

# Rijke 관에서 나선형 가열기에 의한 열음향 파워의 생성

## Thermoacoustic Power Generation by a Spiral Heater in the Rijke Tube

권 영 필\*  
(Youngpil Kwon\*)

\*송실대학교 기계공학과

(접수일자: 2010년 7월 30일; 수정일자: 2010년 10월 11일; 채택일자: 2010년 11월 9일)

Rijke관에 놓인 나선형 가열기에 의하여 생성되는 열음향 파워를 수치해로 구하였다. 음장의 각진동수와 공기의 열확산계수에 의하여 무차원화한 가열선의 지름  $d$ , 간격  $P-d$  및 유속  $U_0$ 가 음향 파워 생성에 미치는 영향을 구하고 고찰하였다. 가열선 간격이 충분히 클 때 무차원 유속이  $U_0 \approx 0.8$ , 무차원 지름이  $d \approx 4$ 일 때 가장 큰 열음향파워가 생성된다. 그러나 가열선 사이의 간격이 가까워지면 음향 파워 생성이 크게 증가하며  $d \approx 2$ ,  $P-d \approx 3$ 에서 최대로 되며, 간격이 충분히 먼 경우의 최대값의 5배 이상이 될 수 있다. 최대 음향파워를 생성하는 유속은 가열선 간격에 관계없이  $U_0 \approx 0.8$  일 때이다.

**핵심용어:** Rijke, 열음향, 가열기, 열전달, 수치해석

**투고분야:** 물리음향 및 광음향 분야 (9)

Thermoacoustic power generation by a spiral heater in the Rijke tube was analyzed numerically. In the analysis, variables were normalized by the angular frequency of the sound and the thermal diffusivity of the air. The effect of the heater wire diameter  $d$ , the spacing between wires  $P-d$ , and the air-current velocity  $U_0$ , upon the power generation was obtained and discussed. When the spacing is broad enough, the normalized velocity is  $U_0 \approx 0.8$  and the diameter is  $d \approx 4$  for the maximum power generation. With decrease of the spacing, however, the power generation increases more than 5 times and becomes maximum around  $d \approx 2$ ,  $P-d \approx 3$ . And the velocity  $U_0 \approx 0.8$  for the maximum power generation is almost independent of the wire spacing.

**Keywords:** Rijke, Thermoacoustic, Heater, Heat Transfer, Numerical Analysis

**ASK subject classification:** Physical Acoustics and Photo-Acoustics (9)

### I. 서론

열음향은 주기적인 열공급에 의하여 생성되는 음향현상을 말하며 대표적인 예로서 Rijke관에서의 기주진동을 들 수 있다. 기주진동은 외란에 의하여 형성된 기주의 길이방향 고유 음향모드가 가열에 의하여 증폭되어 나타나는 현상이다. 주기적인 가열에 의한 음향 파워의 생성조건은 가열기 주위의 음압이 높을 때 가열되고 낮을 때 냉각되어야 하며 이는 Rayleigh 조건 [1]으로 알려져 있다. Kwon과 Lee [2]는 이러한 열음향현상에 의한 기주

진동의 발생조건의 이론모델을 세우고 Fig. 1과 같은 1개의 나선형 전열기를 장착한 기주에 대하여 음향진동의 발생조건을 구하고 실험과 비교, 고찰한 바 있다. 음장의 각진동수와 공기의 열확산계수로 무차원화한 가열선의 지름과 기류의 속도를 매개변수로 할 때 무차원 유속과 반지름이 각각 약 1 근처에서 최대의 음향 파워가 생성됨을 밝혔다. 그러나 나선형 가열기의 열선 사이 간격이 무한히 크다고 가정하여 해석하였기 때문에 간격의 영향을 구하지 못하였다. 따라서 본 연구는 나선형 가열기에 의한 Rijke 진동에 대하여 열음향 파워의 생성을 구하여, 열선 사이의 간격의 영향을 파악하고자 한 것이다. 일정 유속의 기류에 음장이 중첩된 유동에 의한 비정상 대류열전달 방정식을, 시간평균 유동 및 온도장에 대한

