⑥ 모든 변의 길이가 같다. - ①, ②, ③, ⑤(함께 해당 여부에 대해 의논한다.) ● 차시예고	5'	도형 성질 카드		

르게 5명씩 한 모듬을 구성하여 두 모듬으로 나누고 수업에 들어가기 전 모듬 이름을 정하게 하여 모듬의 정체성을 심어 주고 모듬원끼리 협동하는 마음을 갖도록 하였다. 모듬별 구성은 명료화 단계에서의 모듬별 토의활동을 원활하게 하고 서로 다른 수준의 학생이 협력하여 활동함으로써 낮은 수준의 학생의 사고를 돕고 자칫 수준의 상대성이 유발할 수 있는 자신감 및 수학적 흥미의 상실을 막기 위해서이다. 매 차시 수업은 학생들의 기하 사고 수준 향상을 위한 여러 활동을 도입하여 van Hiele의 학습 단계에 맞게 진행하였다.

먼저, 질의 안내 단계에서는 본 주제에 관해 대화하고 활동하며 학습할 내용과 친숙해지게 하였다. 이 때 막연하게 언어만 사용하기 보다는 실생활과 관련된 구체물을 도입하여 낮은 기하 사고 수준의 학생들의 사고를 돕고 학습동기를 높이고자 하였다. 그리고 학생

들의 창의적 탐구능력을 최대한 발휘할 수 있도록 교과서에 나타난 '약속하기'→'약속한 것으로 생각하기'의 연역적 학습 흐름과는 달리 '여러 기하적 경험'→'약속하기'의 귀납적 학습과정으로 이끌어가고자 하여 그에 맞게 공부할 문제를 설정하였다.

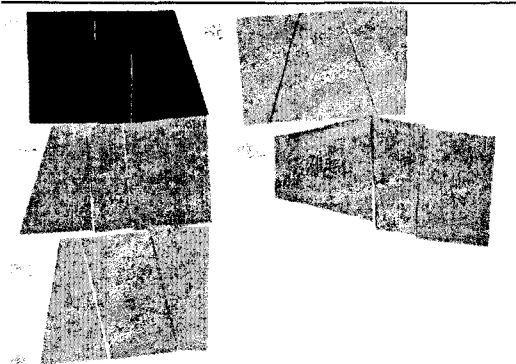
예를 들면 2차시 '평행사변형 알아보기'의 교과서에서 두 쌍의 마주 보는 변이 평행인 사각형을 찾아보는 활동을 한 후 충분한 탐색 없이 바로 약속하기를 통해 '마주 보는 두 쌍의 변이 서로 평행인 사각형을 평행사변형이라고 합니다'라고 평행사변형의 개념을 도입하는데 반해 본 교수-학습지도안에서는 먼저, 다양한 기하적 활동으로 평행사변형의 성질에 대하여 학생들 스스로 탐구할 기회를 충분히 갖게 한 후 이름을 붙여 보고 약속하기를 통해 평행사변형의 개념을 명료화시키는 귀납적 학습과정으로 전개해갔다. 그래서 공부할 문제도

기존의 '평행사변형에 대해 알아보기'가 아니라 '계단 모양의 사각형에 대해 알아보기'라고 설정하였다. 물론 '▭'에 대해 알아보기'라고 제시할 수도 있으나, 이 경우 또한 학생들의 평행사변형에 대한 제한된 개념이미지를 갖게 할 우려가 있어 전자의 방법을 따랐다.

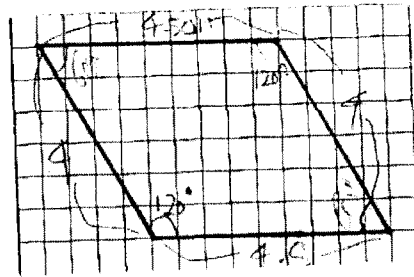
둘째, 안내된 탐구 단계에서는 학생들로 하여금 교사가 제공하는 자료를 다루면서 학습 주제에 관하여 탐구하도록 하였다. 교사는 학습 주제를 탐구하는 활동에 학생이 능동적으로 참여하도록 짧고 신중하게 계열화된 활동을 제시함으로써 형성해야 할 관계망의 주요한 연계를 집해보도록 하였다.

