

외부 유체와 연성된 도파관의 진동 및 소음 해석 기법

A Numerical Method for Analysis of the Sound and Vibration of Waveguides Coupled with External Fluid

유 정 수*
(Jungsoo Ryue*)

*울산대학교 조선해양공학부
(접수일자: 2010년 7월 30일; 채택일자: 2010년 10월 5일)

단면의 형상이 길이방향으로 일정한 무한길이 도파관 구조물 (waveguide structures)에 대한 진동 및 파동전파 특성은 도파관유한요소법 (waveguide finite element method, WFEM)을 이용해 효과적으로 해석할 수 있다. 도파관유한요소법은 2차원 단면만을 FE 모델링하여 해석하므로 모델의 크기가 작고 연산시간이 짧다는 장점이 있다. 도파관 구조물이 외부 유체와 연성된 경우, 원통형 실린더 또는 파이프와 같이 단면의 형상이 단순한 경우에는 이론적 해석을 수행할 수 있다. 반면 복잡한 형상의 단면을 가진 도파관구조물이 유체와 연성된 경우에는 수치해석 방법이 요구된다. 외부 유체와 연성된 도파관 구조물은 외부 유체와 도파관유한요소 (WFE)를 연성시켜 해석하는 수치해석 방법을 고려할 수 있다. 본 논문에서는 외부 유체 모델링에 경계요소 (Boundary Element)를 도입하고 이를 도파관유한요소와 연성시킨 WFE/BE 방법을 소개한다. 이 방법의 적용 예로써 단순형상의 파이프에 대해 외부 유체의 유/무에 따른 분산선도와 가진점 모빌리티 (point mobility)를 구하고 이를 이론해석 결과와 비교하였다. 또한 WFE/BE 방법을 이용해 파이프에서 외부 유체로 방사되는 음향파위를 구하고 접수 유/무에 따른 영향을 살펴보았다.

핵심용어: 도파관유한요소법, 도파관유한요소/경계요소법, 유체 연성, 파이프, 분산선도, 모빌리티

투고분야: 구조진동 및 음향 분야 (11.2)

Vibrations and wave propagations in waveguide structures can be analysed efficiently by using waveguide finite element (WFE) method. The WFE method only models the 2-dimensional cross-section of the waveguide with finite elements so that the size of the model and computing time are much less than those of the 3-dimensional FE models. For cylindrical shells or pipes which have simple cross-sections, the external coupling with fluids can be treated theoretically. For waveguides of complex cross-sectional geometries, however, numerical methods are required to deal with external fluids. In this numerical approach, the external fluid is modelled by the boundary elements (BEs) and connected to WFEs. In order to validate this WFE/BE method, a pipe submerged in water is considered in this study. The dispersion diagrams and point mobilities of the pipe simulated are compared to those that theoretically obtained. Also the acoustic powers radiated from the pipe are predicted and compared in both cases of air and water as an external medium.

Keywords: Waveguide Finite Element Method, Waveguide Finite Element/Boundary Element Method, Fluid Coupling, Pipe, Dispersion Diagram, Point Mobility

ASK subject classification: Structural Acoustic and Vibration (11.2)

I. 서론

단면의 형상이 길이 방향으로 일정하게 유지되는 빔, 파이프, 원통형 실린더, 레일 등과 같은 구조물을 일컬어

도파관 (waveguide)이라 하며, 도파관에서의 탄성파 전파 및 진동 해석은 도파관유한요소법 (Waveguide Finite Element Method, WFEM)을 이용해 효과적으로 해석할 수 있다. WFE 해석에서는 도파관 단면의 진동모드가 길이방향으로 전파한다고 가정하므로, 2차원 단면만을 유한요소 모델링하고 파동의 길이방향 전파는 복소지수함수, e^{-jkx} ,를 이용하여 표현한다. 여기서 x 는 도파관의

길이방향 좌표축, κ 는 도파관을 따라 전파하는 파동의 x 방향 파수 (wavenumber)이다. WFE 방법은 구조물의 2차원 단면만을 유한요소 모델링하여 해석하므로 모델의 크기가 작고 연산속도가 빠르다는 장점이 있다. 이 수치 해석 기법은 이론해석이 어려운 임의 형상의 단면을 가진 빔, 보강 평판, 타이어, 레일 및 지반 (ground) 진동 해석 등에 이용되고 있다 [1-3]. WFE 방법은 유한요소법에 기반 하되 길이방향 파동전파는 이론해를 사용하므로 ‘semi-analytical FE (SAFE)’ 방법이라고도 불린다 [4].

파이프와 같이 단면의 형상이 단순한 도파관이 내부 또는 외부 유체와 연성된 경우에 대해서는 이론 해석이 가능하다. Fuller와 Fahy [5]는 내부 유체와 연성된 파이프에 대한 이론해를 제시하고 분산선도 (dispersive curve)를 이용해 원주방향 모드별로 파동 전파 특성을 해석하였다. De Jong [6]은 내부와 외부가 모두 유체와 연성된 파이프에 대한 이론해를 구하고 연성된 유체에 의한 분산선도의 변화를 살펴보았다. 또한 땅 속에 매설된 파이프의 누수 (water leakage) 위치를 찾기 위한 목적으로 파이프-내부 유체 연성 진동 해석이 수행된 바 있다 [7,8]. 이러한 이론적 접근 방법은 복잡한 단면을 가진 도파관에는 적용하기 어려우므로 수치해석 기법이 요구 된다.

C.-M. Nilsson [9] 등은 WFE 모델에 파수경계요소 (Wavenumber Boundary Element, WBE)를 결합하여 레일의 강제진동에 의해 공기중으로 방사되는 음향파위를 해석하였다. 그러나, 그들은 WFE와 WBE를 직접 연성하여 해석하지 않고 WFE를 이용해 구조물의 진동을 먼저 해석한 후 진동으로부터 유기되는 방사소음을 WBE 방법으로 해석하였다. 이러한 시도는 공기와 같이 구조물과의 연성효과가 적은 유체에는 타당할 것이나 물과 같이 연성효과가 큰 매질의 경우에는 WFE와 WBE를 직접 연성하여 해석하는 것이 필요하다.