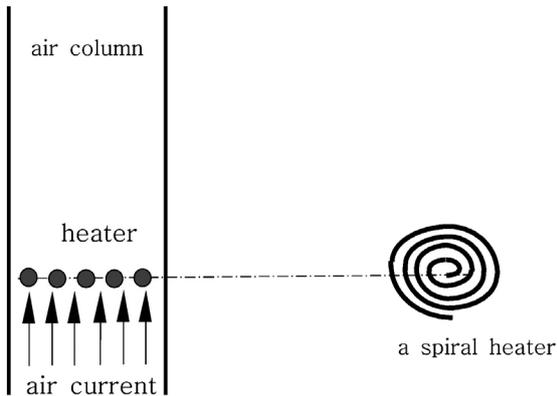


그림 1. 나선형 가열기를 장착한 Rijke관  
Fig. 1. Rijke tube with a spiral heater.

정상상태방정식과 음향성분에 대한 1차 섭동 방정식으로 분리하여 수치해를 구하였다 [3]. 정상상태 및 선형 섭동 방정식을 풀어서 열전달률 및 열음향파워를 계산하고 가열선의 지름, 사이 간격 및 기류의 속도의 영향을 구하고 고찰하였다.

## II. 수치모델

Rijke관에서 기주진동을 야기하는 기류의 속도는 매우 느리기 때문에, 가열선 주위의 경계층 유동은 층류로서 와류의 박리가 일어나지 않는 영역으로 볼 수 있다. 따라서 가열기를 기주의 중심축을 포함하는 평면으로 자르면 Fig. 2와 같이 직교하는 유동에 놓인 1렬 관군에 의한 열 전달과 같아진다. 그림에서 z축은 기주의 축방향을 나타내고 y방향은 열선의 배열 방향을 나타낸다. 열선 사이의 간격이 일정하고, 가열기로 유입되는 상층 기류가 균일하다고 한다면 각 열선에 대한 경계조건은 동일하다고 볼 수 있으므로 해석 영역은 그림과 같이 압축된다. 또한 기주가 양단이 개방된 경우, 기주의 기본 음향모드의 파장은 기주 높이의 2배가 된다. 따라서 열선의 지름은 일반적으로 음장의 파장에 비하여 충분히 작으므로 유동장은 비압축성 유체로 보고 해석할 수 있다.

따라서 본 과제는 비압축성 층류유동에 의한 1렬 관군의 대류열전달 응답을 구하는 문제가 된다. 먼저 길이, 속도, 온도 등의 변수는 다음과 같이 무차원화 하였다.

$$r = r' / (\alpha/\omega)^{1/2} \tag{1a}$$

$$u = u' / (\alpha\omega)^{1/2} \tag{1b}$$

$$T \equiv \frac{T' - T'_\infty}{T_s - T'_\infty} \tag{1c}$$

식에서  $\omega$ 는 음장의 각진동수,  $\alpha$ 는 공기의 열확산계수를 나타낸다. 길이의 무차원 스케일  $(\alpha/\omega)^{1/2}$ 는 음향열확산거리에 해당하며, 유속 스케일  $(\alpha\omega)^{1/2}$ 는 음향열확산속도에 해당한다. 또한 온도  $T'_s$ 는 열선의 표면온도,  $T'_\infty$ 는 가열선으로 유입되는 기류의 온도를 나타낸다.

극좌표계를 이용하여 연속방정식, 와도확산방정식 및 에너지방정식을 무차원 방정식으로 표현하면 다음과 같다 [3,4].

$$\nabla^2 \psi = -\zeta \tag{2a}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(v, \zeta)}{\partial(r, \theta)} = \text{Pr} \nabla^2 \zeta \tag{2b}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(v, T)}{\partial(r, \theta)} = \nabla^2 T \tag{2c}$$

식에서 Pr은 공기의 Prandtl수를 뜻하며 Pr=0.72를 사용했다. 또한 식에서  $v_r, v_\theta$  및  $\psi$ 는 각각 유속과 유동함수로서  $v_r = -\frac{\partial \psi}{r \partial \theta}, v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$ 의 관계를 가지며,  $\zeta$ 는 와도 (vorticity)로서  $\zeta = \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} - \frac{\partial r v_\theta}{r \partial r}$ 를 뜻한다. 그리고 식에서 연산자는 다음과 같이 정의된 것이다.