특히 도형을 제시할 때 수학적 다양성의 원리에 따라 학생들이 다양한 형태의 도형을 충분히 경험할 수 있도록 배려하였다. 교과서에 나타나는 도형의 제한된 개념이미지를 보완하기 위해 보다 다양한 형태의 도형을 제시하여 그 도형들 간의 공통적인 수학적 개념, 원리들을 학생들이 직접 찾을 수 있도록 하였다.

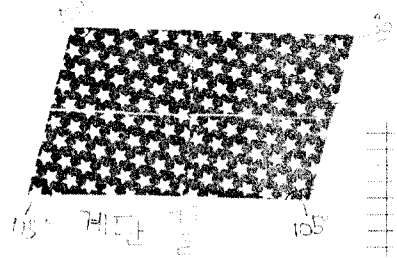
예컨대, '사다리꼴 알아보기'에서는 여러 모양의 사각형을 분류 기준에 따라 나누어보기, 가지고 있는 여러 도형 중에서 사다리 모양의 사각형 찾기, 모눈종이에 그려진 사다리 모양의 사각형을 색종이에 옮겨 잘라보기, 직사각형의 종이띠로 사다리 모양의 사각형 만들기(<그림 1>) 등의 활동을, '평행사변형 알아보기'에서는 여러 모양의 사다리꼴을 기준을 정하여 분류해 보기, 계단 모양 찾기, 모눈종이에 그려진 계단모양의 사각형을 색종이에 옮겨 잘라보기, 모눈종이 칸 수 세어보기, 자와 각도기로 재어보기(<그림 2>), 접어보기, 잘라 겹쳐보기 활동(<그림 3>)을 제시하였다.



<그림 1> 종이띠로 사다리모양의 사각형 만들기



<그림 2> 자와 각도기로 재어보기(S₂)



<그림 3> 잘라 겹쳐보기(S₃)

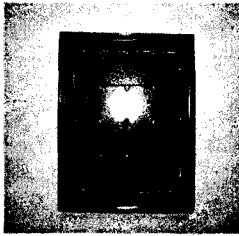
'마름모 알아보기'에서는 여러 모양의 평행사변형을 분류 기준을 정하여 나누어 보기, 가지고 있는 여러 도형 중에서 다이아몬드 모양의 사각형 찾기, 모눈종이에 그려보기/지오보드로 다이아몬드 모양의 사각형 만들어보기, 색종이를 두 번 접어 잘라서 만들어보기(<그림 4>), 성냥개비, 이쑤시개, 면봉, 나무젓가락, 빨대 등으로 마름모 만들어 보기, 다이아몬드 모양의 도형의 한 변에 수직인 직선을 그었을 때, 마주 보는 변이 그 수선과 만나서 생기는 각의 크기 알아보기 등의 활동을 제시하였다.



<그림 4> 색종이를 두 번 접어 잘라서 다이아몬드 모양의 사각형 만들기

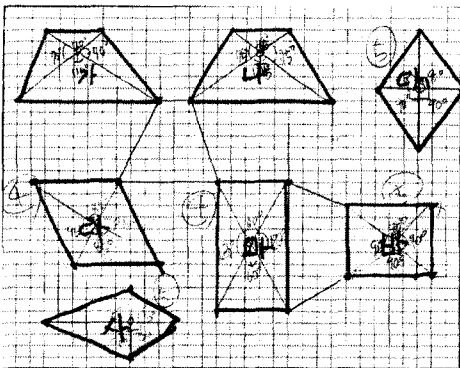
'직사각형과 정사각형 알아보기'에서는 여러 모양의 사각형을 분류 기준을 정하여 나누어보기, 직사각형과 정사각형 찾기, 지오보드로 만들기(<그림 5>), 모눈종

