East Asian Mathematical Journal
Vol. 26 (2010), No. 4, pp. 581-597

(예비)교사를 위한 완비성의 학습과 지도에 관한 소고

이 병 수

ABSTRACT. In this paper, the author focuses on the teaching-level and learning-level of the completeness axiom and its applications on $[0,1]$ and $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ by (expected) teachers in the school mathematics, which is usually introduced in the class of real analysis of university mathematics. Firstly the author considers the properties of the completeness axiom and its 19 equivalent theorems, next he deals with its importances in the school mathematics and finally he suggests the teaching and learning of the concepts on the completeness axiom and its applications on $[0,1]$ and $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ by (expected) teachers in the school mathematics.

Ⅰ. 서론

(예비)교사가 실제 수업을 통해서 해석학 영역을 바탕으로 하는 학교수학의 기본적인 틀을 만들기 위해서는 (예비)교사 자신이 스스로 첫째, 수학적 개념을 분석할 수 있어야 하며, 둘째, 그와 관련된 문제를 분석할 수 있어야 하며, 셋째, 학교수학과 수학의 다른 분야 및 실세계와의 연계성을 잘 파악할 수 있어야 한다(Usiskin, 2001). 한편, 극한, 함수의 연속성, 함수의 미분가능성, 함수의 적분가능성 및 무한급수의 수렴성의 개념들은 미분적분학과 실해석학에서 중요한 개념들로 모두 실수계(實數系, real number system)의 수학적 성질에 그 기반을 두고 있다. 따라서 (예비)교사가 실수계의 수학적 구조를 정확히 아는 것은 미분적분학 및 해석학 영역의 학습현장에서 효율적인 지도를 위해서는 필수불가결한 일이다. 실수계 $\mathbb{R}$은 완비성(完備性, completeness property)과 순서성(順序性, ordered property) 및 대수성(代數性, algebraic property)을 갖춘 유일한 완비순

2010년 8월 투고, 2010년 8월 심사완료.
2000 Mathematics Subject Classification: 97C70
Key words: 완비성 공리, 상한, 하한, 학교수학에서의 완비성, 완비성의 학습과 지도

서체(complete ordered field) (Trench, 2003, 정동명, 조승제, 2004, p.62 정리 2.4.2)이다. 실제로 완비성 개념은 미적분 개념을 논리적으로 엄격하게 다루는데 있어서 필수적인 내용으로 다양한 종류의 극한 과정에 활용되고 있다. 완비적인 특성(completeness)을 가지고 있는 $[0,1]$과 $\mathbb{R}$은 직접적이든 혹은 간접적이든, 양성적이든 혹은 음성적이든 간에 초, 중, 고등학교에서 기본적으로 많이 다루어지고 있는 공간이다. 예를 들면, 중학교 2학년 교과서에 실수 집합에 대한 개념을 다루지 않고 또한 실수라는 용어를 사용하지도 않고 그냥 수의 집합이라고 언급하면서 평면 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 위에 일차함수의 그래프를 많은 페이지에 걸쳐서 그려 놓은 것을 볼 수 있다.(박종률 외 5명, 2009, p.143). 이러한 예는 다른 교과서(최용준 외 5명, 2010, 이준열 외 5명, 2010)에서도 마찬가지이다. 그러므로 (예비)교사의 입장에서는 실수집합의 수학적인 특성인 완비적 특성을 잘 이해하고 또 그것이 어떻게 활용되고 있는가를 스스로 확인할 필요가 있다. 왜냐하면 대수적 특성과 순서적 특성은 그 성질이 교과서에 양성적으로 뚜렷하게 보이고 다루기가 쉽지만 완비적 특성은 그렇지 않기 때문이다. 학교수학에서 다루어져야 하고 또 다루고 있지만 공개적으로 쉽게 다룰 수 있는 내용은 아니기에 더욱 중요하기 때문이다.

수리논리학을 매개체로 공리적 체계(axiomatic system)를 형식적 체계(formal system)로 바꾼 수학의 한 이론을 수학적 체계라고 하며, 이러한 수학적 체계는 무정의 개념(undefined concept), 전체집합, 집합의 대수, 관계(relation)들의 집합, 연산(operation)들의 집합, 논리적 공리들의 집합, 비논리적 공리들의 집합, 정리들의 집합, 정의들의 집합으로 구성된다(이병수, 1996). 특별히 유리수 계, 실수 계, 복소수 계 등이 그러한 예에 속한다. 유리수 계에서 기본적인 전체집합은 유리수들의 집합이고 실수 계에서 기본적인 전체집합은 실수들의 집합이며, 복소수 계에서 기본적인 전체집합은 복소수들의 집합이다. 만일 실수 집합을 바탕으로 수학적 성질을 논한다면 구간 $(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$의 최댓값은 없지만 이 구간의 상한은 $\sqrt{2}$이다. 반면, 유리수 집합을 바탕으로 수학적 성질을 논할 때는 구간 $(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$의 최댓값도 물론 존재하지 않으며 상한도 없다.

