East Asian Mathematical Journal
Vol. 26 (2010), No. 4, pp. 553-579

초등수학 기하문제해결에서의 시각화 과정 분석

윤 여 주 · 김 성 준

ABSTRACT. Geometric education emphasize reasoning ability and spatial sense through development of logical thinking and intuitions in space. Researches about space understanding go along with investigations of space perception ability which is composed of space relationship, space visualization, space direction etc. Especially space visualization is one of the factors which try conclusion with geometric problem solving. But studies about space visualization are limited to middle school geometric education, studies in elementary level haven't been done until now. Namely, discussions about elementary students' space visualization process and ability in plane or space figures is deficient in relation to geometric problem solving. This paper examines these aspects, especially in relation to plane and space problem solving in elementary levels. Firstly we propose the analysis frame to investigate a visualization process for plane problem solving and a visualization ability for space problem solving. Nextly we select 13 elementary students, and observe closely how a visualization process is progress and how a visualization ability is played role in geometric problem solving. Together with these analyses, we propose concrete examples of visualization ability which make a road to geometric problem solving. Through these analysis, this paper aims at deriving various discussions about visualization in geometric problem solving of the elementary mathematics.

Ⅰ. 서론

Freudenthal(1973)에 따르면, 기하교육의 목적은 논리적 사고 능력의 신장과 공간에 대한 직관력의 계발, 즉 공간에서의 추론 능력과 공간 감각의 육성에 있다. 시각

2010년 7월 투고, 2010년 8월 심사 완료.
2000 Mathematics Subject Classfication: MSC 97C30, 97D50
Key words: geometric education, space perception ability, visualization process, visualization ability, elementary mathematics, geometric problem solving, 기하교육, 공간지각능력, 시각화 과정, 시각화 능력, 초등수학, 기하문제해결
* 이 논문은 2009년도 부산교육대학교 교육연구원의 지원(교과교육연구)을 받아 연구되었음.

적 이미지는 기하에서 도형을 그리지 않고서는 그와 관련된 학습·지도를 생각할 수 없을 만큼 큰 비중을 차지하며, 공간에서의 추론과도 밀접하게 연관되어 있다. NCTM(1989)은 이미 공간감각을 강조한 바 있는데, 초등수준의 기하교육에서부터 공간감각을 발달시켜야 하며, 공간감각을 계발하기 위해서는 기하적인 관계(방향, 방위, 사물에 대한 투영도, 도형과 사물들의 상대적인 크기와 모양)에 초점을 둔 구체적인 경험과 비형식적인 방법으로 시각적인 자료를 다루는 것이 중요하다고 하였다. 결국 기하교육은 공간에서의 시각화[1)]를 어떻게 다루는가에 따라 승패가 결정되는 만큼 시각화에 관한 연구는 중요하다고 할 수 있다.

이러한 인식은 1990년대 이후 기하교육을 위한 연구에서 강조되어 왔는데 곧, 기하교육과 시각화 활동 사이의 관계를 이끌어내고, 시각화를 통한 학습이 공간감각 능력과 문제해결력에 미치는 효과를 검증하는 방식으로 진행되어 왔다(문광호, 1998; 류현아, 2008). 이를테면, 기하교육을 위해 공간에서의 추론 능력의 중요성을 강조하면서 시각화가 추상적인 기하 지식과 일상적인 기하 개념들을 동화시키기 위한 기초임을 밝히면서, 이와 함께 공간에서의 시각화 과정과 능력을 계발하기 위한 연구 등이 진행되어 왔다.

그러나 지금까지 공간 시각화와 공간에서의 추론 과정에 대한 연구는 주로 중등수준에서의 기하교육에 그 초점이 맞추어져 있었던 반면, 초등수학에서 문제해결 특히 평면과 공간에서의 문제해결과 관련해서 초등학생들의 공간 시각화와 추론 과정에 대한 논의가 부족했던 것이 사실이다. 본 연구는 이러한 공간 시각화를 초등수학교육에서 살펴보기 위한 것으로, 문제해결 특히 기하와 관련해서 평면도형과 입체도형의 문제해결이라는 두 가지 측면에서 접근하고자 한다. 다시 말해, 본 연구는 기하에서의 시각화 능력을 기하문제해결이라는 입장에서 구체적으로 살펴보기 위한 것으로, 특히 초등학생들이 도형 영역에 제시된 문제를 해결하는 과정에서 어떤 공간 시각화 능력을 발휘하는지 살펴보려고 한다. 이를 위해 일차적으로 학생들이 기하문제해결에서 나타내는 시각화의 과정을 구체적으로 도식화하였으며, 이를 통해 초등수학 도형 영역의 기하문제해결에서 학생들이 어떻게 도형을 시각화화여 문제를 해결하는지, 이러한 시각화 과정에서 학생들에게서 나타나는 공간 시각화 능력에는 어떠한 것들이 있는지 분석해보고자 한다.