본 논문에서는 외부 유체와 연성된 도파관의 응답을 구하기 위한 수치해석 기법으로써, 도파관유한요소 (WFE) 그리고 파수경계요소 (WBE)를 결합한 WFE/BE 방법을 소개한다. 이를 위해 먼저 도파관유한요소와 파수경계요소에 대한 운동방정식을 유도하고 이들을 연성시켜 외부 유체와 연성된 도파관의 운동방정식을 제시하였다. WFE/BE 방법의 신뢰성을 확인하기 위하여 형태가 단순한 파이프에 대한 해석을 수행하고 그 결과를 이론해와 비교하였다. 외부 유체로는 공기와 물을 선택하고, 각각의 경우에 대하여 파이프를 따라 전파되는 파동의 분산관계, 외력이 작용할 때 발생하는 가진점의 모빌리티를 해

석하고 그 특성을 살펴보았다. 마지막으로 몰수된 파이프에 대하여 WFE/BE 방법을 적용해 파이프에서 공기중 또는 수중으로 방사되는 음향파위를 해석하고, 유체 연성에 의한 변화를 살펴보았다.

II. 도파관유한요소/경계요소 모델링

본 장에서는 도파관유한요소와 경계요소에 대한 운동방정식을 유도하고 이를 연성시켜 지배방정식을 구하였다. 각 요소에 대한 운동방정식은 참고문헌 [3,9,10,11] 등에 자세히 유도되어 있으며 여기서는 그 내용을 간추려 정리하였다.

2.1. 도파관유한요소

도파관유한요소 방정식은 Hamilton의 변분 원리 (variational principle)를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta U - \delta T = 0 \tag{1}$$

여기서 U 와 T 는 각각 포텐셜 에너지 (potential energy)와 운동에너지 (kinetic energy)를 나타낸다. 식 (1)에서 포텐셜 에너지 변분 δU 는

$$\delta U = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^H \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV \tag{2}$$

로 정의되며, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 은 변형률 (strain) 벡터로써 고체요소 (solid element)의 경우 $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}]^T$, \mathbf{D} 는 재료의 강성행렬, 상점자 H 는 복소공액전치 (complex conjugate transpose)를 나타낸다. 변형률 벡터를 변위의 x 방향 미분에 관해 정리하면 식 (3)과 같이 두 항으로 나누어 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \\ = \left(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{u} \quad (3)$$

변위 벡터 \mathbf{u} 와 가상변위 (virtual displacement) 벡터 $\delta\mathbf{u}$ 는 2차원 형상함수 (shape function) 행렬 $\mathbf{N}_s(y, z)$ 을 이용해 식 (4)와 같이 근사화 할 수 있다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}(y, z) \hat{\mathbf{u}}, \quad \delta\mathbf{u} = \mathbf{N}(y, z) \delta\hat{\mathbf{u}}, \quad (4)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_s^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_s^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_s^T \end{bmatrix}. \quad (5)$$

고체요소 (solid element) 하나가 가지는 노드 수를 n 이라고 하면 유한요소의 변위벡터 $\hat{\mathbf{u}}$ 는 $3n \times 1$ 이 되며 \mathbf{N} 은 $3 \times 3n$ 의 행렬이다.

식 (3)과 (4)를 식 (2)에 대입하여 정리하면

$$\delta U(\omega) = \int_x \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \frac{\partial^i \delta \hat{\mathbf{u}}^H}{\partial x^i} \mathbf{a}_{ij} \frac{\partial^j \hat{\mathbf{u}}}{\partial x^j} dx \quad (6)$$

이 되며, 여기서 ω 는 각주파수 (angular frequency), 행렬 $\mathbf{a}_{ij} = \int_A [\mathbf{B}_i \mathbf{N}]^T \mathbf{D} [\mathbf{B}_j \mathbf{N}] dA$, 그리고 A 는 요소의 단면적을 나타낸다.

운동에너지 변분 δT 는

$$\delta T(\omega) = \omega^2 \int_x \delta \hat{\mathbf{u}}^H \mathbf{m}_s \hat{\mathbf{u}} dx \quad (7)$$

이며, 질량행렬 $\mathbf{m}_s = \int_A \rho_s \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA$, ρ_s 는 재료의 밀도 (kg/m^3)이다. 식 (6)과 (7)로부터, 고체요소에 대한 Lagrangian, δL 은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta L(\omega) = \delta U(\omega) - \delta T(\omega) = \int_x \left(\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \frac{\partial^i \delta \hat{\mathbf{u}}^H}{\partial x^i} \mathbf{a}_{ij} \frac{\partial^j \hat{\mathbf{u}}}{\partial x^j} - \omega^2 \delta \hat{\mathbf{u}}^H \mathbf{m}_s \hat{\mathbf{u}} \right) dx \quad (8)$$

식 (8)에서 \mathbf{a}_{ij} 와 \mathbf{m}_s 는 각각의 유한요소에서 얻어지는 행렬이다.

2차원 단면의 유한요소에 대해 식 (8)을 이용해 정리하면, WFE 운동방정식은

$$\left[\mathbf{K}_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{K}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M} \right] \mathbf{u}(x, \omega) = 0 \quad (9)$$

로 표현되며 여기서 \mathbf{K}_2 , \mathbf{K}_1 그리고 \mathbf{K}_0 는 구조물의 강성과 관련된 행렬이며, \mathbf{M} 은 질량행렬 그리고 $\mathbf{u}(x, \omega)$ 는 단면의 변위벡터이다. (평판요소(plate element)를 이용해 모델링하는 경우, 지배방정식은 위 식 (9)의 괄호 안에 $\mathbf{K}_4 \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ 항이 추가 된다.)

길이방향으로 조화운동을 가정하면, 식 (1)의 변위벡터는 $\mathbf{u}(x, \omega) = \tilde{\mathbf{U}} e^{j(\omega t - \kappa x)}$ 로 쓸 수 있으므로,

$$\{ \mathbf{K}_2 (-j\kappa)^2 + \mathbf{K}_1 (-j\kappa) + \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M} \} \tilde{\mathbf{U}} = 0 \quad (10)$$

여기서 $\tilde{\mathbf{U}}$ 는 단면의 모드형상 벡터이다. 식 (2)에 표현된 지배방정식은 두 개의 변수, 즉, 파수 κ 와 주파수 ω 를 가진 고유치문제가 되며 두 변수 중 하나가 주어지면 풀 수 있다. 즉, κ 가 주어지면 ω 를 구하는 고유치문제 (eigenvalue problem)가, ω 가 주어지면 κ 를 구하는 다항 고유치문제 (polynomial eigenvalue problem)가 된다. 위 두 가지 중 어떤 방법으로 풀 것인가는 어떤 결과치가 필요한가에 따라 결정된다. 즉, 분산선도를 얻고자 한다면 파수를 주고 주파수를 구하는 고유치문제로, 가진력에 대한 응답특성을 얻고자 한다면 주파수를 주고 파수를 구하는 다항고유치문제로 해석해야 한다.