이에 그려보기, 삼각자를 이용하여 직사각형의 성질 찾기, 직사각형과 평행사변형, 사다리꼴의 관계 알아보기, 정사각형의 성질 찾기, 정사각형과 직사각형, 마름모와 관계 알아보기 등의 활동을, '다가형과 정다가형 알아보기'에서는 다양한 모양의 도형을 분류 기준을 정하여 나누어 보기, 선분으로 둘러싸인 도형 찾기, 선분으로 둘러싸인 도형을 분류 기준을 정하여 나누어 보기, 모눈종이에 선분으로 둘러싸인 도형 그려보기, 지오보드로 선분으로 둘러싸인 도형 만들어 보기, 색종이를 잘라서 만들어 보기, 빨대, 면봉, 성냥개비로 만들어 보기 등의 활동을 제시하였다.



<그림 5> 지오보드로 만들기(S₅)

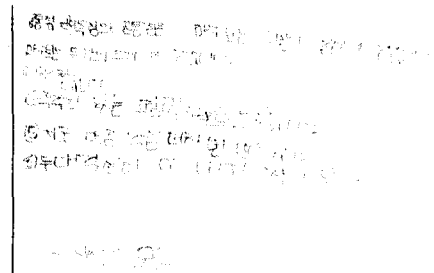
그리고 '대각선 알아보기'에서는 모눈종이의 임의의 점을 연결하여 다각형 만들기, 각 다각형마다 이웃하지 않는 두 꼭짓점을 선분으로 이어보고 선분의 개수 알아보기, 그리고 여러 사각형의 이웃하지 않는 두 꼭짓점을 이은 선분들의 성질 알아보기 위한 활동으로 실이나 자를 이용하여 길이 비교하기, 각도기를 이용하여 각의 크기 확인하기(<그림 6>) 등의 활동을 제시하였다.



<그림 6> 사각형의 대각선에 대한 성질알기(S₆)

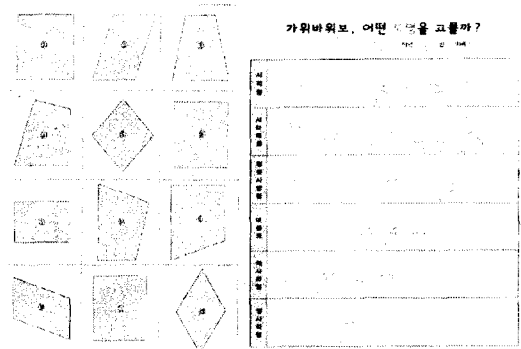
셋째, 명료화 단계에서는 전 단계에서 경험하고 관찰한 사항에 대해 모둠원간에 서로 토의하여 발표하게

하였다. 학생은 정확하고 적절한 언어를 사용하면서 자신의 의견을 개념화하고 제안하며, 이 때 교사의 역할은 적절한 수학적 용어를 도입하는 정도로 아주 미미하며 학생의 토론을 지켜보며 특별한 설명은 하지 않았다. 예를 들면, '평행사변형 알아보기'에서 학생들로 하여금 전 단계에서 탐구한 다이아몬드 모양의 사각형의 공통점을 떠올려 이름을 붙여 보게 하고 약속하기를 통해 평행사변형의 개념을 확인한 후, 발견한 평행사변형의 성질에 대해 모둠원 간에 서로 토의하여 발표하게 하여 평행사변형에 대한 사고 관련체계를 명확하게 하였다. <그림 7>은 안내된 탐구 단계에서 발견한 평행사변형의 성질을 각 모둠원 간에 서로 토의하여 정리한 것이다. "직각이 있는 평행사변형도 있다"는 사실을 발견한데 주목할 필요가 있다.



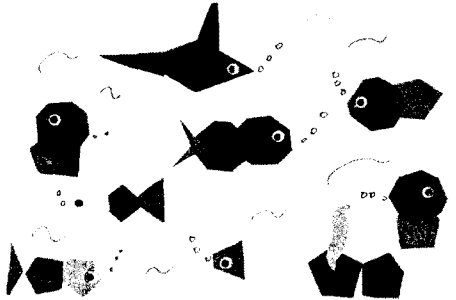
<그림 7> 모둠별 토의 내용 정리

넷째, 자유 탐구 단계에서는 안내된 탐구 단계보다 복잡한 과제를 제시하여 학생이 배운 지식을 종합적으로 적용해 보게 하였다. 예로, '직사각형과 정사각형 알아보기'에서 <그림 8>과 같은 놀이(조성실, 2007)를 통해 사각형의 개념 및 사각형의 관계에 대한 이해를 확실히 하려고 하였다.