본 연구는 Duval(1998)의 공간추론 및 시각화 능력 연구에서 그리고 중등기하문제해결에서 시각화와 추론 과정을 분석한 류현아(2008)의 연구에서 시각화 과정의 분석틀을 원용한 것으로, 특히 초등수학 도형영역에서 시각적인 자료의 활용이 빈번하고 중요하게 다루어진다는 점에서 초등학생들의 평면도형 및 공간도형 문제해결에서 시각화 과정과 시각화 능력에 대해 살펴본 것이다.

---

1) 공간에서의 시각화는 2차원 평면과 3차원 공간에서 물체의 심상화(mental objectification)된 움직임을 이해하고 실행하는 것으로, 시각적 표상과 심상들을 조작하거나 변형하고, 추상적인 관계를 시각적 표상으로 전환하는 과정 등을 의미한다.

Ⅱ. 시각화의 의미와 시각화 과정

시각화는 추상적인 지식을 배우고 학습하는 효과적인 방안의 하나이다. 수학은 그 대상이 수이든 도형이든 추상적인 대상을 다루는 학문이다. 이에 시각화의 중요성은 특히 구체적 조작기에 놓여 있는 초등학생들의 경우, 시각화가 이들의 수학 학습에서 구체와 추상 사이의 간극을 연결하는 다리 역할을 한다는 점에서 더욱 부각되고 있다. 곧, 시각화는 아이디어를 구상하는 과정에서 언어-논리적인 표상보다 더 구체적이고 명확하게 의미를 전달할 수 있다. 예를 들어, Einstein은 상대성 이론의 창조와 관련해서, “이러한 생각들은 언어적 형식 안에서는 결코 일어날 수 없으며, 나는 언어적 방법으로는 거의 사고하지 않는다. 생각이 떠오른 다음에 그것을 언어로 표현한다.”고 말한 바 있다. 이는 곧, 그가 시각적이고 역동적인 표상을 선호했으며, 생각이 떠오르면 그 다음 단계에서 그것을 설명해주는 형식적인 언어나 기호들을 찾기 위해 고뇌했음을 보여주는 대목이다. 또한 Skemp는 언어-대수적 기호 체계와 시각적 기호 체계를 대비함으로써 수학적 사고에서의 시각화가 어떤 위치에 놓여 있는지를 설명한 바 있다. 그에 따르면, 언어-대수적 기호 체계는 분석적인 구조를 제시하고 집단적 사고를 표현하는데 적합하고 따라서 순서적이고 논리적인 반면, 시각적 기호 체계는 통합적인 구조를 제시하면서 동시에 개별적인 사고를 표현할 수 있기에 동시적이며 직관적이라는 것이다.

초등수학의 지도와 관련해서 시각화의 역할은 더욱 중요하다. 초등수학의 경우 기하교육에서 직관기하를 다루고 있으며, 추상적인 언어-대수적 기호 체계는 중등수학 이후에서 다루어지기 때문에 시각화와 관련된 시각적 이미지(image)의 역할과 중요성은 더욱 크다고 할 수 있다. 다음은 수학교육에서 다루는 이미지와 이미저리, 그리고 시각화에 대한 설명이다.

수학교육에서 이미지의 개념은 ‘마음속의 그림(a picture in the mind)’으로 볼 수 있다(Clement, 1982). 한편, 이미저리(imagery)는 어떤 대상이 감각 기관에 포착되지는 않았지만, 대상에 대한 지각에 대응하여 발생하는 정신적 활동으로 정의된다. 이를 구분하면, 이미지는 시각적 요소의 기초 개념으로 어떤 구체적인 대상의 형상 자체에 초점을 두는 반면, 이미저리는 직접 눈으로 보거나 만져 보지 않은 추상적인 대상을 인식하여 형상을 떠올리는 정신적 활동으로 볼 수 있다. 여기서 시각적 이미저리는 ‘마음속에 있는 눈에서 그림으로 떠오르는 이미지’(Evans, 1980) 또는 ‘강한 시각적 요소를 가진 정신적 이미지’(Dreyfus, 1995)로 정의된다. 정신적 이미지란 일종의 시각적 또는 공간적 요소에 의한 수학적 개념이나 성질의 인지적 표현이라 할 수 있다. 한편, 시각적 이미지는 ‘시각적 또는 공간적 정보를 묘사하는 정신적 스키마’(Presmeg, 1986)로 정의되는데, 이는 모양을 묘사하는 이미저리를 포괄하는 넓은 의미에서 사용되는 것으로, 정신적 스키마는 시각화된 지각적 대상이 있든 없든 존재할 수 있다는 것을 의미한다(류현아, 2008, 재인용).