2.2. 파수경계요소

도파관 구조물이 외부 유체와 연결되어 있는 경우, 외부 유체를 경계요소 (boundary element)로 모델링하고 이를 앞 절에서 살펴본 파수유한요소와 결합시켜 해석할 수 있다. 도파관유한요소와 같이 외부 유체에 대해서도 2차원 단면만을 모델링하므로, 2차원 Helmholtz 방정식에 x 방향으로 존재하는 파수를 반영하여 식 (11)과 같은 파수영역 (wavenumber domain) 경계요소 방정식을 얻을 수 있다.

$$\Delta_{2D}\tilde{\Psi} + (k^2 - \kappa^2)\tilde{\Psi} = 0 \quad (11)$$

여기서 Δ_{2D} 는 2차원 Laplace 연산자 ($\Delta_{2D} = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$), $\tilde{\Psi}$ 는 유체의 속도포텐셜 (velocity potential), k 는 유체에서 전파되는 음파의 파수로써 $k = \omega/c$ 이며 c 는 음파의 전파속도이다. 수직방향 (\mathbf{n} 방향) 유체입자의 속도 (particle velocity), \tilde{v}_n , 와 음압 \tilde{p} 는 속도포텐셜을 이용해 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{v}_n = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{n}}, \quad \tilde{p} = i\omega\rho_0\tilde{\Psi} \quad (12)$$

식 (11)은 2차원 Helmholtz 방정식에서 k^2 이 $(k^2 - \kappa^2)$ 으로 대체된 형태이며, $k^2 > \kappa^2$ 인 경우 $\sqrt{k^2 - \kappa^2}$ 는 실수가 되어 외부로 전파되는 음파를 묘사한다. 반면 $k^2 < \kappa^2$ 인 경우 $\sqrt{k^2 - \kappa^2}$ 는 허수가 되어 외부로 전파되지 못하는 근접장 파동해 (nearfield wave solution)를 얻게 된다. 2차원 단면 모델에서 경계조건은

$$\int_{\Gamma} \left(\delta\tilde{\Psi}^* \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{n}} - \tilde{\Psi} \frac{\partial (\delta\tilde{\Psi}^*)}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma = 0 \quad (13)$$

이며 *는 복소켤레 (complex conjugate), Γ 는 2차원 단면의 둘레 (perimeter)를 나타낸다. 식 (11)과 (13)으로부터 구한 경계요소 지배방정식은

$$\mathbf{H}\tilde{\Psi} - \mathbf{G} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{n}} \tilde{\Psi} = 0 \quad (14)$$

이며, 여기서 $\tilde{\Psi}$ 와 $\partial \tilde{\Psi}/\partial \mathbf{n}$ 는 경계요소의 노드에서 정의되는 벡터, \mathbf{n} 은 구조물과 접하고 있는 경계요소의 수직 벡터 (normal vector), \mathbf{H} 와 \mathbf{G} 는 Green 함수 행렬을 나타낸다.

2.3. 도파관유한요소와 파수경계요소의 연성

도파관유한요소와 파수경계요소가 서로 접하는 노드에서는 유체 입자와 고체요소의 수직방향 속도가 같아야 하므로

$$\tilde{v}_{ni} = i\omega \tilde{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{n} \quad (15)$$

이 된다. 여기서 \tilde{v}_{ni} 는 경계면에 수직인 \mathbf{n} 방향 유체입자 속도, $\tilde{\mathbf{u}}_i$ 는 노드 i 에서의 도파관유한요소 변위, ‘ \cdot ’은

벡터의 내적 (inner product)이다. 식 (15)의 조건을 이용해 경계면에서 접하는 모든 노드에 대한 연성조건을 구하면 식 (16)과 같다.

$$i\omega \mathbf{C}_2 \tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{I}_2 \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (16)$$

여기서 \mathbf{C}_2 는 경계요소와 접하는 도파관유한요소의 변위를 경계면에 수직인 \mathbf{n} 방향 변위로 변환시키는 행렬이며, \mathbf{I}_2 는 도파관유한요소와 접하는 경계요소를 정의하는 0 또는 1로 구성된 행렬이다. 식 (14)와 (16)으로부터 경계 요소에 대한 해는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{i\omega}{\mu} \mathbf{I}_2^{-1} \mathbf{C}_2 \tilde{\mathbf{U}}, \quad \tilde{\Psi} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{n}} \quad (17)$$

2.4. 도파관유한요소/경계요소 모델

도파관 구조물과 외부 유체가 연성되는 경우, 지배방정식은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\{\mathbf{K}(\kappa) - \omega^2 \mathbf{M}\} \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{F}} + i\omega \rho \mathbf{C}_1 \tilde{\Psi} \quad (18)$$

$$\mathbf{H}\tilde{\Psi} - \mathbf{G} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{n}} \tilde{\Psi} = 0 \quad (19)$$

$$i\omega \mathbf{C}_2 \tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{I}_2 \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (20)$$

여기서 $\mathbf{K}(\kappa) = \mathbf{K}_2(-j\kappa)^2 + \mathbf{K}_1(-j\kappa) + \mathbf{K}_0$, $\tilde{\mathbf{F}}$ 는 가진력 벡터, \mathbf{I}_2 는 단위행렬, \mathbf{C}_1 과 \mathbf{C}_2 는 유한요소와 경계요소 간 연성행렬을 나타낸다. 즉, 식 (18)은 유한요소와 경계요소 사이에 나타나는 힘의 연성, 식 (20)은 유한요소와 경계요소의 속도 (또는 변위) 연속 조건에 관한 것이다. 만약 외부 유체가 공기라면, 외부 유체에 의한 연성효과를 무시할 수 있으므로 식 (18)의 연성항 ($i\omega \rho \mathbf{C}_1 \tilde{\Psi}$)과 식 (20) 없이 해를 구할 수 있다.