실수계는 자신의 진부분집합인 유리수계와 자신의 확대집합인 복소수계가 가지고 있지 못하는 해석학의 많은 부분에서 응용될 정도로 매우 중요한 수학적 성질인 완비성 개념을 가지고 있다. 해석학 및 응용수학의 거의 많은 부분에서 가장 많이 활용되고 있는 완비성 개념을 가진 일반적인 공간인 바나흐 공간(Banach space)은 완비성 개념이 인위적으로 주어진 공간이다. 물론 자연적으로 완비성 개념을 가지고 있는 힐버트 공간(Hilbert space)과 같은 완비내적벡터공간(complete inner product vector space)도 있지만 그 활용도는 바나흐 공간보다는 못하다. 가장 완벽하면서도 가장 단순한 실수의 집합인 실수계는 실제로는 1차원

의 힐버트 공간이다. 신개정판 고등학교 교과서는 물론이고 초등 및 중등의 모든 교과서에서는 실질적으로 실수 집합을 이용하여 수학적 내용을 학습하고 지도하면서도 실수를 실질적으로 다루거나 실수의 수학적 성질을 언급한 내용을 발견할 수 없다. 고등학교 과정에 처음으로 소개되는 극한 개념은 연속 개념, 미분 개념 및 적분 개념에 필수적인 기본적인 개념이므로 사실상 해석학 및 응용수학의 가장 핵심적인 뿌리 중에서도 뿌리 근간에 해당하는 부분이다. 고등학교 수학 교과서 극한 개념에서 다루는 가장 쉬운 예는 구간 $[0, 5]$에서 정의된 함수 $y = 2x + 3$의 특정한 점 $a = 3$에서의 극한값을 다루는 과정에서 "x가 3에 한없이 가까이 갈 때 극한값은 ..." 부분에서 x가 3에 한없이 가까이 가는 과정에서 그 x는 셀 수 없을 정도로 무수히 많은(uncountably infinite) 무리수를 건너야 된다는 사실을 간과하고 있음을 알 수 있다. 또한 구간 $[0, 3)$의 상한과 구간 $(3, 5]$의 하한이 모두 3임을 쉽게 간과하고 있다.

소고에서는 대학수학에서 다루고 있는 완비성 공리와 그것의 응용을 확인하고 완비 거리공간 $[0, 1]$과 $\mathbb{R}$ 및 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$을 바탕으로 학교수학에서 다루고 있는 완비성 개념을 확인 및 이해하며 그것을 바탕으로 대학수학과 (예비)교사들의 지도에서 다루어야 할 완비성 개념의 지도 수준과 학습 수준의 정도를 제시하고자 한다.

(예비)교사가 최댓값과 최솟값의 확장 개념인 상한과 하한의 기본적인 활용을 알아야만 극한 개념을 더 깊이 이해하고 그것을 바탕으로 좀 더 나은 학습지도를 할 수 있다는데 초점을 맞추어,

Ⅱ장에서는 완비성 공리 및 동치정리들을 다루고,
Ⅲ장에서는 완비성 개념의 수학교육적 중요성을 다루며,
Ⅳ장에서는 (예비)교사를 위한 완비성의 학습과 지도를 다룬다.

Ⅱ. 완비성 공리 및 동치 정리들

현대수학 특히 응용수학을 포함한 해석학 모든 분야에서 기본적으로 가장 많이 다루고 있는 아름답고 완벽한 공간은 바나흐(Banach) 공간이다. 이 공간은 인위적으로는 완비적인 수학적 특성을 가지고 있는 공간으로 자연스럽게 완비적인 수학적 특성을 가지고 있는 공간인 힐버트(Hilbert)공간보다는 좀 더 일반적이다. 놈-벡터 공간(normed vector space)에 인위적으로 완비성 개념을 도입하여 바나

흐(Banach) 공간을 만들어야 할 정도로 해석학에서의 완비성 개념의 수학적 중요도는 실로 매우 크다고 할 수 있다. 단위구간 $I=[0,1]$은 완비거리공간으로서 확장된 실수계 $[-\infty,+\infty]$와 호메오모르픽(homeomorphic)하며, 위상공간으로서, 컴팩트(compact) (따라서 closed, bounded), 축약가능한(contractible), 경로로 연결된(path connected), 국지적으로 경로로 연결된(locally path connected) 성질을 가지고 있다. 또한 전순서 집합(totally ordered set)이며 자신의 모든 부분집합들의 상한과 하한을 가지는 완비속(complete lattice)이다. 단위구간 $I=[0,1]$은 실해석학(real analysis)과 호모토피 이론(homotopy theory)에서 많이 활용되고 있으며, 퍼지논리에서는 Boolean domain $\{0,1\}$의 일반화로서 0과 1을 포함해서 0과 1사이의 값 중에서 단 하나만 취하는 경우에 응용되고 있다. 또한 열린 구간 $(0,1)$과 호메오모르픽하는 실수들의 집합 $\mathbb{R}$은 완비성(completeness property)과 순서성(ordered property) 및 대수성(algebraic property)을 갖춘 유일한 완비순서체(complete ordered field)(Trench, 2003)로 다양한 종류의 극한 과정에 활용되고 있으며, 미적분 개념을 엄격하게 논리적으로 다루는 데 있어서 필수적인 개념이다.

실수집합 $\mathbb{R}$에서의 다음의 완비성 공리

"실수들의 집합 $\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 집합 A가 위로 유계이면 상한이 반드시 존재한다 (Every nonempty subset A of $\mathbb{R}$ which is bounded above has a supremum)."

는 $\mathbb{R}$을 포함한 모든 유한차원의 공간 및 $(0,1)$과 호메오모르픽한 구간 (a,b)가 가지고 있는 가장 본질적인 수학적 성질이다. 다음에 소개되는 완비성 공리를 포함한 21가지의 정리들은 완비성 공리와 동치이거나 혹은 완비성 공리로부터 유도되는 정리들로 해석학의 많은 부분에서 활용되고 있는 중요한 정리들이다.