시각화는 이러한 이미지, 이미저리, 시각적 이미지, 시각적 이미저리라는 개념을

토대로 등장하게 된다. Gutierrez(1996)는 시각화를 정의하기에 앞서, 이전에 여러 연구자들이 정의했던 공간 이미지, 정신적 이미지, 시각적 이미지를 근본적으로 같은 것으로 보았다. 곧, 시각적 또는 공간적 요소에 의한 수학적 개념이나 성질의 인지적 표현을 시각화의 기본적인 요소로 보았으며, 시각화, 시각적 이미저리, 공간 사고를 동등한 것으로 간주하였다. 따라서 수학에서 시각화는 '수학 문제를 해결하거나 수학적 성질을 증명할 때 내적이든 물질적이든 시각적이거나 공간적인 요소를 사용하는 각종 추론 활동'으로 정의할 수 있다(류현아, 2008).

수학적 사고의 측면에서 시각화를 바라보면, 시각적 사고는 마음속에서든 지각된 외부 현실에서든 구성된 대상을 정신적으로 변형하는 추론의 일종이다. Dubinsky(1991)는 Piaget의 논의를 발전시켜 APOS(action-process-object-schema) 이론을 제시했는데(김성준, 2002), 이 과정에서 중요한 역할을 하는 것이 변형이다. 여기서 변형은 정신적 과정의 내면화를 포함하는데, 그는 이러한 일련의 과정에서 수학적 사고를 설명하고 시각화를 다음과 같이 정의하였다.

> 시각화는 사람이 내적인 구성과 감각을 통해 얻을 수 있는 어떤 것 사이의 강한 연결을 확립시키는 활동이다. 이러한 연결은 두 가지 방향 어느 쪽에서든 만들어질 수 있다. 시각화 활동은 외부로부터 인식된 대상이나 사건과 관련지어서 대상이나 조작 과정을 정신적으로 구성하는 것을 말한다. 또 다른 시각화 활동은 종이나 칠판 또는 컴퓨터 화면과 같은 외적인 수단을 이용하여 마음에 있는 대상이나 조작 과정에 동일시하는 대상이나 사건을 구성하는 것이다.

이와 유사한 의미로 Zimmermann & Cunnigham(1991)은 수학에서 시각화는 정신적으로 또는 종이와 펜으로 또는 테크놀로지로 이미지를 형성하는 과정이고, 수학적으로 더 잘 이해하고 수학적 발견 과정을 자극하는 것을 목적으로 이미지를 사용하는 과정이라고 하였다. 또한 Nemirovsky & Noble(1997)은 시각화는 학생의 마음 또는 외적인 수단에 의해 제한되는 것이 아니라, 오히려 내적인 것과 외적인 것 사이를 교류하는 의미로 정의하였다(류현아, 2008, 재인용).

이처럼 지금까지 수학교육에서의 시각화 연구를 분석하여 비교해보면, 시각화는 학생의 내적인 이해와 외적인 표현의 두 가지 경로를 따르는 과정으로 보는 견해와 이들 가운데 한 가지 방향에 무게를 두는 입장으로 구분할 수 있다. 후자의 견해에서 바라본 시각화는 1980년대까지 진행된 연구에서 주로 찾아볼 수 있는데, Presmeg(1986)는 이미지를 형성하는 과정이 외적인 환경에서 시작된다고 본 반면, Eisenberg & Dreyfus(1989)는 외적인 표현은 수학적 이해로부터 생성된다고 하였다. 이에 비해 전자는 1990년대 이후 Zazkis, Dubinsky, Dautermann(1996)의 시각화 정의에서 종합적으로 제시되어 있는데, 이들에 따르면 시각화는 외부로부터 인식된 대상을 정신적으로 구성하는 것과 내적으로 구성된 대상을 외적으로 표현하는 것 모두를 의미하고, 이들 사이의 연결이 중요한 역할을 한다는 입장이다(류현아,

2008, 재인용). 이와 함께 Gutierrez(1996)도 시각화는 내적이든 외적이든 시각적 또는 공간적 요소를 사용하는 추론 활동으로 여겼으며, 정신적 이미지, 외적 표현, 시각화 과정, 시각화 능력이라는 4가지 주요 요소에 의해 시각화가 실행될 수 있음을 강조하였다. 따라서 본 연구에서는 류현아(2008)의 연구에서 제시된 시각화의 의미를 원용하여 수학 활동에서의 시각화를 외부로부터 지각된 대상이나 정보에 대하여 정신적으로 관련된 이미지를 구성하거나, 정신적으로 구성된 이미지를 외적으로 표현하는 활동 모두를 포함하여, 수학에서의 이해와 문제해결을 목적으로 내적 또는 외적으로 이미지를 다루는 모든 과정을 포함하여 정의한다.