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial}{r \partial r} \left( \frac{r \partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \tag{3a}$$

$$\frac{\partial(v, \phi)}{\partial(r, \theta)} \equiv \frac{\partial(rv_r \phi)}{r \partial r} + \frac{\partial(v_\theta \phi)}{r \partial \theta} \tag{3b}$$

가열기로 유입되는 기류는, 시간에 따라서 변화가 없는 기류에 정현파 음장이 중첩된 것이므로, 정상유동과 주기적인 유동의 합으로 놓으면

$$U_\infty = U_0 + U_1 e^{it} \tag{4}$$

여기서  $U_0$ 는 정상상태 기류속도,  $U_1$ 는 음장의 입자속도의 진폭,  $i = \sqrt{-1}$ 을 나타내며, 무차원 시간  $t$ 는 시간을 각진동수로 무차원화한  $t = \omega t'$ 를 나타낸다. 입자속도 진폭  $U_1$ 은 기류속도  $U_0$ 보다 충분히 작은 섭동량이라고 할 수 있으므로 다른 변수들도 정상상태 성분과 주기적인 성분으로 분리하여  $\psi = \psi_0 + \psi_1 e^{it}, \zeta = \zeta_0 + \zeta_1 e^{it}$  및  $T = T_0 + T_1 e^{it}$ 로 놓을 수 있다. 이들 변수를 식 (2)에 대입하여 정상상태 성분에 대한 방정식과 주기적인 음향성분에 대한 섭동방정식으로 분리하면, 정상상태에 대하여

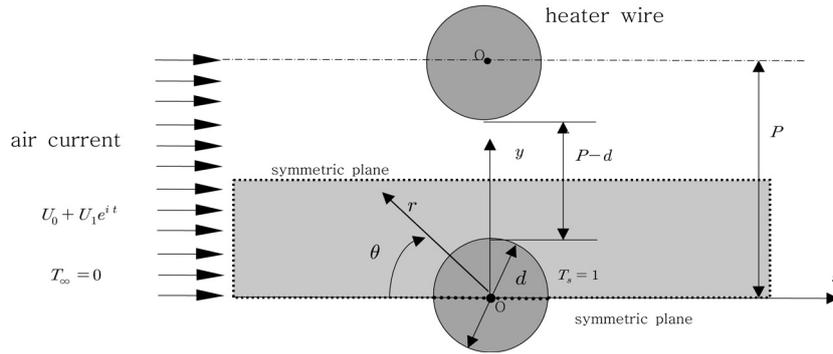


그림 2. 해석영역과 경계조건  
Fig. 2. Solution domain and boundary conditions.

$$\nabla^2 \psi_0 = -\zeta_0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial(v_0, \zeta_0)}{\partial(r, \theta)} = \text{Pr} \nabla^2 \zeta_0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial(v_0, T_0)}{\partial(r, \theta)} = \nabla^2 T_0 \quad (7)$$

음향 성분의 복소진폭에 대하여

$$\nabla^2 \psi_1 = -\zeta_1 \quad (8)$$

$$i\zeta_1 + \frac{\partial(v_1, \zeta_0)}{\partial(r, \theta)} + \frac{\partial(v, \zeta_1)}{\partial(r, \theta)} = \text{Pr} \nabla^2 \zeta_1 \quad (9)$$

$$iT_1 + \frac{\partial(v_1, T_0)}{\partial(r, \theta)} + \frac{\partial(v_0, T_1)}{\partial(r, \theta)} = \nabla^2 T_1 \quad (10)$$

경계조건은 원통의 표면에서 비활조건,  $\psi_0 = \psi_1 = 0$  과 등온조건  $T_0 = 1, T_1 = 0$ , 대칭면에서는  $\frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{\partial T_1}{\partial y} = 0$  및  $\zeta_0 = \zeta_1 = 0$ 로 놓을 수 있다.