1. 완비성 공리와 동치 정리들

1) 완비성 공리(Completeness axiom) 또는 Supremum property
2) 완비적 특성(Completeness property) 또는 Infimum property
3) 중간값 정리(Bolzano intermediate value theorem)
4) 코시수렴판정법 ($\mathbb{R}$에서 코시(Cauchy) 수열은 수렴한다).
5) 단조수렴정리(Monotone convergence theorem)
6) Bolzano-Weierstrass theorem (for sequences)

7) 급수에 대한 코시수렴판정법(Cauchy convergence criterion for series)

$$x_n \geq 0,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \ (n \in \mathbb{N})$$

$$\sum x_n \ : \text{수렴} \Leftrightarrow \langle S_n \rangle \ : \text{수렴}$$

8) 축소구간정리 (Nested interval property)
9) 근의 정리 (Location of roots theorem)
10) 구간보존정리(Preservation of intervals theorem)
11) Dedekind 정리
12) Bolzano-Weierstrass theorem (for sets)
13) Heine-Borel theorem
14) 평등연속정리(Bartle & Sherbert, 2000, p. 138)
15) 유계정리(Boundedness theorem, Bartle & Sherbert, 2000, p. 130)
16) 집합 S가 R의 공집합이 아닌 부분집합이고 S의 상계인 M이 $M = \sup S$일 필요충분조건은 M보다 작은 S의 임의의 원소 x에 대해 $x < y < M$을 만족하는 y가 S에 존재한다.
17) 최대치・최소치 정리
18) Rolle 정리
19) 평균치 정리
20) 일반화된 평균치 정리(Generalized mean value theorem)
21) 실수집합은 비가산 집합이다.

2. 정리들 간의 관계성

위의 21가지의 수학적 성질들의 관계성은 다음과 같다. 아래의 도표에서 보는 것처럼 완비성 공리는 해석학 및 응용수학의 모든 분야에서 거의 핵심적인 내용이라고 할 수 있다. 동치가 되지 않는 몇 몇 정리들은 역이 성립하는 것을 가정하고 해법에 도전해 볼 만한 것들이다.

a) 1 iff 4 (Trench, P. 527, D'Angelo & West, 2000, P. 278),
b) 1 iff 8 (D'Angelo & West, 2000, P. 270),
c) 5 iff 7 (Bartle & Sherbert, 2000, p. 91),
d) 1 only if 8 (Bartle & Sherbert, 2000, p. 46),
e) 8 only if 9 (Bartle & Sherbert, 2000, p. 132),
f) 3 iff 9 (Bartle & Sherbert, 2000, p. 133),

g) 3 only if 10 (Bartle & Sherbert, 2000, p. 135),
h) 6 only if 15 (Bartle & Sherbert, 2000, p. 130),
i) 1 iff 2 (Bartle & Sherbert, 2000, p.37),
j) 1 iff 11 (정동명, 조승제, 2004, pp. 52-53),
k) 5 only if 6 (Bartle & Sherbert, 2000, p. 79),
l) 8 only if 12 (정동명, 조승제, 2004, p. 80)
m) 12 only if 6 (정동명, 조승제, 2004, p. 112)
n) 8 only if 3 (정동명, 조승제, 2004, p. 214)
o) 13 only if 12 (Bartle & Sherbert, 2000, p. 323)
p) 8 only if 13 (Bartle & Sherbert, 2000, p. 321)
q) 6 only if 4 (정동명, 조승제, 2004, p. 120, Bartle & Sherbert, 2000, p. 82)
r) 6 only if 14 (Bartle & Sherbert, 2000, p. 138)
s) 1 iff 16
t) 3 only if 1
u) 15 & 6 only if 17
v) 17 only if 18
w) 19 only if 18
x) 20 only if 19
y) 20 iff 18 (이병수, 2009)
z) 8 only if 21 (Bartle & Sherbert, 2000, p. 47, Theorem 2.5.4)
A) 1 only if 5

증명. (t) 실수집합 $\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 부분집합 A가 있어 위로 유계이지만 $\sup A$가 존재하지 않는다고 가정하자. 실가함수 f를 x가 A의 상계일 때 $f(x)=1$, 상계가 아닐 때 $f(x)=-1$이라고 정의하면, A에 속하는 임의 원소 a보다 작은 모든 x에 대해서 $f(x)=-1$이다. 임의 실수 y에 대해

(i) $f(y)=1$이면, y는 A의 상계이다. $\sup A$는 존재하지 않으므로, $z<y$를 만족하는 A의 상계 z가 존재한다. 따라서 임의 양수 $\varepsilon>0$에 대해 $\delta=y-z$라 하면

$$|x-y|\leq\delta$$

를 만족하는 x에 대해

$$y-x\leq\delta=y-z$$

이므로 $x>z$이다. 따라서 x는 A의 상계이다. 그러므로 $f(x)=1$이 되어

$$|f(y)-f(x)|=|1-1|=0\leq\varepsilon$$

이다. 따라서 $\lim_{x \to y} f(x) = f(y)$이므로 함수 f는 y에서 연속이다.