도파관에서 외부 유체로 방사되는 음향파위는 파수유한요소/경계요소법에서 구한 외부유체의 속도포텐셜과 식 (12)를 이용해 계산 할 수 있다. 즉, 도파관과 접하고 있는 유체입자의 수직방향 속도 \tilde{v} 와 음압 \tilde{p} 로부터 방사 음향파위 P 를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\int_{-k}^k \int_{\Gamma} \tilde{p}^*(\kappa) \tilde{v}(\kappa) d\Gamma d\kappa \right) \quad (21)$$

앞서 언급한 것과 같이 κ 가 k 보다 큰 경우에는 음향 방사가 생기지 않으므로 식 (21)에서 κ 의 적분구간이 $-k \leq \kappa \leq k$ 로 제한되었다.

III. 해석 예: 유체와 연성된 파이프

본 장에서는 앞서 소개한 WFE/BE 방법의 해석 예로써 외부 유체와 연성된 파이프의 진동 및 소음을 해석하고 이론해석 결과와 비교하였다. 본 해석에 이용된 파이프 및 유체의 물성치는 아래 표 1에 나타내었다.

3.1. 유체와 연성되지 않은 파이프

본 절에서는 먼저 유체와 연성되어 있지 않은 (또는 공기와 연성된) 파이프에 대해 WFE 방법을 이용해 분산선도를 구하고 이를 이론해와 비교하였다. 식 (10)의 지배방정식에 x 방향 파수 (κ)를 입력값으로 주고 고유치 해석을 수행하면 주파수 (ω)를 구할 수 있으므로 분산선도를 얻을 수 있다.

WFE 해석에 사용한 파이프의 단면 모델은 그림 1에 나타내었다. 유한요소의 크기에 의한 영향을 살펴보기 위하여 두 개의 단면 모델을 구성하였다. 모델 1은 32개의 고체요소 (solid element)로, 모델 2는 64개의 고체요소로 모델링하였으며, 각 요소는 8개의 노드로 구성하였다.

유체와 연성되지 않은 두께가 얇은 파이프의 분산선도는 원통형 실린더의 운동방정식으로부터 이론적으로 구할 수 있다. 두께가 얇은 파이프에 대한 여러 가지 운동방정식은 참고문헌 [12]에 자세히 소개되어 있으며, 본 연구에서는 참고문헌 [6]에 제시된 Flugge의 운동방정식을 이용해 분산선도를 구하였다. 그림 2에는 WFE 해석과 Flugge의 운동방정식으로부터 구한 분산선도를 함께 나타내었다. 그림 2에 나타난 것과 같이 모델 1과 모델 2의 WFE 해석과 이론식에서 구한 분산선도가 근사함을 확인할 수 있다. 다만, 주파수가 증가함에 따라 모델 1의 WFE

해석 결과가 이론해와 약간의 차이를 보이는데, 2 kHz 부근에서 약 3%의 오차가 발생하였다. 2 kHz 이하 영역에서는 모델 1의 수치해석 결과와 이론해석 결과의 차이가 크지 않다고 판단되어, 이 후의 해석 예에서도 그림 1의 파이프 단면 모델을 이용하였다.

그림 2에는 직선으로 표현된 두 개의 비분산파 (non-dispersive wave)가 존재하는데 이들은 각각 종파 (longitudinal wave)와 비틀림파 (torsional wave)로써 $n = 0$ 모드에 해당한다. 또 하나의 $n = 0$ 파동은 숨쉬기 모드 (breathing mode)를 가진 파동이며 이 파동의 cut-on 주파수는 약 8660 Hz이므로 그림 2에는 나타나지 않는다. 그림 3에는 단면의 원주방향 변형모드 $n = 1, 2, 3, 4$ 에 대해 WFE 방법으로 얻은 모드형태와 각각의 cut-on 주파수를 나타내었다. $n = 1$ 은 빔 굽힘 모드 (beam bending mode), $n = 2$ 는 타원 모드 (oval mode)이며 n 의 증가에 따라 원주방향 변형모드가 증가함을 알 수 있다.

파이프에 수직방향으로 단위 가진력이 작용할 때 발생하는 파이프의 모빌리티 (mobility)는 식 (10)을 다항식고

표 1. 파이프의 제원 및 외부 유체 물성치
Table. Parameters used for pipe and external fluid.

파이프		유체 (공기)	
외경	0.1025 m	밀도	1.21 kg/m ³
내경	0.0975 m	음파 전파 속도	343 m/s
두께	0.005 m	유체 (물)	
Young's modulus	210 GPa	밀도	1000 kg/m ³
밀도	7800 kg/m ³	음파 전파 속도	1500 m/s
프와송 비	0.3		

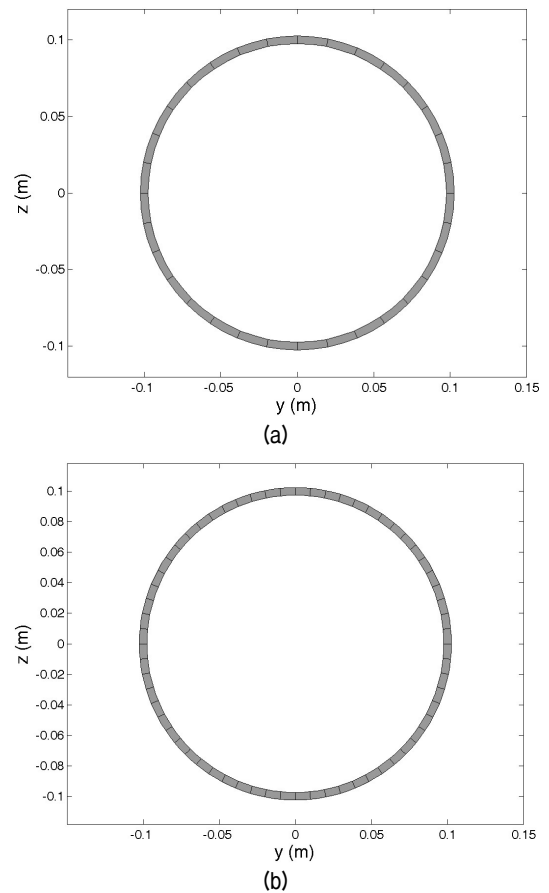


그림 1. 파이프 단면의 유한요소 모델. (a) 모델 1, (b) 모델 2
Fig. 1. Cross-sectional FE model of the pipe. (a) model 1 (coarse model), (b) model 2 (fine model).