<그림 8> 놀이로 여러 사각형의 관계 익히기(S₁₀)

‘다각형과 정다각형 알아보기’에서는 다각형의 이름이나 성질을 듣고 해당되는 그림 카드 빨리 잡기 놀이나 이전의 안내된 탐구 단계에서의 색종이로 여러 다각형 만들어보기 활동결과물을 보충하여 주제에 맞게 꾸미기 활동(<그림 9>)을 하였다.

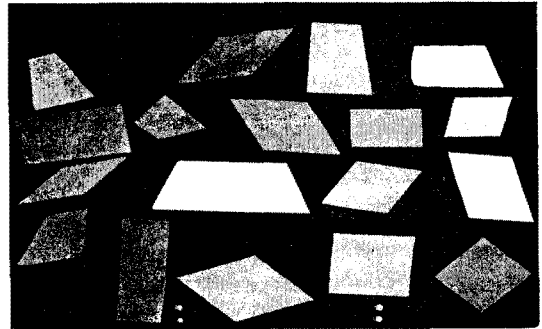


<그림 9> 다각형으로 주제에 맞게 꾸미기

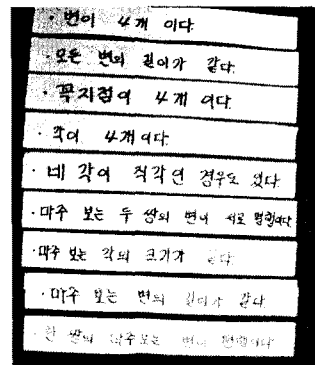
그리고 이 단계에서 주어진 학습과제를 해결한 학생들은 남은 시간에 패턴 블록으로 모양꾸미기, 소마 큐브를 다양한 위치에서 보고 그 모양 그리기, 여러 가지 도형 퍼즐 맞추기를 하며 학습속도를 조절하였다. 준비된 여러 수학교구의 활용 방법에 대한 간단한 안내 후 일정한 규제 없이 학생들에게 자유로운 사용을 허락하였더니 1차시에는 처음 접하는 낯설에서 그냥 이것저것 탐색하는 정도로 그쳤으나 2, 3, 4, 5, 6차시 시간이 경과할수록 점차 그 활용정도가 높아지고 흥미로워하였다. 빠른 시간 내에 소마큐브의 각 조각을 맞추어 정육면체를 완성하기까지 하였다.

마지막으로 통합단계에서는 학생들 스스로 경험한 지금까지의 단계를 종합하고 음미하게 하였다. 예로 ‘사다리꼴 알아보기’의 통합단계에서는 모듈별로 여러 도형을 나눠주고 <그림 10>처럼 학생들에게 사다리꼴을 2개씩 골라 붙여보게 한 후 전체 학생들과 함께 그렇게 생각하는 이유를 확인하였다. 교과서 ‘약속하기’에 제시된 등변사다리꼴, 직각사다리꼴, 평행사변형 모양뿐만 아니라 마름모, 직사각형, 정사각형의 모양의 모형도 준비하여 학생들의 기하적 사고의 폭을 넓힐 수 있도록 하였다.

그리고 ‘마름모 알아보기’에서는 마름모에 해당되는 성질카드를 학생들 스스로 찾아 용판에 붙여 보는 활동(<그림 11>)으로 마름모의 성질을 요약, 정리하게 하였다.



<그림 10> 사다리꼴 찾아 붙이기



<그림 11> 마름모에 관한 성질카드 찾아 붙이기

V. 연구 결과

본 연구에서 개발한 교수-학습 지도안을 적용하여 수업을 실시한 후 연구 대상 10명에게 기하 사고 수준 검사를 실시한 결과, 그들의 수준 변화는 <표 4>와 같다.