(ii) $f(y) = -1$이면 y는 A의 상계가 아니므로 $a > y$를 만족하는 $a \in A$가 존재한다. $\delta = a - y$라 하면

$$|x-y| = |y-x| \le \delta$$

를 만족하는 임의 x에 대해

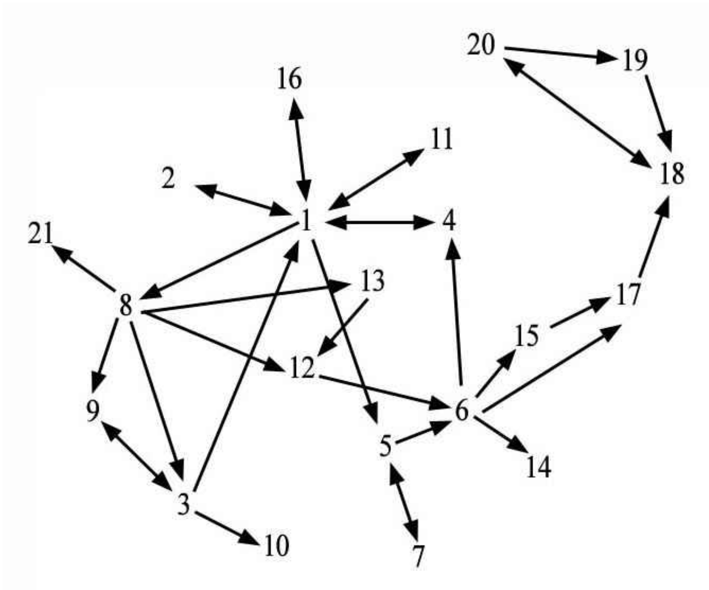
$$-(a-y) < x-y < a-y$$

이므로 $x < a$이다. 따라서 x는 A의 상계가 아니다. 그러므로 $f(x) = -1$이 되어

$$|f(x) - f(y)| = |-1-(-1)| = 0 < \varepsilon$$

이다。따라서 $\lim_{x \to y} f(x) = f(y)$이므로 함수 f는 y에서 연속이다.

(i), (ii)에 의해 함수 f는 구간 $[-1, 1]$에서 연속이지만 $f(x) = 0$를 만족하는 x는 존재하지 않는다. 즉 중간값 정리가 성립하지 않음을 알 수 있다.



Ⅲ. 완비성 개념의 수학교육적 중요성

최소의 비용(투자)으로 최대의 이익(효과)을 얻는 것은 최적화문제의 상징이다. 이는 학습과 지도의 현장에서도 적용되는 내용이다. 우리의 삶 속에서 실질적으로 매우 중요한 문제 중에 하나인 최적화 문제를 다루는데 있어서 가장 응용이 많이 되는 수학적 이론이 미분 개념이다. 따라서 최적화 문제는 그 문제에 사용

된 주요 함수의 최댓값 문제 및 최솟값 문제로 귀착되며 그 바탕에는 미분 개념이 있다. 그러므로 극한 개념은 최댓값 문제 및 최솟값 문제를 학습하는 데에 있어서 필수적인 내용이다. 최댓값-최솟값 정리 (또는 극값 정리)는 유계폐구간 $[a, b]$에서 연속인 함수가 최댓값과 최솟값을 가짐을 보장하지만, 그 값이 존재하는 점과 그 점에서의 값을 구하는 것은 미분의 문제이기 때문이다

일반적인 유계폐구간 $[a, b]$는 단위구간 $[0, 1]$과 호메오모르픽하므로 똑같은 위상적인 성질을 가지고 있다. 따라서 함수의 연속성을 가지고 수학적 성질을 연구할 때 두 구간 중 어느 것을 이용해도 무방하다. 학교수학에서 일반적으로 유계폐구간 $[a, b]$에서 정의된 연속 함수 f는 그 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 즉 연속함수 f에 의한 함수값들의 집합은 유계이다. 이것은 학교수학에서 다루는 극한 개념이나 미분 및 적분 개념들이 모두 유계폐구간에서 정의된 연속함수에 한정되어 있음을 암시한다. 처음부터 주어진 정의역에서 유계인 함수를 다룬다면 그 정의역이 유계폐구간이든 아니든 관계없이 유계함수의 극한 개념이나 미분 및 적분 개념을 다룰 수 있다는 것을 (예비)교사가 사전에 알고 있다면 보다 나은 학습과 지도의 효과를 얻을 수 있을 것이다. 유계함수(有界函數, bounded function)의 적분가능성에 대한 개념은 완비성 공리를 바탕으로 한다. 이것은 수렴하는 수열들의 집합이 유계수열(有界數列, bounded sequence)들의 집합의 진부분집합이라는 사실과 그 맥을 같이 한다. 유계수열의 상극한(上極限, limit superior) 개념과 하극한(下極限, limit inferior) 개념도 완비성 공리를 바탕으로 이론이 전개되며 수열의 성질에 관계없이 모든 유계수열에 항상 존재하는 수열의 상극한과 하극한을 이용하여 그 수열의 수렴 여부를 판단하는 것이 수열의 극한을 다루는 가장 일반화되고 세련된 방법이다. 이와 같이 중요한 완비성 개념을 구체적으로 활용한 예로는 임의 구간에서 유계인 함수들의 적분가능성에 관한 것을 들 수 있다. 유계 함수들의 적분가능성에 관한 내용은 고교수학에서 다루는 유계폐구간에서 정의된 연속함수들의 적분가능성에 대한 개념을 포함하고 있으므로 그 응용 범위가 훨씬 넓고 일반적이다. 임의 구간에서 정의된 유계함수들의 적분가능성 개념에서는 완비성 개념을 바탕으로 한 상한, 하한의 개념이 핵심적인 역할을 한다. 실수집합을 다루면서도 실수라는 단어조차도 사용하지 못하는 중학교 1학년 또는 2학년 교과서에서 완비공간인 평면 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 상에 직선을 그어 가면서 현장수업을 해야 하는 교사들에게는 무엇보다도 완비성에 대한 이해와 활용이 크게 요구된다고 할 수 있다.