방정식을 풀면 열선 표면에서 무차원 열전달률인 Nusselt수를 다음 식으로 구할 수 있다.

$$N_0 = -\frac{\partial T_0}{\partial r} \Big|_{r=d/2} \quad (11a)$$

$$N_1 = -\frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=d/2} \quad (11b)$$

열음향 파워의 생성은 다음 식으로 구할 수 있다 [5].

$$W' = \frac{(\kappa - 1)q_0'}{2\kappa p_0'(\omega\alpha)^{1/2}} \text{Real}(-iE_{ff}p_1' \widetilde{U}_1') \quad (12)$$

여기서  $W'$ 는 음향 파워,  $\kappa$ 는 공기의 비열비 (=정압비열/정적비열),  $p_0'$ 는 대기압,  $p_1'$ 은 가열기 주변에서 음압

의 복소진폭,  $q_0'$ 는 가열기에 의한 정상상태 열전달률을 나타내고,  $\sim$ 는 켈레복소수를 뜻하며, Real는 실수값을 나타낸다. 또한 식에서  $E_{ff}$ 는 가열기의 열전달응답과 관련된 효율계수로서 다음 식으로 정의된 것이다.

$$E_{ff} = \text{Real}\left(\frac{iNu_1/N_0}{U_1}\right) \quad (13)$$

주어진 음장에서 동일한 가열량에 대한 음향파워의 생성은 효율계수에 비례한다.

### III. 수치해석

위의 지배방정식과 경계조건으로부터 유동장과 온도장을 구하기 위하여 유한차분법을 사용하여 수치계산을 수행하였다. 4각형 요소로 분할하여 각 요소에 대하여 차분식을 적용하고 수치프로그램을 작성하였다. 원주방향 및 반경방향으로 절점의 수는 각각 최대 200개 (전체 요소수 40000개 이내)로 하였다. 계산의 신뢰성은 반복 오차  $10^{-4}$  이하 및 사이간격이 충분히 먼 경우에 대한 기준 열전달관계식으로 검증하였다. 레이놀즈 (Reynolds) 수  $\text{Re} = dU_0/\text{Pr}$ 가 작은 경우는  $P/d$ 가 200이상이 되어야 간섭을 무시할 수 있으며,  $\text{Re}$ 가 20으로 커지면  $P/d$ 는 20정도에서 간격의 영향을 무시할 수 있는 것을 알 수 있었다. 사이간격이 충분히 멀면, 단일 원통이 기류에 수직으로 놓인 경우와 같다고 할 수 있으며, 이 경우에 대한 대류열전달 관계식에는 두 식이 알려져 있다 [6]. 그림 3에서 보듯이 단일 원통의 경우에 대한 본 수치계산 결과는 기존의 두 관계식의 사이에 들어가는 것을 알 수 있으며, 본 연구의 수치계산에 대한 신뢰성을 보여준다고 할 수 있다.

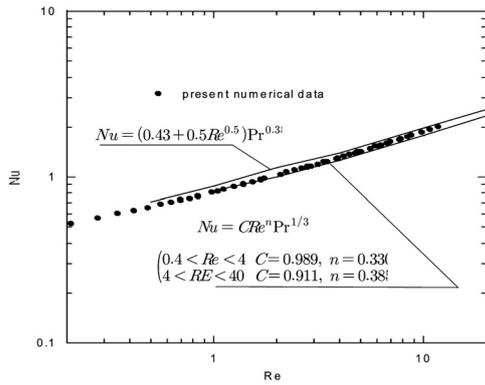


그림 3. 직교류에 놓인 단일 원통의 열전달에 대한 수치계산 결과와 기존 관계식의 비교  
 Fig. 3. Comparison of the present numerical data with the existing correlations for the steady heat transfer from a single cylinder in cross flow.

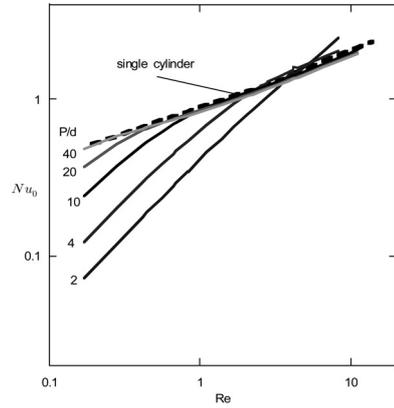


그림 4. 정상유동에서 레이놀즈수와 간격비에 따른 누셀트수의 비교  
 Fig. 4. Variation of Nusselt numbers with Reynolds number and spacing ratio for steady flow.