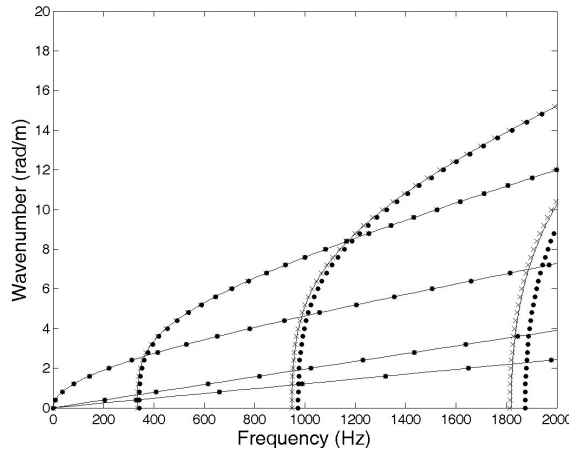


그림 2. 유체와 연성되지 않은 파이프에 대해 WFE 해석과 이론해를 이용해 구한 분산선도 비교. —, 이론해; •, WFE (모델 1); ×, WFE (모델 2)
 Fig. 2. Comparison of dispersion diagrams of the empty pipe predicted from WFE and theoretical analyses. —, theoretical; •, WFE analysis (model 1); ×, WFE analysis (model 2).

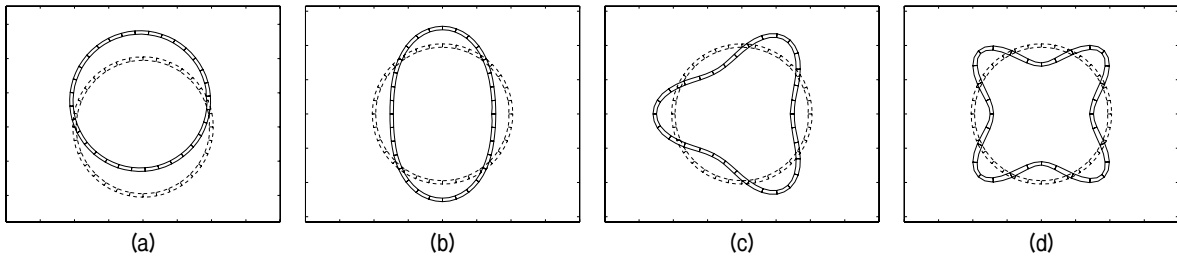


그림 3. 원주방향 단면 모드와 cut-on 주파수. (a) $n = 1, 0 \text{ Hz}$, (b) $n = 2, 343\text{Hz}$, (c) $n = 3, 973\text{Hz}$, (d) $n = 4, 1874\text{Hz}$
 Fig. 3. Cross-sectional deformation shapes of the waves and their cut-on frequencies. (a) $n = 1, 0 \text{ Hz}$, (b) $n = 2, 343\text{Hz}$, (c) $n = 3, 973\text{Hz}$, (d) $n = 4, 1874\text{Hz}$.

유치 해석하여 구한 파수 (κ_m)와 해당 파수에서의 모드형태 벡터 ($\tilde{\mathbf{U}}_m$)를 이용해 식 (22)와 같이 표현할 수 있다.

$$V(x, \omega) = i\omega \sum_{m=1}^N a_m \tilde{\mathbf{U}}_m e^{-j\kappa_m x} \quad \text{for } x \geq 0 \quad (22)$$

여기서 a 는 파동의 크기 (amplitude)를 나타내며 N 은 양의 x 방향으로 진행하는 파동의 개수로서, WFE 모델이 가지는 전체 자유도 (degree of freedom) 수의 절반이 된다. 파동의 크기 a 는

$$a_m = \frac{i\tilde{\mathbf{U}}_{mL} \tilde{\mathbf{F}}(\kappa)}{\tilde{\mathbf{U}}_{mL} \mathbf{K}' \tilde{\mathbf{U}}_{mR}} \quad (23)$$

로 표현되며, 하첨자 L 과 R 은 각각 왼쪽고유벡터 (left eigenvector)와 오른쪽고유벡터 (right eigenvector)를 나타내며, $\mathbf{K}' = d\mathbf{K}/d\kappa = -2\kappa \mathbf{K}_2 - j\mathbf{K}_1$, 그리고 $\tilde{\mathbf{F}}$ 는 파수 영역에서 표현한 단위 가진력이다. 가진점 x_0 의 모빌리티는 식 (22)에 $x = x_0$ 와 $\tilde{\mathbf{U}}_m(x_0)$ 을 대입하여 얻을 수 있다.

3.2. 외부 유체와 연성된 파이프

외부 유체와 연성된 원통형 실린더의 진동은 2.4절에 주어진 식 (18), 식 (19), 그리고 식 (20)으로부터 구할 수 있다. 식 (19)에 쓰인 \mathbf{H} 와 \mathbf{G} 는 파수와 주파수를 독립변수로 가지는 함수, 즉 $\mathbf{H}(\kappa, \omega)$, $\mathbf{G}(\kappa, \omega)$ 이므로 앞 절에서 수행한 것과 같은 고유치해석을 할 수 없다. 따라서 위의 세 식으로부터 그림 2에서 얻은 것과 같은 분산선도를 얻을 수는 없다. 대신, 본 절에서는 그림 4와 같이 원주방향으로 단위 하중의 외력이 작용할 때 주파수별 가진점의 모빌리티를 파수영역에서 구하고, 여기서 공진점 (resonance peaks)들을 찾아 파수-주파수 분산선도를 구성하였다. 본 절에서는 외부 유체로 물을 고려하였으며 물성치는 표 1에 나타난 것과 같다.

그림 5에는 외부 유체와 연성된 파이프에 대해 WFE/BE 방법으로 구한 분산선도를 이론해와 비교하여 나타내었다. 그림 5의 이론해는 파수가 낮은 영역에 대해 참고문헌 [6]에서 제시한 근사해로써 파수가 증가할수록 오차를 갖는다. 그림 5에 표시된 두 분산관계를 보면 낮은 파수 영역에서 WFE/BE 결과가 이론해와 잘 일치함을 알 수 있다.