Ⅳ. (예비) 교사를 위한 완비성의 학습과 지도

실수집합에서 유한집합은 최댓값과 최솟값을 가진다. 무한집합인 경우에는 그

집합이 닫힌 집합이면 마찬가지이나 열린집합의 경우에는 그렇지 않다. 예를 들면, 자연수 집합 $\mathbb{N}$과 유리수 집합 $\mathbb{Q}$는 최댓값과 최솟값을 가지고 있지 않으며 구간 $(-2, 1)$도 마찬가지이다. 실수 x의 절대치함수 $|x| = \max\{x, -x\}$의 개념을 완비순서벡터공간(complete ordered vector space)으로 확장하면 상한(supremum)과 하한(infimum)의 개념이 필요하게 된다. 이는 유한집합의 경우에는 개수라는 용어의 사용으로 충분하지만 무한집합의 경우에는 농도라는 좀 더 일반적인 개념을 사용하는 것과 같다. $\lim_{x\to 2} 2x = 4$에서 x가 2를 중심으로 오른쪽에서 2에 한없이 가까이 가지만 x는 2가 아니다. 그럼에도 불구하고 $x=2$를 대입하여 그 극한이 4라는 것을 유도한다. 이것은 만약 함수 $f(x) = 2x$의 정의역이 구간 $[0, 5]$라면 완비성 공리에 의해 부분구간 $(2, 5]$의 하한이 존재하며 그 값이 2이고 따라서 우극한이 4이며, 또 다른 부분구간 $[0, 2)$의 상한이 존재하며 그 값도 역시 2이다. 따라서 좌극한은 4이다. 그러므로 값 $x=2$에서의 함수값이 4임을 의미하는 것이다.

두 함수 $f(x) = x+2$와 $g(x) = (x^2-4)/(x-2)$의 $x=2$에서의 극한값은 똑같이 4이다(이준열 외 9인, 2010). 함수 g는 $x=2$에서 정의되지 않았음에도 불구하고 x가 2를 중심으로 2의 오른쪽에 있는 임의 한 점과 왼쪽에 있는 임의 다른 점을 출발점으로 해서 양방향에서 2로 한없이 가까이 접근함으로써 그 극한값을 얻게 된 것이다. 여기에서도 우극한을 논할 때 부분구간 $(2, \infty)$의 최솟값은 존재하지 않지만 최소상계값 2는 존재하므로 2에서의 우극한 값이 4임을 알 수 있다. 마찬가지로 좌극한을 논할 때 부분구간 $(-\infty, 2)$의 최댓값은 존재하지 않지만 최대하계값 2는 존재하므로 2에서의 좌극한 값이 4임을 알 수 있다.

다음의 정리 A와 정리 B 및 예제 A와 예제 B는 학교수학에서 다룬 수열의 내용이 완비성 공리와 실질적으로 어떻게 적용되고 있는가를 보여주고 있다.

【정리 A】 단조수렴정리 (Bartle & Sherbert, 2000, p.69)

(1) 증가하는 수열 $\langle x_n \rangle$이 위로 유계이면 $\langle x_n \rangle$은 수렴하고 극한값은

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n \text{이다.}$$

(2) 감소하는 수열 $\langle x_n \rangle$이 아래로 유계이면 $\langle x_n \rangle$은 수렴하고 극한값은

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n \text{이다.}$$

【정리 B】(정동명, 조승제, 2004)

E는 $\mathbb{R}$의 부분집합으로 공집합이 아니며, 실수 a는 E의 집적점이다.

$f: E \to \mathbb{R}$ 가 함수이고 ℓ이 실수일 때 다음의 두 명제는 서로 동치이다.

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

(ii) a에 수렴하는 E의 임의 수열 $\langle x_n \rangle (x_n \neq a,\ n \in \mathbb{N})$에 대해 $\lim_{x \to a} f(x_n) = \ell$이다.

【예제 A】 함수 $f(x) = 2x$의 $x = 2$에서의 우극한은 $\lim_{x \to 2^+} 2x = 4$이다. 한편, 수열 $\langle x_n \rangle = \left\langle 2 - \frac{1}{2n} \right\rangle$의 극한은 $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \left(2 - \frac{1}{2n} \right) = 2$이며, 상의 수열 $\langle f(x_n) \rangle = \left\langle 4 - \frac{1}{n} \right\rangle$은 증가하며 위로 유계이므로 【정리 A】에 의해 $\sup_n f(x_n)$이 존재한다. 따라서 극한

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \left(4 - \frac{1}{n} \right) = \sup_n \left(4 - \frac{1}{n} \right) = 4$$

가 되어 【정리 B】를 만족함을 알 수 있다.

【예제 B】 함수 $f(x) = 2x$의 $x = 2$에서의 좌극한은 $\lim_{x \to 2^-} 2x = 4$이다. 한편, 수열 $\langle x_n \rangle = \left\langle 2 + \frac{1}{2n} \right\rangle$의 극한은 $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{1}{2n} \right) = 2$이며, 상의 수열 $\langle f(x_n) \rangle = \left\langle 4 + \frac{1}{n} \right\rangle$은 감소하며 아래로 유계이므로 【정리 A】에 의해 $\inf_n f(x_n)$이 존재한다. 따라서 극한

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \left(4 + \frac{1}{n} \right) = \inf_n \left(4 + \frac{1}{n} \right) = 4$$

가 되어 【정리 B】를 만족함을 알 수 있다.