Ⅲ. 연구 방법

본 연구는 부산 소재 D초등학교 5학년 6명, 6학년 7명을 대상으로 진행되었다. 초등수학에서 도형 영역은 5학년까지 직육면체, 정육면체의 전개도, 평면도형의 성질과 관계를 학습하게 되는데, 5-6학년 학생을 대상으로 한 것은 평면과 공간에 대한 다양한 개념을 학습한 상태에서 본 연구가 시각화에 초점을 맞추고 있기 때문이다. 연구대상 학생들은 기하문제해결에서 시각화의 과정을 표현할 수 있어야 하기 때문에, 표현력이 우수하고 수학 성취도 수준이 높은 학생들 가운데 담임교사의 추천을 받아 선정되었다. 또한 본 연구는 기하문제해결에서 도형에 대한 기초 지식이 바탕이 되어야 하기 때문에, van Hiele 수준 테스트에서 2수준 이상인 학생으로 연구대상을 제한하였다.

본 연구에서는 연구대상을 선정하기 위해서, 그리고 연구대상의 시각화 능력을 검증하기 위해서 두 가지 검사지가 사용되었다. 그 가운데 첫 번째는 연구대상의 기하학습수준을 확인하기 위한 것으로, 초등학생을 대상으로 재구성한 선행연구(백은자, 2006)를 토대로 한 van Hiele 수준 테스트를 사용하였다. 검사지 문항은 3차에 거쳐 완성된 것으로, 타당도, 신뢰도 등에서 검증받은 것으로 나타났으며, 본 연구에서는 이 가운데 초등학교 학생들의 기하사고수준 판별에 적합한 15문항을 선별하여 검사문항을 구성하였다.

두 번째 검사지는 김은영(2009)이 사용한 공간감각능력 검사지를 재구성한 것으로, 연구대상 학생들의 구체적인 공간감각능력 정도를 분석하는데 사용되었다. 이 검사지는 평면도형 과제 11문항[2]과 공간도형 과제 7문항[3]으로 구성되었으며, 두 차

2) 평면도형 11개 과제 가운데 7문항(1-7번)은 도형의 성질을 이용하여 각의 크기와 넓이를 측정하는 문제이고, 4문항(8-11번)은 도형의 성질을 파악하거나 추측하여 설명하는 증명 문제이다.

3) 공간도형 7개 과제는 초등학교 5학년까지 도형 영역에서 다루는 직육면체, 정육면체, 전개도, 겨냥도 등의 내용을 기초로 하고 각각 차원의 변화를 다르게 하여 문제를 구성하였다. 또한 직육면체와 같은 입체도형을 회전, 변환하여 문제를 해결할 수 있도록 고안하였다. 이

례 예비검사를 통해 단순히 공식만 암기하여 즉각적으로 풀 수 있는 문제와 시각적으로 답이 금방 드러나는 문제는 삭제하였고, 학교수업에서 다루어 보지 못한 문제와 초등학교에서 다루지 않는 증명 문제 등을 추가하여 구성하였다.

다음 <표 Ⅲ-1>은 연구대상 학생들의 수학 성적과 van Hiele 수준 테스트 결과 기하사고수준, 그리고 공간능력 평가점수 결과를 제시한 것이다.

<표 Ⅲ-1> 연구대상 학생들의 검사 점수

초5	수학 중간 기말 고사 평균	성별	Van Hiele 사고 수준	공간능력 평가점수	초6	수학 중간 기말 고사 평균	성별	Van Hiele 사고 수준	공간능력 평가점수
소정	96	여	3	92	진녕	96	남	3	88
승환	98	남	3	88	민주	97	여	3	92
창현	96	남	3	82	영훈	98	남	3	88
수정	97	여	3	84	유진	94	여	2	80
부민	94	남	2	78	예현	90	여	2	72
선경	95	여	3	88	재원	95	남	3	88
					하균	95	남	3	92

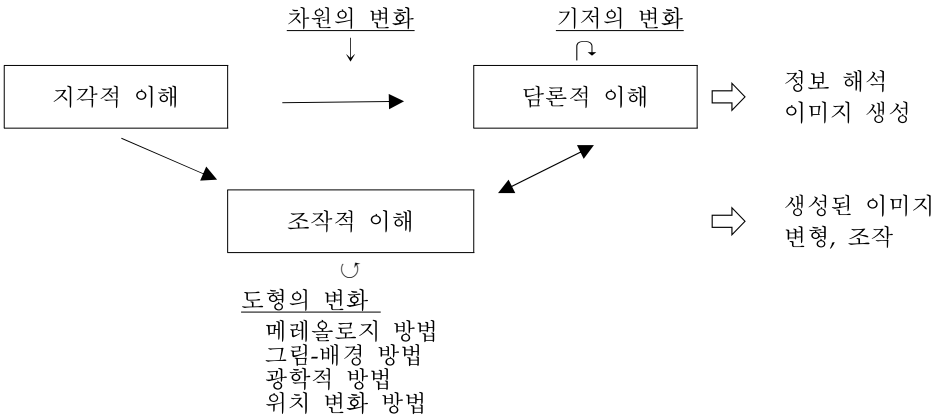
본 연구에서 평면도형과 관련된 문제해결의 시각화 과정은 도형에 대한 지각적 이해, 담론적 이해, 조작적 이해로 도형에 대한 이해를 범주화하고,[4] 도형의 시각화 과정에서 도형을 해석하는 관점에 따른 변화는 차원의 변화, 기저의 변화, 도형의 변화에 주목하여 문제해결과정에서 학생들이 어떻게 도형을 시각화하여 변화시키는지를 분석하였다(Duval, 1998).