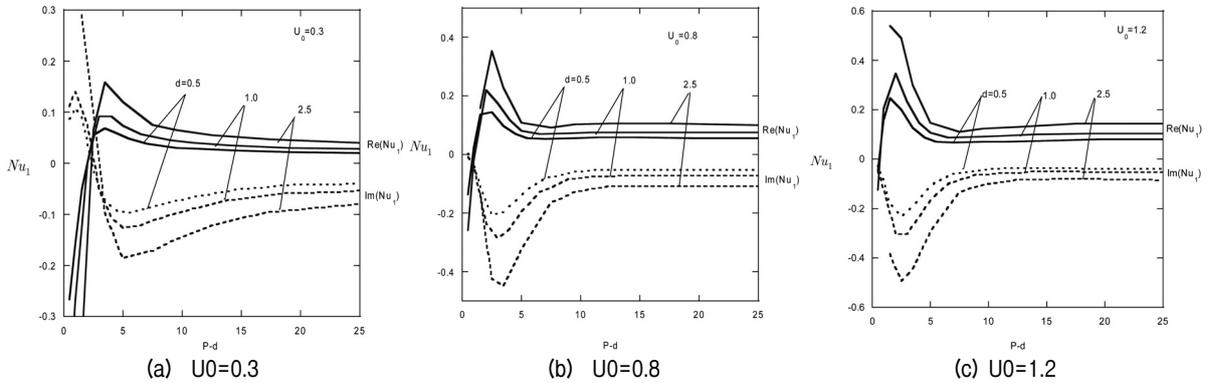


그림 5.  $U_1=1.0$ 일 때 열전달응답  
 Fig. 5. Heat transfer response for  $U_1=1.0$ .

## IV. 해석결과

### 4.1. 정상상태 해

정상상태에 대하여 계산한 누셀트수  $Nu_0$ 를 가열선 사이의 거리비  $P/d$ 와 레이놀즈수  $Re$ 의 함수로 도시하면 Fig. 4와 같다. 그림에서 열선 사이의 간섭에 의하여, 거리비  $P/d$ 가 작을 때, 저속에서는 열전달이 감소하고 고속에서는 오히려 증가하는 것을 볼 수 있다. 열선 사이의 거리가 가까워지면, 유로의 축소로 유속을 빠르게 하여 대류 열전달을 촉진하는 작용을 한다. 그러나 가열온도는 열선의 온도를 넘지 못하므로, 가열기를 통과한 기류의 무차원 온도의 최대값은 1이 된다. 따라서,  $Nu_0$ 의 최대값은 다음과 같다.

$$N_0 \leq \frac{(P/d)}{\pi} Re Pr \quad (14)$$

여기서  $\pi$ 는 원주율을 나타낸다. Fig. 3에서 레이놀즈

수  $Re$ 가 작을 때는 간격비  $P/d$ 가 작을수록 누셀트수  $Nu_0$ 는 식 (14)에 가깝게 되는 것을 알 수 있다. 즉, 유속이 느린 경우에는 간격이 좁아질수록 열전달률이 감소한다. 그러나 레이놀즈수가 클 때, 즉 유속이 빠르면 간격이 좁은 경우가 오히려 넓은 경우보다 열전달률이 크게 되는 것을 볼 수 있다. 그림에서 단일 원통은 열선 사이의 간격이 무한히 먼 경우에 대한 Fig. 3의 경우를 나타낸다.

### 4.2. 열전달 응답

음장에 대한 열전달 응답은 열선의 무차원 지름  $d$ , 무차원 간격  $P-d$  및 기류의 무차원 유속  $U_0$ 의 함수가 된다. Fig. 5는 열선의 간격  $P-d$ 에 따른 열전달 응답으로서, 복소진폭  $Nu_1$ 은 식 (11b)로 구한 주기적인 열전달률의 무차원 진폭을 나타낸다. 무차원 열전달률의 실수값  $Re(Nu_1)$ 은 기류와 동일 위상의 성분을 나타내고, 허수값  $Im(Nu_1)$ 은 90도 응답이 빠른 성분을 나타낸다. 허수값이 음수인 것은 음장의 입자속도보다 열전달의 위상이 늦어짐