한편, 주어진 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합 수열 $\langle S_n \rangle$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ $(n \in \mathbb{N})$의 수렴, 발산을 이용해서 각각 $\sum a_n$의 수렴, 발산을 정의하는 부분에서 대부분의 교과서에서 다루는 무한급수는 그 항이 모두 음이 아니며 $\langle S_n \rangle$은 위로 유계이다. $\langle S_n \rangle$은 증가하므로 단조 수렴정리에 의해 $\lim_{n \to \infty} S_n = \sup_n S_n$이 된다. 예를 들면, $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$(최용준 외 9명, 2010)와 $\sum \frac{1}{n(n+1)}$(우정호 외 7명, 2010) 등이 그렇다. 발산하는 경우에는 $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$인 급수만 다루고 있다. 예를

들며, $\sum \frac{n}{2n-1}$(최용준 외 9명, 2010), $\sum (-1)\frac{n-1}{n+1}$(우정호 외 7명, 2010) 등이 있다.

Ⅱ장에서 다룬 것처럼 완비성 공리는 다음의 명제

“집합 S가 R의 공집합이 아닌 부분집합이고 S의 상계인 M이 $M = \sup S$일 필요충분조건은 M보다 작은 S의 임의의 원소 x에 대해 $x < y < M$을 만족하는 y가 S에 존재함”을 의미한다.

이 내용은 집합 S 안에서 $\sup S$보다는 비록 작은 값이지만 우리가 원하는 만큼 $M = \sup S$에 한없이 가까이 접근할 수 있는 수열 $\langle y_n \rangle = \langle M-(M-x)/(n+1) \rangle$ (단, $y_n > x$, $n \in \mathbb{N}$)을 만들 수 있음을 의미한다.

일반적으로 수학적 능력이 있는 좋은 수학교사는 깊이 있고 든든한 수학적 배경을 가지고 있다는 인식이 널리 받아들여지고 있다(Shulman 1986, Cooney & Wiegel 2003). 그럼에도 불구하고 실질적으로 어떤 종류의 수학적 능력이 필요한가에 대해 아직까지 합의된 것도 없을 뿐 만 아니라 학생 중심의 패러다임에서 성공적인 지도에 대해 무엇이 결정적인가에 대해 합의된 것도 없다. 그러나 “당신들의 학생들이 하는 소리에 귀를 기우려라.” 라는 주장은 수학교실에서 학생중심의 학습지도에서의 아젠다(협의사항)로서는 결정적인 내용이다(Prediger, 2010).
(예비)교사가 학습 지도와 관련된 내용을 좀 더 넓은 차원에서 구체적으로 알고 있으면 알고 있는 그만큼 수학적 능력을 인정받을 수 있으며 또한 학습과 지도의 흐름을 효율적으로 끌어갈 수 있을 것이다.

다음의 내용들은 학교수학에서 완비성 개념의 지도와 관련된 실제로 다루어지고 있는 것과 완비성 개념과 관련하여 학생들의 직관력을 다룰 수 있는 내용들을 소개하고 있다.

(1) 학교수학에서는 완비적인 특성을 구체적으로 다루고 있지는 않지만 학습의 저변에는 온통 그러한 특성이 널려 있다. 예를 들면, 자연수 집합을 다루고 있는 중학교 1학년 교과서(박영훈 외 6명, 2009)에서 ‘정의역을 수 전체의 집합으로 확장하면 함수 $y = 2x$의 그래프는 아래의 오른쪽 그림과 같이 원점을 지나는 직선이라…’ 고 하면서 완비적인 특성을 가진 공간 $\mathbb{R}$ 을 직접 다루면서도 실수에 관해서는 전혀 언급을 하지 않고 있다. 또한 그 그래프는 역시 완비 공간인 평면

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$에 있다. 여기에서 실수들의 집합과 실선상의 점들의 집합이 일대일 대응을 하듯이 실수들의 순서쌍들의 집합 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x, y): x, y\in\mathbb{R}\}$과 평면상의 점들의 집합이 서로 일대일 대응(이병수, 1996, p.153)함을 인지시킬 수 있다면 학생들의 직관의 활용을 기대할 수 있을 것이다.

(2) 함수들을 구간상에서 정의하고 다루며 극한 개념의 사용에서도 변수 x의 범위가 구간임으로 모든 구간에 상한과 하한의 개념이 들어 있음을 적절한 예를 통해서 인지시키는 것도 학생들의 직관성 배양에 도움이 될 것이다.

(3) (예비)교사가 초등학교 교재에서 소개하는 평면도형과 입체도형 즉 볼록다면체와 정육면체 등은 컴팩트(compact) 집합의 하나의 예임을 회상하여 학생들의 직관을 활용하여 그림에 대한 차원이 있는 인식을 가질 수 있도록 유도하는 것은 바람직하다.

(4) 완비성 공리를 직관적으로 언급한다면, 실선(real line)에는 불연속점이 없다는 것을 의미한다. 즉 실선상의 점들의 집합과 실수들의 집합은 서로 일대 일 대응하므로 실수 집합에는 갭(gap)이 없다는 의미이다. 마찬가지로 순서쌍들의 집합과 평면상의 점들의 집합이 서로 일대 일 대응하므로 순서쌍들의 집합에도 빈틈이 없음을 의미한다. 이러한 내용은 3차원 이상의 유한차원 공간까지 확장하여 지도할 수 있을 것이다. 사실 이 내용들은 직관적으로 연속성의 공리를 의미한다.

(5) 자연수 집합은 1에 의해 아래로 유계이지만 위로는 경계가 없다. 수학적 귀납법(mathematical induction)의 존재 이유가 여기에 있음을 알 수 있다.