다음 <그림 Ⅲ-1>은 류현아(2008)가 제시한 분석틀을 원용한 것으로, 본 연구에서는 초등기하 가운데 평면도형 문제해결과정에서 이 분석틀을 통해 시각화의 과정을 살펴보고 있다.

를테면, 정육면체 전개도 찾기 문제의 경우 단순히 암기하여 문제를 푸는 경우에 대비하여 이를 변형하여 기존에 경험하지 못한 형태로 구성하였다(류현아(2008)에 제시된 문항 참조).

4) 지각적 이해는 어떤 대상을 첫 눈에 보이는 하나의 상태로 받아들이는 것이며, 담론적 이해는 묘사된 대상을 결정하는 형태와 명제의 결합으로부터 형성되는 것이다. 조작적 이해는 모양을 바라보는 시각적 조작을 변형시킴으로써 수행되는 것을 말하는데, 주어진 도형을 수정하는 방법에 따라 다르게 나타난다. 곧, 메레올로지 방법은 주어진 도형 전체를 부분도형으로 나누는 방법이며, 광학적 방법은 렌즈나 거울 등을 사용한 것처럼 도형을 더 넓거나 더 좁은 방향으로 만드는 방법이다. 또한 위치 변화 방법은 평면 그림이나 스크린에서 대상의 위치나 방향을 바꿀 수 있는 방법을 말한다(Duval. 1998).

<그림 Ⅲ-1> 시각화 과정 분석틀(류현아, 2008)



한편, 공간도형과 관련된 문제해결의 시각화 과정은 Del Grande(1987)의 연구에 근거해서 류현아(2008)가 제시한 <표 Ⅲ-2>의 분류에 따라 분석이 진행되었다.

<표 Ⅲ-2> 공간 시각화 능력

공간 시각화 능력	설명
정신적 상상 및 정신적 조작 능력	정신적으로 공간 도형을 상상하고 그것을 회전이나 이동 등의 조작을 할 수 있는 능력
배경 밖으로 특정도형을 규명하는 능력	복잡한 배경에서 특정 도형의 윤곽을 분리시켜 규명할 수 있는 능력
공간도형의 차원 변환 능력	2D/2D[5] 형태의 전개도를 공간도형으로 재구성할 수 있는 능력 3D/2D[6] 형태의 겨냥도를 2D/2D형태의 전개도로 변형할 수 있는 능력
대상 또는 학습자의 위치 변화 능력	주어진 대상이나 대상을 관찰하는 자신의 위치에 변화를 주면서 바라보는 쪽 공간도형의 모양을 상상할 수 있는 능력
대상, 정신적 이미지를 서로 관련시키는 능력	주어진 대상이나 그림, 정신적 이미지를 비교, 분석하면서 서로 관련시키는 능력
패턴의 변형 및 재배열 능력	대상을 동일한 구조로 변형, 재배열 하여 공간도형을 구성하는 능력
대수적 사고와 시각화의 연합 능력	주어진 정보로부터 대수적 및 논리적 사고를 기초로 공간도형을 표현하거나 상상하는 능력

5) 2차원 평면에 표현된 2차원 면의 형태
6) 2차원 평면에 표현된 3차원 입체 형태

초등기하문제해결에서 학생들의 시각화 과정을 분석하기 위해 지필 답안과 개별 면담, 동영상 녹화를 통해 자료를 수집하고, 학생들의 문제해결과정을 관찰하다가 필요할 때마다 학생들이 문제를 어떻게 이해하고 시각적으로 표현하는지 질문하였다. 기하문제해결에서의 시각화 과정에 대한 분석은 평면도형과 공간도형 문제를 각각 구분하여 분석하였는데, 평면도형 문제해결에서는 앞서 기술한 <그림 Ⅲ-1>에 기초하여 다음 제4장에서 분석하였다. 그리고 공간도형 문제해결에서는 학생들이 공간도형을 어떻게 시각화하고 2차원과 3차원 도형을 어떻게 관련지을 수 있는지 알아보기 위해 <표 Ⅲ-2>의 공간 시각화 능력을 기초로 제5장에서 분석하였다.