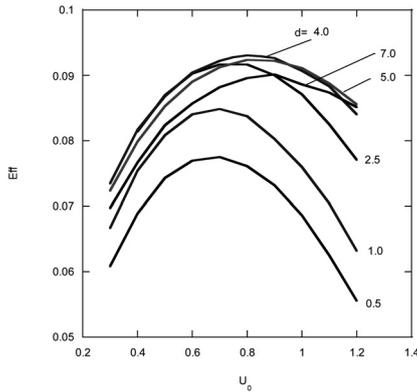


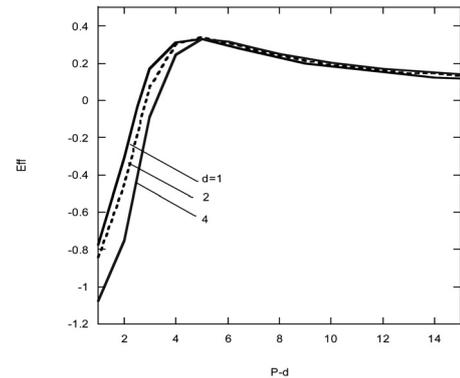
그림 6. 단일 원통형 가열기에 대한 Eff  
Fig. 6. Eff for a single cylinder heater.

을 뜻한다. 그림에서 지름이 다를지라도 간격이 같으면 비슷한 응답 특성을 나타내는 것을 알 수 있다. 이는 P/d 보다 P-d를 변수로 다루는 것이 타당함을 보여준다. 열 전달 응답의 실수값과 허수값 모두 간격이 충분히 멀면 단일 원통의 경우와 같이 일정한 값을 가지나, 간격이 감소함에 따라서 열전달 크기가 증가하다가 다시 감소하는 것을 볼 수 있다. 또한 유속이 빠를수록 간섭의 영향을 받는 간격은 더 좁아진다. 열전달 응답이 최대가 되는 간격은 유속의 증가에 따라서 P-d가 약 5에서 2까지 감소하는 것을 알 수 있다. 또한 Fig. 5 (a)의 경우처럼 유속이 느리고 간격이 매우 가까워지면, 열전달응답의 부호가 바뀌면서 그 크기가 매우 크게 되는 것을 알 수 있다.

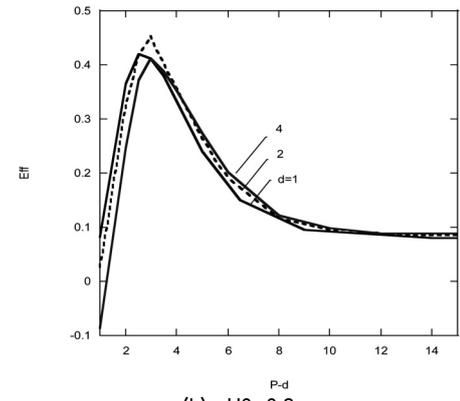
4.3. 열음향 파워의 생성

먼저, 열선 사이의 간격비가 충분히 커서 간섭을 무시할 수 있는 경우의 효율계수를 나타내면 Fig. 6과 같다. 그림에서 효율계수는 유속에 따라서 증가하다가 최대가 된 후 감소하는 경향을 보이며, 효율계수가 최대가 되는 유속은  $U_0 \approx 0.8$ , 지름은  $d \approx 4$ 로서, 최대 효율계수는  $Eff \approx 0.092$  라고 할 수 있다. 이는 단일 원통에 대한 선행 연구 [5]와 거의 일치하는 결과이다.