<표 4> 연구 대상의 기하 사고 수준의 변화

학생	수업 전	수업 후
S ₁	제0수준	제0수준
S ₂	제0수준	제1수준
S ₃	제0수준	제1수준
S ₄	제0수준	제1수준
S ₅	제1수준	제2수준
S ₆	제1수준	제3수준
S ₇	제2수준	제2수준
S ₈	제2수준	제1수준
S ₉	제3수준	제3수준
S ₁₀	제3수준	제3수준

<표 4>에서 보듯이 전반적으로 학생들의 기하 사고 수준이 향상되었음을 확인할 수 있다. S₂, S₃, S₄, S₅는 사전 검사결과 보다 한 수준씩 향상되었고, S₆은 제1수준에서 제3수준으로 크게 향상되었다. S₁은 여전히 제0수준에 머물렀고, S₇은 제2수준을, S₉와 S₁₀은 제3수준을 유지한 반면, S₈의 경우는 제2수준에서 제1수준으로 하락하였다. 개별 면담을 통해 파악한 바로는, S₈이 학원 수강에도 불구하고 도형에 대한 불완전한 개념 이해와 더불어 검사에 대한 거부감과 신증함의 부족 등 정서적인 요인에서 비롯된 것으로 보인다.

따라서 본 연구자가 개발한 van Hiele 이론에 근거한 교수-학습 지도안의 적용은 특히 낮은 수준에 있는 학생들의 기하 사고 수준의 변화에 긍정적인 영향을 미쳤다고 할 수 있다. 실제 수업 분석 결과는 다음과 같다.

첫째, 기하 사고 수준 검사에서 나타난 학생들의 수학적 다양성의 원리에 대한 불충분한 경험은 학습과정에서도 같은 양상을 보였다. 예를 들면, '사다리꼴 알아보기'의 안내된 탐구 단계에서, 직사각형 모양의 종이 띠를 잘라서 사다리꼴 모양의 사각형을 만들기를 할 때, 만든 도형들의 공통점을 찾아보게 한 후 종이에 붙여 보게 하였더니 대부분이 평행한 두 변을 종이 아래변에 평행하게 붙여 놓는 것(<그림 1>)을 볼 수 있었다. 이러한 현상은 모양과 방향의 변화에 대한 학생들의 사고가 유연하지 못함을 보여준다.

이를 보완하기 위해 도형을 제시할 때 의도적으로 그 위치나 모양에 변화를 주었다. 처음에는 도형을 파악하는데 어려움을 느끼고 어색해하더니 점차 익숙해지고 학생들 스스로도 모눈종이에 도형을 그릴 때나 도형을 붙일 때 모양이나 위치변화를 시도하는 모습을 보이기도 하였다(<그림 12>). 그러나 전형적인 예에서 크게 벗어나지 못하고, 일정 시간 경과 후에는 되돌아오는 경향을 보여 교사의 지속적인 지도가 필요함이 확인되었다.

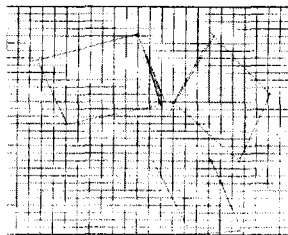
둘째, 선분, 변, 변의 길이, 각, 각의 크기, 수선, 수

직, 평행 등과 같은 도형에 관한 기본적인 개념이나 용어를 정확하게 사용하고 있지 않았다. 예를 들어 '두 쌍의 마주 보는 변이 서로 평행하다'를 알아보는 탐구 활동에 있어서도 수직과 수선, 평행의 개념을 혼동하여 사용하였다. 개념이나 용어의 부정확한 사용은 도형의 개념 파악과 문제 해결에 장애를 가져올 수 있다. 주로 사고 수준이 낮은 학생뿐만 아니라 높은 학생에게도 나타나는 이러한 문제로 인해 부적절한 용어 사용은 기본적인 개념에 대한 부정확한 이해로 이어졌다.