Ⅳ. 평면도형 문제해결에서 시각화와 도형 이해

평면도형 문제해결에서 학생들은 다양한 시각화 활동을 통해 문제를 해결하고 도형문제를 이해하는 과정에서 시각화를 우선하여 기하 추론을 이끌어내었다. 이를테면, 담론적 이해와 조작적 이해는 우선 도형의 구성 요소와 성질과 성질들 간의 관계들을 학생들이 파악할 수 있도록 도와주었고, 학생들은 이를 통해 문제해결의 실마리를 이끌어내었다. 또한 학생들은 이러한 이해를 통해 보조선을 긋거나 배경으로부터 벗어나서 특정 도형을 조작하여 도형을 생성했으며 이로부터 도형의 구조를 파악하였다. 또한 지각적 이해는 학생들이 도형 문제를 접하는 과정에서 문제 속에 포함된 도형의 정보를 해석하는데 도움을 주었다.

다음은 몇몇 학생들에게서 나타난 시각화와 시각화 과정에서 드러난 도형에 대한 이해를 도식화하여 분석한 것으로, 학생들이 시각화 활동을 통해 도형에 대한 이해를 어떻게 이끌고 나가는지를 보여 준다.

1. [문제 3]에서 나타난 시각화 과정과 도형의 이해

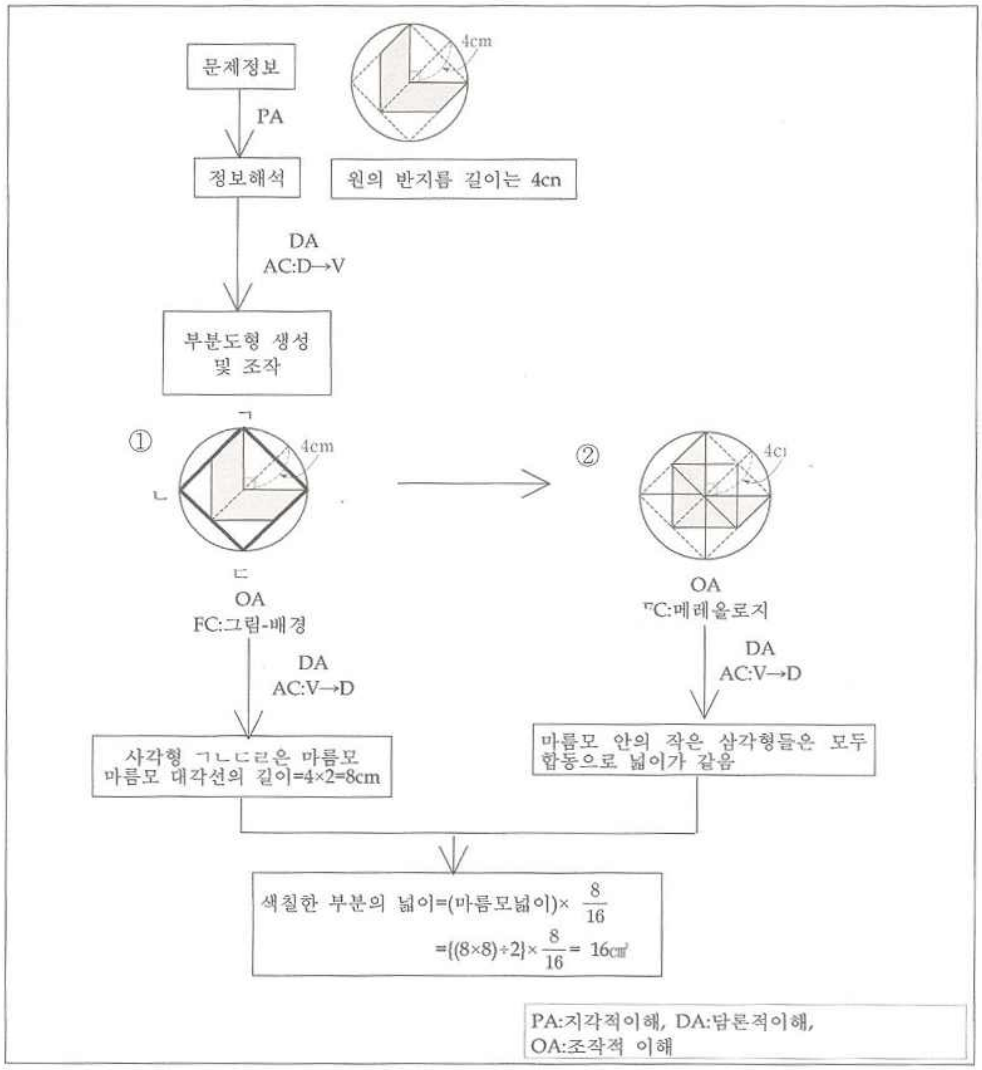
1) 부민(5학년-남학생)의 사례

부민이는 [문제 3]에서 도형 안의 마름모와 합동인 삼각형을 시각화하여 문제를 해결하였다. <그림 Ⅳ-1>은 [문제 3]에 대한 부민이의 문제해결과정에서 나타난 시각화와 이를 통해 도형 이해가 어떻게 이루어지는지를 도식화한 것이다.