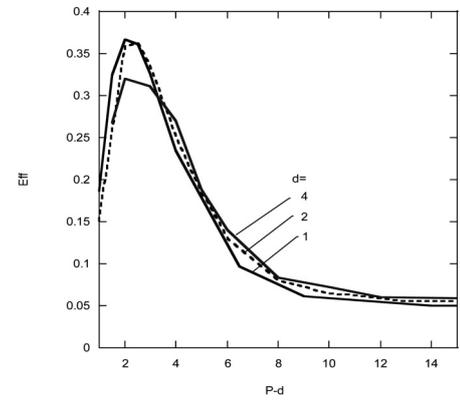
Fig. 7은 가열선 간격에 따른, 식 (13)으로 구한 효율계수의 변화를 도시한 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 열선 지름의 영향보다 간격이 더 중요한 변수가 되는 것을 알 수 있다. 간격이 가까워지면 효율계수는 크게 증가하다가 감소한다. 효율계수가 최대가 되는 간격은 유속이 빠를수록 감소하며 그 최대치는 간격  $P-d \approx 3$ , 유속  $U_0 \approx 0.8$  및 지름  $d \approx 2$ 에서  $Eff \approx 0.45$ 이다. 효율계수 0.45는 간격이 충분히 큰 경우의 0.092의 약 5배에 달하는 값으로서 간섭의 영향이 대단히 큰 것을 알 수 있다. 최대 음향



(a)  $U_0=0.3$



(b)  $U_0=0.8$



(c)  $U_0=1.2$

그림 7. P-d에 따른 Eff의 변화  
Fig. 7. Variation of Eff with P-d.

파워를 생성하는 유속  $U_0 \approx 0.8$ 은 열선 간격에 영향을 받지 않으며, 지름  $d \approx 2$ 는 간격이 충분히 먼 경우의 지름  $d \approx 4$ 에 비하여 작은 값을 알 수 있다. 한편, 간격이 매우 가까워지면 효율계수가 음수로 되므로 음향 파워의 생성이 아닌 흡수가 일어날 수 있다. 효율계수가 음수로 바뀌는 간격은 유속이 증가할수록 감소한다. 즉, 무차원 유속이 0.3일 때는 간격이 3 정도에서 음수로 바뀌게 되나, 유속이 0.8이 되면 간격이 1이 될 때 음수로 바뀐다. 따라서 저속 유동의 경우에는 가열선이 가까울 때 음향진동을 억제하는 작용을 할 수 있다.

## V. 결론

이상과 같이 나선형 가열기로 구성된 Rijke관의 열음향 기진동과 관련하여 가열기의 열음향 파워의 생성을 구한 결과 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

- (1) 열음향 파워의 생성과 관련된 효율계수는, 열선의 무차원 지름 및 기류의 무차원 유속 뿐 아니라, 열선의 사이 간격에 큰 영향을 받는다.
- (2) 열선의 간격이 가까워 질 때 효율계수는 크게 증가하다가 감소하며, 그 최대값은 열선의 무차원 지름이  $d=2$ , 사이 간격이  $P-d=3$ , 무차원 유속이  $U_0=0.8$ 일 때 약  $E_{rr}=0.45$ 가 된다.
- (3) 열선 사이의 간격이 매우 좁아지면 효율계수는 음수로 되므로, 가열기에 의하여 음향진동이 감쇠될 수 있다.
- (4) 효율계수가 최대로 되는 간격 및 음수로 되는 간격은 유속이 느릴수록 증가한다.

## 참고 문헌

1. J. W. S. Rayleigh, *Theory of Sound*, Dover, New York, 1877.
2. Y. P. Kwon and B. H. Lee, "Stability of the Rijke thermoacoustic oscillation", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 78, no. 4, pp. 1414-1420, 1985.
3. Y. P. Kwon and B. H. Lee, "Heat Transfer Response of an Isothermal Cylinder to Fluctuating Cross Flow", *Tr., Korea Society of Mechanical Engineers* vol. 5, pp. 706-712, 1986.
4. C. Pozrikidis, *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Oxford University Press, New York, 1997.
5. Y. P. Kwon and B. H. Lee, "A Study on the Thermoacoustic Oscillation of an Air Column", *Tr., Korea Society of Mechanical Engineers*, vol. 11, pp. 253-261, 1987.
6. J. P. Holman, *Heat Transfer*, 9th ed. International, Mc-Graw-Hill, 2002.

---

### 저자 약력

---

• 권 영 필 (Youngpil Kwon)



1975년: 서울대학교 기계공학과 학사  
 1977년: KAIST 기계공학과 석사  
 1986년: KAIST 기계공학과 박사  
 1977년~현재: 송실대학교 기계공학과 교수