셋째, 특히 사고 수준이 낮은 학생들에게서 드러나는 문제로 자, 각도기, 모눈종이 사용의 미숙함을 들 수 있다. 평행사변형의 성질을 알아보기 위해 직접 각의 크기를 측정해 보는 활동(<그림 2>)에서 S₂는 각도기의 중심에 꼭짓점을 놓고 각도기의 여러 숫자 중 어떤 것을 읽어야 할지 몰라 교사에게 도움을 요청해 왔다. 그래서 각의 크기를 읽을 때 90°보다 작으면 아래의 숫자를 읽고, 90°보다 크면 위의 숫자를 읽는다고 도움을 주었다. 물론 교사용 지도서 수학 4-가에 의하면 각도를 읽을 때 '각의 기선이 오른쪽에 있으면 오른쪽에서 왼쪽으로 매긴 숫자, 즉 아래의 숫자를 읽고 각의 기선이 왼쪽에 있으면 왼쪽에서 오른쪽으로 매긴 숫자, 즉 위의 숫자를 읽는다'라고 되어 있으나 본 연구자는 학생의 이해를 쉽게 하기 위해 전자의 방법을 선택해서 지도하였다. 또한 모눈종이를 이용한 활동에서 안내선 사용에 있어 미숙하다거나 자를 이용하지 않고 도형을 그리는 등의 활동에서 세심한 지도가 요구되었고 마름모와 직사각형 및 정사각형의 마주 보는 변이 평행인지를 확인하기 위해 삼각자를 사용하는 데도 서툴러 교사의 개별적 지도가 있었다.

넷째, 사고 수준이 낮은 학생들에게 자신의 수준보다 높은 수준의 과제가 주어졌을 때 어려움을 보여 한 단계 한 단계 구체적인 설명과 함께 시범을 보여 이해를 도왔다.

예를 들면 '평행사변형 알아보기'의 잘라 접쳐보기 활동에서 대부분의 학생들이 자르는 부분을 찾아 순조롭게 활동을 이어가고 있었는데, 제0수준의 S₁은 어디를 어떻게 잘라야 하는지 망설이고 있었다. 같은 모둠원이 해결해 가는 모습을 보며 계속 시도를 하였지만 여의치 않아 교사가 S₁과 함께 차례대로 계단 모양의 사각형에 선 긋기, 선을 따라 잘라 나누어진 두 삼각형을 포개어 보고, 완전히 접쳐지는지, 어느 변과 어느



<그림 12> 모눈종이에 여러 가지 평행사변형 그리기(S₃)

변이 겹쳐지는지, 변의 길이는 어떠한지, 두 각의 크기는 어떠한지 살펴보고 나머지 한 계단 모양의 사각형도 똑같은 방법으로 해 보게 하여 평행사변형의 성질을 이해하도록 도왔다. 그러나 S_1 의 사후 검사 결과, 평행사변형의 성질을 묻는 문항 9번과 문항 12번에서 실패로 나타났고, 다만 문항 5번의 평행사변형 찾기에서는 사전 검사 때와 달리 성공을 보여 비록 제0수준에 그대로 머물렀지만 부분적인 향상이 있었음을 확인할 수 있다.

다섯째, 사고 수준이 낮은 학생은 과제 해결의 어려움을 교사의 도움뿐만 아니라 모둠원과의 적절한 상호작용을 통해 해결하였다. 예를 들면 '마름모 알아보기'의 '색종이를 두 번 접어 가위로 오려서 네 변의 길이가 같은 도형 만들기(<그림 4>)' 과제 수행시 S_3 은 2장의 색종이를 사용했는데도 매번 잘못되어 결국 같은 모듬원 친구에게 도움을 요청해 해결하였다. 반면 S_5 는 두 번 접어 자르는 과정에서 자른 부분을 잘못 잘라 색종이를 하나 더 사용하여 다시 시도하여 마침내 성공할 수 있었다.

여섯째, 학생들은 안내된 탐구와 자유 탐구 단계에서의 사고 수준 향상을 위한 다양한 기하 활동에 관심을 갖고 흥미롭게 참여하였다. '직사각형과 정사각형 알아보기'의 자유 탐구단계에서 <그림 8>과 같은 놀이를 통해 사각형의 개념 및 사각형의 관계에 대한 이해를 확실히 하려고 하였다. S_{10} 은 사각형의 관계를 바르게 파악하고 있지만 S_1 는 불완전하였다.