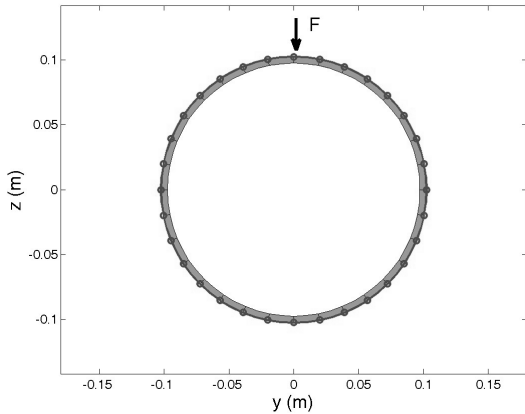


그림 4. 외부 유체와 연성된 파이프의 파수유한요소/경계요소 모델 (○-○, 파수경계요소)

Fig. 4. Cross-sectional model made by WFEs and WBEs for the pipe coupled with external fluid. (○-○, WBE).

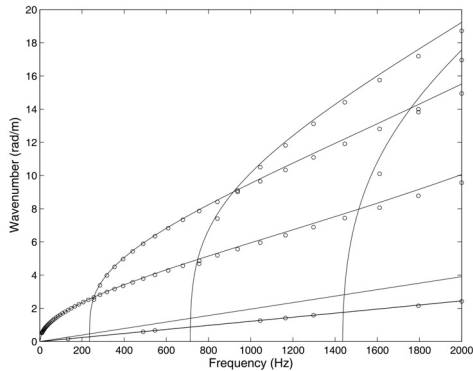


그림 5. 외부에서 물과 연성된 파이프의 분산 선도 -, 이론해: ○, WFE/BE

Fig. 5. Comparison of dispersion diagrams of the pipe coupled with the external water. -, theoretical; ○, simulated by WFE analysis.

WFE/BE 모델로부터 구한 분산선도에서 종파와 비틀림 파가 잘 나타나지 않은 것은 두 파동의 반경방향 변형이 아주 작아 모빌리티 선도에서 잘 나타나지 않기 때문이다. 그림 2와 그림 5를 비교해보면 $n > 0$ 인 파동들은 외부 유체로 인한 부가질량 효과로 인해 cut-on 주파수가 낮아진 반면 $n = 0$ 인 종파와 비틀림파는 유체에 의한 연성 효과가 거의 없음을 알 수 있다.

저주파수 대역에서는 도파관 구조물을 증가의 Euler 빔으로 간주할 수 있으므로 가진점 모빌리티를 증가의 Euler 빔 모델을 이용해 이론적으로 계산할 수 있다 [13]. WFE 방법으로 구한 가진점 모빌리티와 비교하기 위해 증가의 Euler 빔이 가지는 가진점 모빌리티를 구하고 그림 6에 나타내었다. WFE 해석으로 구한 가진점 모빌리티는 30-40 Hz의 저주파수 영역에서 증가의 Euler 빔과 근사함을 확인 할 수 있다. 그러나, 주파수가 증가할수록

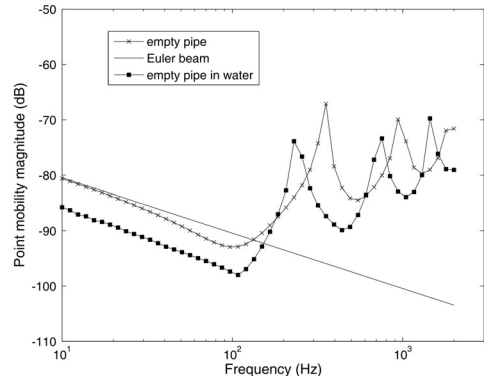


그림 6. 외부 유체(물)와의 연성 유/무에 따른 파이프의 가진점 모빌리티 변화

Fig. 6. Point mobilities of the pipe with and without the external water coupling.

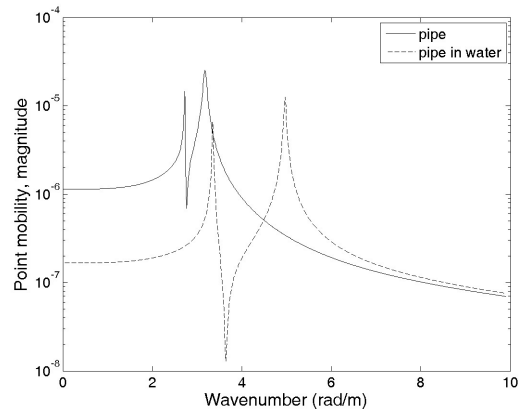


그림 7. 외부 유체(물)와의 연성 유/무에 따른 파이프의 파수영역 가진점 모빌리티 변화 (395Hz)

Fig. 7. Comparison of the point mobilities of the pipe in the wavenumber domain at 395 Hz with and without the external water coupling.

파이프 단면의 고차 모드를 가지는 파동이 발생하여 Euler 빔 결과와 차이가 발생하고 있으며, 이들 파동이 cut-on 되는 주파수에서 모빌리티가 크게 증가하는 공진(resonance)이 발생함을 알 수 있다. 또한, 그림 6에는 외부 유체와 연성된 파이프의 가진점 모빌리티를 유체가 없는 파이프의 결과와 비교하여 나타내었다. 외부 유체와 연성된 파이프의 경우에는 유체에 의한 연성효과로 모빌리티가 저주파수 대역에서 약 5 dB 정도 낮게 나타나며 공진 주파수의 이동으로부터 cut-on 주파수가 낮아진 것도 확인 할 수 있다.

그림 7에는 외부 유체가 있을 때와 없을 때 395 Hz에서 얻은 가진점 모빌리티를 파수 영역에서 나타내었다. 그림 2와 그림 4의 분산선도에서 알 수 있듯이 395 Hz에는 4개의 파동, 즉 종파, 비틀림파, $n = 0$ 그리고 $n = 1$ 인 파동이 존재한다. 그러나 종파와 비틀림파는 반경방향 변

형이 무시 가능할 정도로 작으므로 그림 7의 모빌리티 선도에는 나머지 2개 파동, 즉 $n=0$ 의 빔 굽힘파와 $n=1$ 의 타원형파에서 큰 응답이 발생하고 있다. 외부 유체와 연성된 경우에는 외부 유체로 인해 파동의 cut-on 주파수가 낮아지므로, 그림 7에 나타난 것과 같이 파수영역에서는 공진점의 위치가 높은 파수 영역으로 이동하게 된다. 또한 유체의 연성으로 낮은 파수 영역의 응답의 크기가 낮아짐을 확인 할 수 있다.