(6) 학교수학에서 다루는 미분적분학은 극한과정(limiting process)을 이용해서 대수, 기하, 및 삼각법을 포함한 기본적인 수학에서 다루는 개념을 좀 더 일반적인 개념으로 확장하여 학습 및 지도를 하고 있다. 예를 들면, 직선 $y=2x+b$의 기울기 개념을 극한 개념을 이용해서 곡선 $y=x^2$의 점 $x=2$에서의 기울기 개념으로 확장하는 것이다. 또는 주어진 구간 안에서의 선분의 길이를 구하는 것을 극한 개념을 이용해서 곡선의 길이를 구하는 것으로 확장하고 있다. 이것은 선분으로 둘러싸인 영역의 면적 개념을 곡선으로 둘러싸인 영역의 개념으로 확장한 것과 같고 직육면체의 부피 개념을 고구마의 부피를 구하는 개념으로 확장한 것과 같다. 이처럼 완비성 공리를 이용하여 다양한 종류의 극한 과정을 정의하고 발전시키기 위해서 처음부터 완비적 특성을 가정하여 공리화한 것과 같이 개념

확장의 바탕에는 학생들이 완비적 개념이 존재함을 직관적으로 이해할 수 있도록 (예비)교사의 보조적인 도움이 필요하다.

(7) 완비성 공리는 유리수가 아닌 수의 존재성을 보였으며 결과적으로 아주 완벽하고 깔끔한 실수들의 집합의 존재성을 보였다.

(8) "한 점 c에서 함수 f의 극한을 논하기 위해서는 함수 f가 c의 어떤 한 근방에서 반드시 정의되어야 한다"는 내용을 주지시키는 것도 완비성 개념을 이해시키는 한 방법이 될 수 있다.

(9) 함수 $f(x)$에서 x가 c와 다른 값을 가지면서 c에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 d에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 d에 수렴한다고 한다. 우극한과 좌극한의 존재성을 먼저 밝히고 그 두 값이 똑 같을 때 그것이 바로 극한이라는 것을 언급하는 것이 완비성 공리의 활용 의미를 효과적으로 학습 지도를 하는 것이 될 수 있고 또한 극한의 일반성을 다루는 계기가 될 수 있다.

(10) 학교수학에서 함수 f의 연속성을 다룰 때 f의 정의역이 유계 닫힌구간 혹은 유계 열린구간 또는 유계 반 열린구간으로 그 구간의 최댓값과 최솟값의 존재성을 보장할 수는 없지만 상한과 하한이 항상 존재하는 것은 보장되어 있어 있음을 인지시킬 수 있을 것이다.

(11) $\sup S$가 S에 속하면 $\sup S = \mathrm{Max}\, S$이고 $\inf S$가 S에 속하면 $\inf S = \min S$이다 를 다루어 완비성 개념을 실질적으로 이해하는데 도움을 줄 수 있을 것이다.

(12) "$S = [0, 1)$라 하면 $\sup S = 1$은 S에 속하지 않는다. 실제로 $\max S := a$가 S에 존재한다면 $a < 1$이므로 $a < (a+1)/2 < 1$가 되어 $(a+1)/2$가 S에 속하게 되어 모순이다"라는 사실을 학생들로 하여금 직접 느끼게 하여 완비성 개념의 이해를 도울 수 있을 것이다.

(13) 실수계(real number system) $\mathbb{R}$은 완벽한 공간이면서도 또한 상대적으로 가장 단순한 공간 중의 하나라고 할 수 있다. 확장된 실수계(extended real number system)와 호메오모르픽(homeomorpic)하게 대응되는 유계폐구간(bounded closed interval) $[0, 1]$도 완벽한 공간 중의 하나라는 사실을 이해시키는 것도 한 방법이다.

(14) 수열 $\langle 1/n \rangle$은 열린구간 $(0, 1)$에서 코시 수열이며 그 극한 0는 $(0, 1)$에 속하지 않는다. 즉 $(0, 1)$은 완비적이 아니다. 그러나 완비적인 공간 $\mathbb{R}$은 열린구간 $(0, 1)$과 호메오모르픽(homeomoric)하므로 완비성은 위상적 특성(topological property)이 아님을 알 수 있다.

Ⅵ. 결론

교사가 수학적 개념을 지도할 때 최대한의 학습 효과를 얻기 위해서는 그 개념이 교사 자신에게는 인식 목표가 될 수 있을 정도로 조사해서 이해할 수 있어야 한다(Simon, 1993, p.234). 수학을 가르치는 목적중의 하나는 수학적 내용의 형식적 구조와 인지적 과정 사이에서의 괴리를 극복시키기 위한 수단으로서 일상 속에서의 사고와 기술적이고 과학적인 사고를 서로 소통시키는 것이다.(Wilhelm et al., 2001, p.72). 이처럼 수학교사는 학습지도 현장에서 학생들에게 전달할 학습 내용 이상의 내용을 깊고 광범위하게 알고 있어야만 보다 나은 학습 효과를 기대할 수 있는 것이다. 이것은 수학적 내용의 이해(understanding) 차원을 넘어 유연한 수학적 사고(flexible mathematical thinking)의 차원을 강조하는 것이다.

소고에서는 교과서에 실려 있는 내용을 바탕으로 (예비)교사가 완비성 개념을 깊이 이해를 해야만 극한 과정의 진미를 학습 현장에서 학생들에게 전달할 수 있음을 연구하였다. 또한 실수 집합의 수학적 중요성의 의미를 다시 한번 확인하는 계기를 마련하였다.