일곱째, 명료화 단계에서는 안내된 탐구 단계에서 경험하고 관찰한 사항에 대해 모듬원끼리 토의하여 발표하게 하였다. 평행사변형의 성질에 대하여 각 모듬원끼리 서로 토의하여 정리한 내용(<그림 7>) 중 '두 대각선이 만나면 직각이다'에 주목할 필요가 있다. 학생들의 평행사변형에 대한 잘못된 개념 이미지 즉 교과서에 제시된 가장 일반적인 모양에만 고착되지 않도록 의도적으로 모양과 방향에 변화를 주어 제시하였는데, 이 모듬원은 평행사변형의 특수형태인 마름모의 성질을 평행사변형의 일반 성질로 간주하였다. 그래서 반례를 들어 모든 평행사변형의 두 대각선이 수직으로 만나는 것이 아님을 설명하고 '어떤 평행사변형의 두 대각선은 수직으로 만난다', 또는 '두 대각선이 이루는 각이 직각인 평행사변형도 있다'라고 수정해서 말하도록 하였다. 한편 정리한 내용 중 '직각이 있는 평행사

변형도 있다'에 대해서는 사각형의 관계에 대한 이해를 보여주는 경우이므로 칭찬을 해주었고, 그 의견을 제시한 S_6 은 이후 학습에서도 지속적인 자신감과 흥미를 가지고 능동적으로 활동하는 것을 볼 수 있었다. 사고 수준 검사 결과 학생 S_6 은 제1수준에서 제3수준으로 크게 향상한 것을 확인할 수 있었다.

VI. 결론

본 연구에서는 van Hiele 이론에 근거하여 학습 5단계에 따른 교수-학습 지도안을 개발, 적용함으로써 기하 사고 수준이 제0~3수준에 해당하는 연구 대상 10명의 수준 변화를 알아보았다. 연구 대상인 4학년의 교과서 내용은 제2, 3수준에 해당되는 반면, 기하적 사고 수준 검사 결과는 제0, 1수준이 50%를 차지하고 있어 이들 학생들의 기하 사고 수준 향상을 위한 도형지도가 필요함을 시사하였다. 사후 검사 결과, 한 명을 제외한 제0수준의 학생 3명은 모두 제1수준으로, 제1수준의 학생 2명은 각각 제2수준, 제3수준으로 향상되었으며, 제2수준 및 제3수준의 학생은 한 수준 낮아진 한 명을 제외하고는 모두 자기 수준을 유지하여 본 연구자가 개발한 van Hiele 이론에 근거한 교수-학습 지도안이 특히 낮은 수준에 있는 학생들의 기하 사고 수준의 변화에 긍정적인 영향을 미친 것을 확인할 수 있었다. 본 연구에서는 기하 사고 수준이 낮은 학생을 고려하여 지오보드를 활용해 만들어 보거나 빨대나 면봉으로 만들어 보기 및 놀이를 통해 익히기 등의 다양한 기하 활동을 제시함으로써 도형에 대한 개념을 학생 스스로 구성할 수 있게 하며 자칫 사고 수준이 낮은 학생들에게 나타날 수 있는 수학이 주는 좌절감이나 불안감을 감소시키고 학습의 흥미와 관심을 유도하였기 때문인 것으로 파악된다. 적용한 수업은 다양한 기하적 경험을 할 수 있는 구체적 활동과 모듬원간의 상호작용을 강조한 수업으로서 언어 중심, 교사 중심, 연역적 체계에 바탕을 둔 수업이 아니라 활동중심, 학생 중심, 탐구과정 중심, 귀납적 방식의 수업 특성이 학생들의 사고 수준 향상에 긍정적인 영향을 미쳤다고 할 수 있다. 실제 수업을 통해 학생의 수준 파악 및 교재연구와 자료 제작 등 수업준비에서부터 직접 지도 및 반성을 통한 개선방안을 찾아 학생들의 사고 수준을 향상시키기까지 교사의 많은 노력과 수고가 필요하