3.3. 방사음향파워

그림 8에는 그림 2와 그림 5의 분산선도에 외부 유체(공기 또는 물)의 분산 관계를 함께 표시하였다. 식 (11)에서 언급한 것과 같이, 외부 유체에서 전파되는 음파의 파수 k 가 원통형 실린더의 x 방향 파수 κ 보다 큰 구간, 즉 $k^2 > \kappa^2$ 인 구간은 음향방사가 잘 일어나는 초음속(supersonic) 구간이다. 반면 $k^2 < \kappa^2$ 인 구간에서는 음파

가 외부로 전파되지 못하여 음향방사가 잘 일어나지 않는 아음속(subsonic) 구간이 된다 [14]. 외부 유체가 공기인 경우 음속을 343 m/s로 가정하면 그림 8 (a)에 나타난 것과 같이 약 50 Hz 이하에서는 $n=1$ 의 빔 굽힘파가 아음속 구간에 포함되며, 그 외 주파수에서는 모든 파동이 $k^2 > \kappa^2$ 조건을 만족하는 초음속 구간이 된다. 반면, 외부 유체가 물인 경우, 음속을 1500 m/s로 가정하면 그림 8 (b)에 보인 것과 같이 cut-on 주파수 부근을 제외한 대부분의 영역에서 $n=0$ 의 종파와 비틀림파 만이 초음속 구간에 속함을 알 수 있다. 그러나 이 두 파동은 반경방향 변화가 크지 않으므로 방사되는 음향파워는 크지 않을 것으로 예상할 수 있다.

그림 9에는 WFE/BE 방법으로 구한 몰수된 파이프의 방사음향파워를 공기중 방사음향파워와 비교하여 나타내었다. 외부 유체가 공기인 경우, 빔 굽힘파가 아음속 구간에서 초음속 구간으로 바뀌는 50 Hz 부근을 지나면서 방사음향파워가 약 20 dB 정도 크게 증가함을 확인할 수 있다. 반면 외부 유체가 물인 경우에는 음향방사에 유리한 $n > 0$ 의 파동들이 모두 아음속 구간에 포함되므로 이러한 음향방사파워의 큰 증가가 나타나지 않는다.

그림 9의 결과는 동일한 단위하중을 파이프에 가하였을 때 발생하는 음향파워를 비교한 것이다. 그러나 외부 유체가 물인 경우 그림 6에 보인 것과 같이 점수효과로 인해 파이프의 진동수준이 감소하므로 음향방사파워를 $x=0$ 인 파이프 단면의 진동파워로 나누어 정규화(normalize)한 결과를 그림 10에 나타내었다. 그림 10에서 50 Hz 이하의 결과를 보면, 몰수된 파이프의 경우 $n > 0$ 의 파동들이 모두 아음속 구간에 포함됨에도 불구하고 단위 진동에 대한 수중 방사음향파워가 공기중 방사

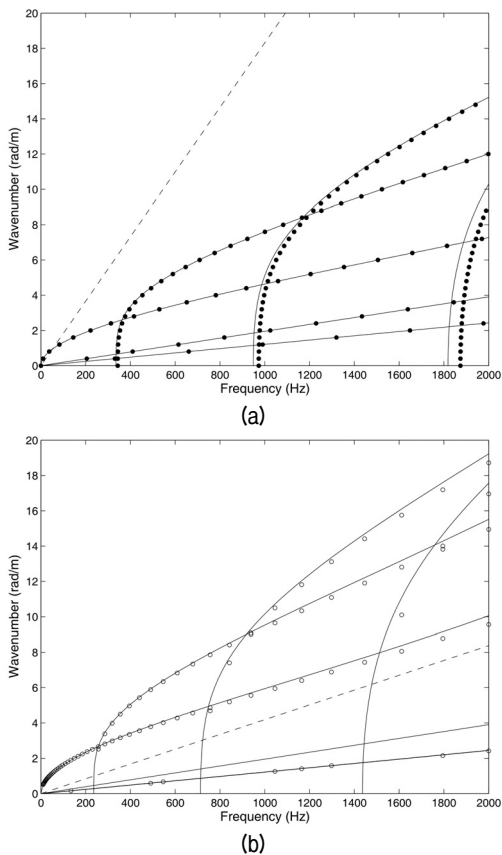


그림 8. (a) 파이프를 따라 전파하는 파동과 공기 중 음파의 분산 선도 (---, 공기중 음파), (b) 물과 연성된 파이프를 따라 전파하는 파동과 수중 음파의 분산선도 (---, 수중 음파)
 Fig. 8. (a) Dispersion curves of the propagating waves in the pipe and in air (---, acoustic wave in air), (b) in the water coupled pipe and in water (---, acoustic wave in water).

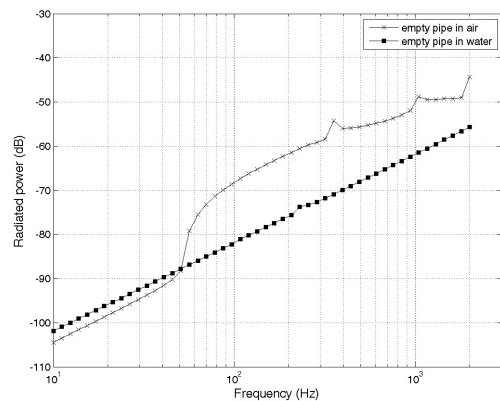


그림 9. 외부에서 공기 또는 물과 연성된 파이프의 음향방사파워 비교
 Fig. 9. Comparison of the powers radiated from the pipe coupled with air or water as the external fluid.

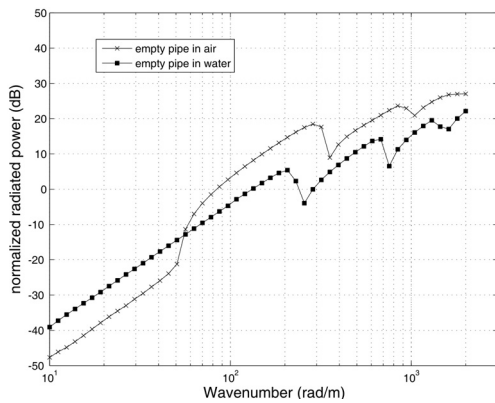


그림 10. 외부에서 공기 또는 물과 연성된 파이프의 정규 음향방사파워
 Fig. 10. Comparison of the normalized powers radiated from the pipe coupled with air or water as the external fluid.