부민이는 주어진 문제에서 원의 반지름 길이가 4cm라는 것과 원의 중심에서 반지름 길이는 모두 같다는 성질을 이용하여 원 안의 마름모 도형을 시각화하였다. 여기서 도형을 조작할 때 적용된 방법은 문제해결과 관련된 원안의 마름모 부분만 독립적으로 시각화했기에 그림-배경 방법이라 할 수 있다. 그 다음은 도형 ②처럼 메레올로지 방법으로 도형을 조작하여 마름모를 여러 개의 작은 삼각형으로 나누었다. 이 상황은 도형을 담론적 대상에서 시각적 대상으로 이동시킨 것으로 기저의 변화가 일어났다고 볼 수 있다. 이후 합동인 도형은 넓이가 같다는 명제에 입각하

여 도형을 이해하고 있으며, 이로부터 도형 ①과 도형 ②로 각각 변형·조작하여 색칠한 부분의 넓이를 구하고 있다.

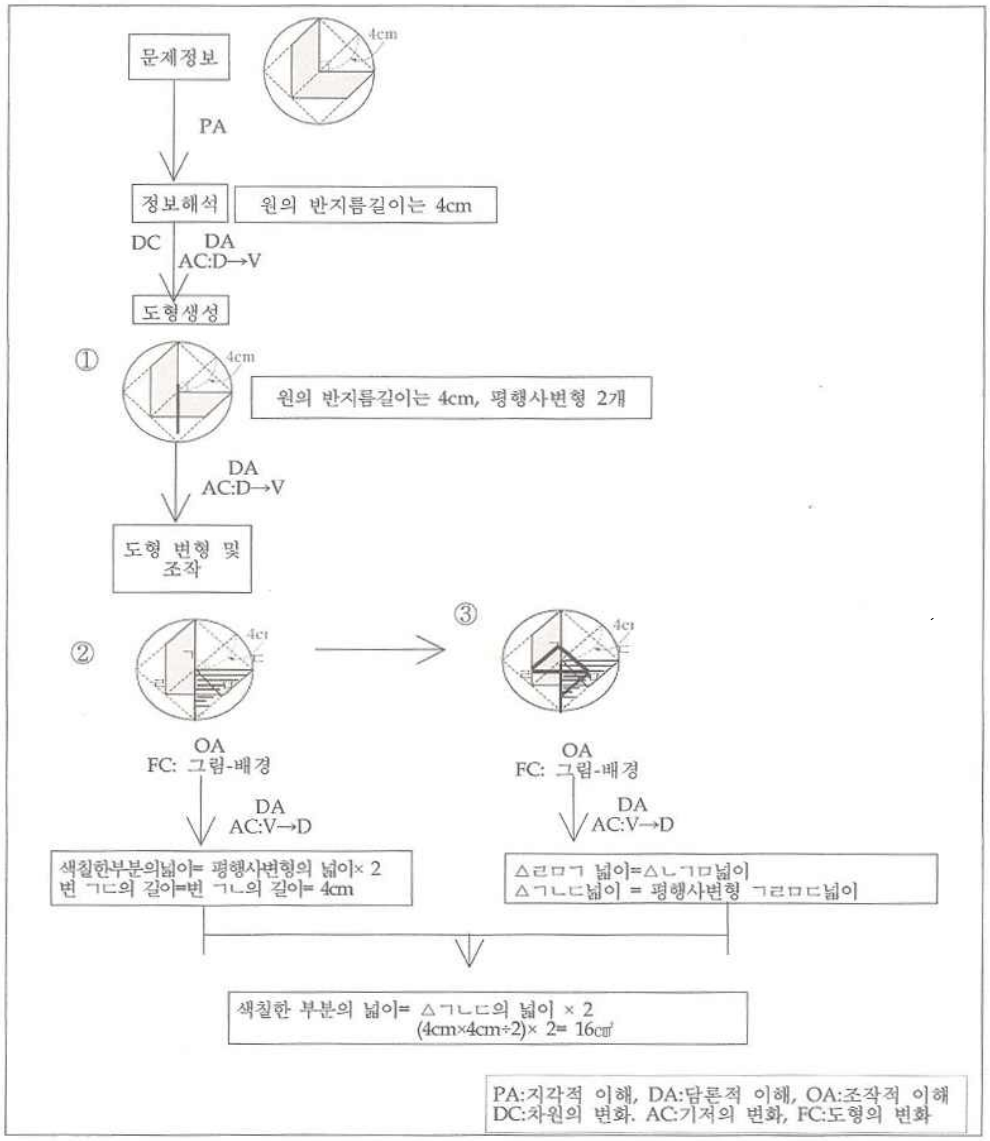
<그림 Ⅳ-1> [문제 3]에서 부민의 시각화 과정과 도형의 이해



2) 민주(6학년, 여학생)의 사례

민주는 원의 반지름 길이는 어디서든 같다는 성질과 그림-배경 지각 방법을 이용하여 넓이가 같은 평행사변형과 직각삼각형 도형을 시각화하여 문제를 해결하였다(<그림 Ⅳ-2>).