수학의 지식(knowledge of mathematics)은 수학의 절차적인 면과 근본 바탕이 되는 개념을 의미하며, 수학에 관한 지식(knowledge about mathematics)은 수학의 본성과 수학적 지식의 창조 과정 및 수학을 하는 것의 의미를 말한다. “(예비)교사는 수학의 지식과 수학에 관한 지식을 다 습득해야 한다(Ball, 1991)”는 입장에서 완비성 개념의 활용 등을 다루었으며, 이러한 사실과 관련하여 (예비)교사들이 어느 수준까지 완비성에 관한 내용을 숙지해야만 하는가에 초점을 두고 내용을 전개하였다.

이런 맥락에서 (예비)교사는 무엇보다도

첫째, 수학적 개념과 관련된 아이디어를 설명하고 표현하는 여러 가지 방법을 인지하고 제시해야 한다. 예를 들면, 최대치・최소치 정리의 증명을 소개하면서 상한과 하한에 관련된 학생들의 직관과 반응을 유도할 수 있을 것이다.

둘째, 수학적 아이디어가 어떻게 생겼으며 또 어떻게 변화 발전하고 있는가를

이해할 수 있어야 한다. 예를 들면, 구간 $[0, 1]$과 $(0, 1)$의 차이점을 다양한 수학적 내용의 차원에서 다루면서 그들의 직관을 자극하여 최댓값과 상한, 최솟값과 하한의 차이점을 다룰 수 있을 것이다.

셋째, 문제 풀이를 위한 다양한 대체 접근방법을 창안하고 또한 알고 있어야 한다. 예를 들면, 한 문제를 두고 직접적인 방법으로 풀 것인가?, 간접적인 방법으로 풀 것인가? 간접적인 방법 중에서 대우법을 사용할 것인가? 아니면 모순법을 사용할 것인가를 두고 문제에 따른 다양한 방법을 다루어 볼 수 있을 것이다.

넷째, 증명과 문제를 확장하거나 일반화 할 수 있는 능력을 가지고 있어야 한다. 예를 들면, Ⅱ장에서 다룬 다양한 동치정리와 유도된 정리들을 이용하여 학생들의 호기심을 불러 일으켜 그들의 직관력을 성장시킬 수 있을 것이다.

다섯째, 학교수학과 수학의 다른 분야 또는 내용과의 관계성을 설명할 수 있어야 한다. 예를 들면, 응용수학이나 경제학 또는 심리학 등에서 다루는 게임이론에 상한과 하한의 개념이 들어 있는 것을 소개함으로써 그들의 호기심을 자극할 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] 박영훈, 여태경, 김선화, 심성아, 이태림, 김수미 (2009). 중학교 수학 I, p. 145-150, (주) 천재문화.
[2] 박종율, 유종광, 이창주, 홍분남, 김덕진, 박우량 (2009). 중학교 수학 1 교과서, (주) 도서출판 디딤돌.
[3] 우정호, 박교식, 박경미, 이경화, 김남희, 임재훈, 신보미, 최인선, (2010). 고등학교 수학 I, 두산동아(주)
[4] 이병수 (1996). 수학의 이해, 경성대학교 출판부.
[5] 이병수 (2008). 기초 실해석학, 교우사.
[6] 이준열, 최부림, 김동재, 서정인, 전용주, 김홍섭, 장희숙, 조석연, 오승아, 송정 (2010). (주) 천재교육.
[7] 이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미 (2010). (주) 천재교육.
[8] 정동명, 조승제 (2004). 실해석학 개론, 경문사.
[9] 최용준, 김서령, 이정례, 선우하식, 이진호, 조동석, 이한주, 김덕환, 김민정, 박효정 (2010). 고등학교 미분적분과 통계기본 교과서, (주) 천재교육.
[10] 최용준, 한대희, 박진교, 김강은, 신태양, 배맹주 (2010). 중학교 수학 2 교과

서, (주) 천재문화.
[11] D'Angelo J. P. & West Douglas B. (2000). Mathematical Thinking, Problem-Solving and Proofs, Prentice Hall, NJ.
[12] Ball, D. L. (1991). Research on teaching mathematics ; Making subject-matter knowledge part of equation. In J. Brophy (Ed.), Advances in Research on Teaching (Vol. 2, pp.11-48) : JAI Press.
[13] Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. (2000). Introduction to Real Analysis, 3ed, John Wiley & Sons, Inc..
[14] Cooney, T. J. & Wiegel, H. G. (2003). Examining the mathematics in mathematics teacher education. In A. J. Bishop, et al. (eds.), Second international handbook of mathematics education (pp. 795-828). Dordrecht: Kluwer.
[15] Hennings Cindy S. (2007). The mathematical preparation of secondary teachers: A Call for Research, Journal of Mathematical Sciences & Mathematical Education 2(2).
[16] Prediger Susanne (2010). How to develop mathematics-for- teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign, J. Math. Teacher Educ. (2010) 13:73-93.
[17] Shulman. L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching, Educational Researcher, 15, 4-14.
[18] Simon Martin A., (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division, J. for Research in Mathematics Education, Vol. 24, No. 3, 233-254.
[19] Trench, William F. (2003). Introduction To Real Analysis, Pearson Education.
[20] Usiskin, Z. (2001). Teachers' mathematics: A collection of content deserving to be a field. Paper presented at the National Summit on the Mathematical Education of Teachers, Washing, DC.
[21] Wilhelmi Miguel R., Godino Juan D. & Lacasta Eduardo, (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions, the case of the absolute value, int'l Electronic J. of Mathematics education Vol. 2, No2., pp.72-90.

Byung-Soo Lee
Department of Mathematics
Kyungsung University

Busan 608-736, Korea
E-mail address: bslee@ks.ac.kr