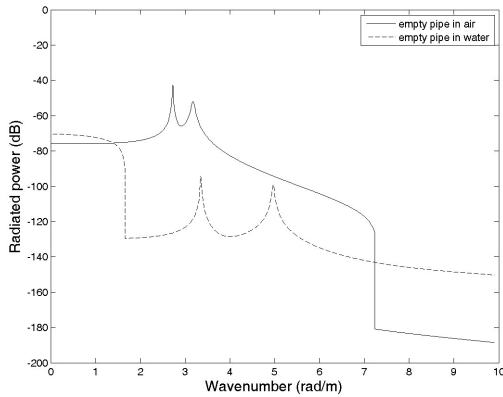


그림 11. 외부에서 공기 또는 물과 연성된 파이프의 395Hz 파수 영역 음향방사파워 비교
 Fig. 11. Comparison of the powers in the wavenumber domain at 395 Hz, radiated from the pipe coupled with air or water as the external fluid.

음향파워보다 약 10 dB 정도 높게 나타남을 알 수 있다. 그림 10에는 395 Hz에서 구한 파수영역의 음향방사파워를 나타내었다. 395 Hz에서 음파의 파수는 공기일 때 7.2 rad/m, 물일 때 약 1.7 rad/m이다. 그림 10에서 파이프의 파수 κ 가 음파의 파수보다 커질 때 방사음향파워가 급격히 감소하는 현상을 확인할 수 있다.

IV. 결론

본 논문에서는 외부 유체와 연성된 도파관 구조물의 진동 및 소음을 해석하기 위해 도파관유한요소 (WFE)와 파수경계요소 (WBE)를 연성시킨 도파관유한요소/경계요소 (WFE/BE) 방법을 제시하였다. 도파관유한요소법은 구조물의 단면만을 유한요소 모델링하므로 도파관유

한요소와 연결되는 파수경계요소를 2차원 Helmholtz 방정식으로부터 정식화하였다. 도파관유한요소/경계요소법의 적용 예로써 몰수된 파이프의 진동 및 소음 해석을 시도하고 그 결과를 이론해와 비교하였다. 먼저 외부 유체에 의한 파동의 분산선도 변화를 해석하고 이론해와 비교를 통해 제안된 파수유한요소/경계요소법이 이론해와 잘 일치함을 확인하였다. 또한 단위하중에 대한 파이프의 가진점 모빌리티를 해석하고 그 결과를 단순 Euler 빔의 결과와 비교함으로써 유용성을 확인하였다. 이러한 이론치와의 비교를 통해 WFE/BE 방법의 유용성을 확인한 후, 마지막으로 파이프에서 외부로 방사되는 음향파워를 해석하였다.

본 연구를 통해 외부 유체와 연성된 도파관 구조물의 진동 및 소음해석에 파수유한요소/경계요소법이 유용함을 확인하였다. 본 연구에서는 파수유한요소/경계요소법의 검증에 위해 단순 형상의 파이프 구조물을 다루었지만 이론해석이 어려운 복잡한 형상의 도파관 구조물의 진동 및 소음 해석에 본 방법이 유용할 것으로 판단된다.

감사의 글

이 논문은 2009년 울산대학교 연구비에 의하여 연구되었음.

참고 문헌

1. Nilsson, C.-M., *Waveguide Finite Element Applied on a Car Tyre*, PhD Thesis, MWL, KTH, Stockholm, 2004.
2. Ryue, J., Thompson, D. J., White, P. R., Thompson, D. R., "Investigation of propagating wave types in railway tracks at high frequencies", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 315, no. 1-2, pp. 157-175, 2008.
3. Sheng, X., Jones, C.J.C., Thompson, D.J., "Modelling ground vibration from railways using wavenumber finite- and boundary-element methods," *Proceedings of Royal Society A*, vol. 461, no. 2059, pp. 2043-2070, 2005.
4. Bartoli, I., Marzani, A., Lanza A Scalea, F., Viola, E., "Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 295, no. 3-5, pp. 685-707, 2006.
5. Fuller, C.R, Fahy, F. J., "Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 81, no. 4, pp. 501-518, 1982.
6. De Jong, C. A. F., *Analysis of Pulsations and Vibrations in Fluid-filled Pipe Systems*, Ph.D. Thesis, TNO Institute of Applied Physics, Delft, Eindhoven, 1998.
7. Muggleton, J. M., Brennan, M. J., "Wavenumber prediction of waves in buried pipes for water leak detection," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 249, no. 5, pp. 939-954, 2002.

8. 이영섭, 윤동진, “파이프-유체의 연성진동을 이용한 누수위치 식별 연구”, *한국소음진동공학회논문집*, 제14권 제2호, 95-104쪽, 2004.
9. Nilsson, C.-M., Jones, C.J.C., Thompson, D.J., Ryue, J., “A waveguide finite element and boundary element approach to calculating the sound radiated by railway and tram rails,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 321, no. 3-5, pp. 813-836, 2009.
10. Gavric, L., “Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 183, no. 4, pp. 531-543, 1995.
11. Finnveden, S., “Evaluation of modal density and group velocity by a finite element method”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 273, no. 1-2, pp. 51-75, 2004.
12. Leissa, A, *Vibration of Shells*, Acoustical Society of America, 1993.
13. Junger, M. C., Feit, D., *Sound, Structures and Their interaction*, The MIT Press, 1994.
14. Fahy, F., Gardonio, P., *Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response*, Academic Press, 2007.

저자 약력

•유 정 수 (Ryue, Jungsoo)

1995년: 부산대학교 기계설계공학과 (학사)
 1997년: 한국과학기술원 기계공학과 (석사)
 2005년: ISVR at University of Southampton (석사)
 2008년: ISVR at University of Southampton (박사)
 2009년 ~ 현재: 울산대학교 조선해양공학부 조교수
 ※ 관심분야: Waveguide에서의 파동 전파, 구조음향, 신호처리