다는 것을 확인할 수 있었다. 특히 학생들의 사고 수준 향상을 위한 지도는 학생들의 수준에 맞게 이루어져야 한다. 본 연구의 수업 분석에서 색종이로 여러 다각형을 오리는 활동 시 삼각형과 사각형에만 집착한 S₂와 같이 상대적으로 쉬운 활동이라 할지라도 수준이 낮은 학생들은 대체로 활동에 미숙함을 보였으며 그때마다 적절한 교사 또는 동료의 도움이 있어야 다음 활동으로 이어질 수 있음이 확인되었다.

참 고 문 헌

- 김덕수 (2007). van Hiele 수준이론의 고찰과 GSP를 활용한 수업에서의 수준변화 연구. 한국의국어대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 김복자 (2000). 사고 수준을 고려한 도형 영역의 교수 학습 효과 분석. 부산교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 김선렬 (1992). 국민학교 기하학습에 van Hiele 이론의 적용을 위한 연구. 한국교원대학교대학원 석사학위 논문.
- 김원덕 (2007). 탐구학습을 위한 교과서 재구성에 관한 소고 : 초등학교 4학년을 중심으로. 광주교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 김자경 (2005). van Hiele의 기하 학습 사고 수준 이론을 적용한 도형 학습이 합동 변화의 이해력과 기하 수준 변화에 미치는 영향. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 김현미 (1999). 반 힐레 이론에 근거한 초등학교 도형 지도. 인천교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 류성립 (2000). 수학적 사고력 신장을 위한 도형 영역의 교수·학습 자료 개발에 관한 연구. 대구교육대학교 과학·수학 교육연구소.
- 백은자 (2006). 초등수학에서 유시스킨의 반 힐레 수준 검사지의 문제점 분석 및 개선 연구. 전주교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 양규모 (2002). van Hiele 이론에 근거한 도형학습 수준 분석과 자료 개발에 관한 연구. 부산교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 이길섭 (2004). 초등학교 기하학습 향상을 위한 지도방안의 개발과 적용에 관한 연구. 전주교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 이민호 (2005). van Hiele의 수준이론을 이용한 도형영역의 효과적인 지도방안에 관한 연구. 국민대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 조성실 (2007). 즐거움 수학 시간 만들기. 서울: 우리교육.
- van Hiele, P. M.(1986). *Structure and insight -A theory of mathematics education*. Academic press, Inc.

A Study on Teaching Figures Based on van Hiele's Theory - Focused on the 4th Graders -

Seo, Eunyong

Tong-young Elementary school

E-mail : skyish3h@chollian.net

Chang, Hyewon

Department of Mathematics Education, Chinju National University of Education,

E-mail : hwchang@cue.ac.kr

The purpose of this study is to develop a teaching program in consideration of the geometrical thinking levels of students to make a contribution to teaching figures effectively. To do this, we checked the geometrical thinking levels of fourth-graders, developed a teaching program based on van Hiele's theory, and investigated its effect on their geometrical thinking levels.

The teaching program based on van Hiele's theory put emphasis on group member interaction and specific activities through offering various geometrical experiences. It contributed to actualizing activity-centered, student-oriented, inquiry-oriented and inductive instruction instead of sticking to expository, teacher-led and deductive instruction. And it consequently served to improving their geometrical thinking levels, even though some students didn't show any improvement and one student was rather degraded in that regard - but in the former case they made partial progress though there was little marked improvement, and in the latter case she needs to be considered in relation to her affective aspects above all.

The findings of the study suggest that individual variances in thinking level should be recognized by teachers. Students who are at a lower level should be given easier tasks, and more challenging tasks should be assigned to those who are at an intermediate level in order for them to have a positive self-concept about mathematics learning and ultimately to foster their thinking levels.

* ZDM Classification: D62

* 2000 Mathematics Subject Classification: 97C40

* Key Words: geometrical thinking levels, van Hiele's theory, teaching and learning figures