<그림 Ⅳ-2> [문제 3]에서 민주의 시각화 과정과 도형의 이해



민주는 주어진 문제의 도형이 원이라는 것에 중점을 두고 원의 중심에서 반지름길이는 어디서나 같다는 명제를 이용하여 도형 ①을 만들어내었다. 이 과정은 점, 선 등과 같은 1차원적 요소로부터 도형 ①과 같이 2차원적 도형을 생성하는 것으로 차원의 변화를 요구한다. 이것은 명제에 입각한 담론적 이해이며, 기저가 시각적 도형으로 이동한 것이다.

도형 ①은 도형 ②와 같은 직각삼각형을 시각화 할 수 있도록 했고, 도형 ②, ③처럼 문제해결과 관련된 부분만 독립적으로 시각화하여, 즉 그림-배경 방법을 이용

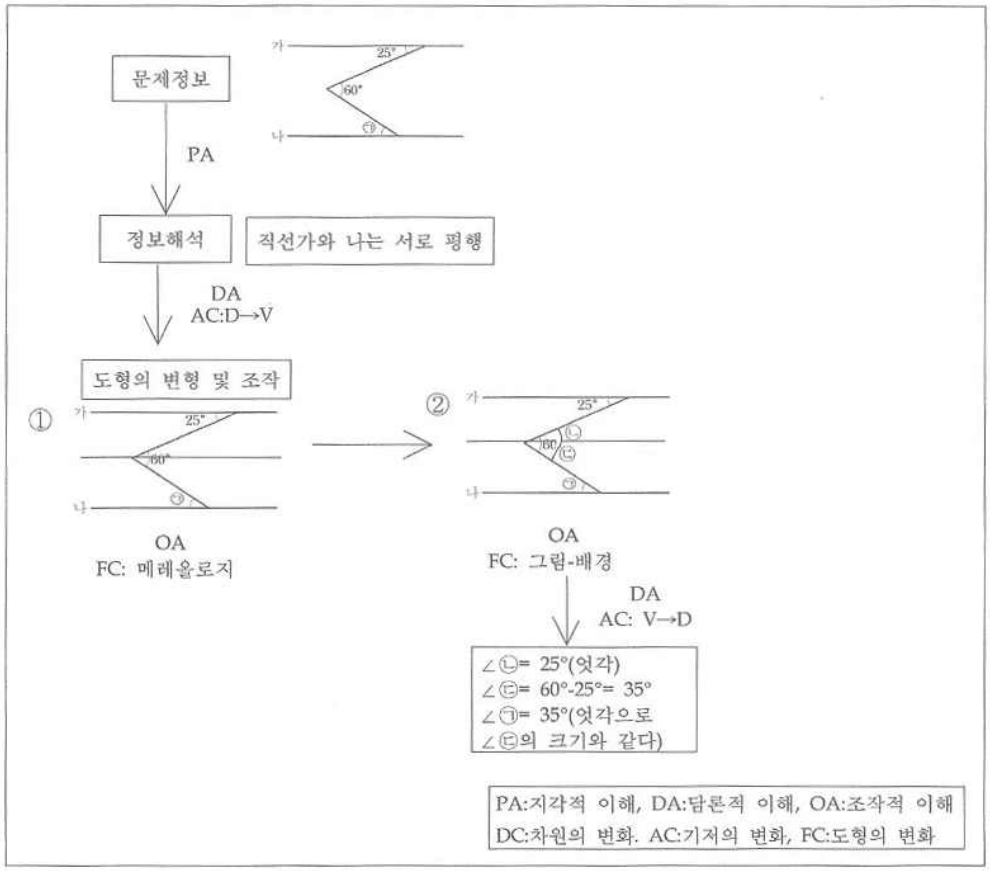
하여 도형을 조작하여 주어진 부분의 넓이를 구할 수 있었다. 곧, 밑변과 높이가 같고 넓이가 같은 삼각형을 시각화하여 평행사변형과 직각삼각형 넓이가 같다는 것을 알고 문제를 해결한 것이다. 이 과정에서 변형·조작된 도형 ②, ③은 도형의 구조를 한눈에 인지할 수 있는 발견적 형태로 실제로 문제해결에 결정적인 통찰을 제공해 준 것으로 볼 수 있다.

2. [문제 5]에서 나타난 시각화 과정과 도형의 이해

1) 영훈(6학년-남학생)의 사례

영훈이는 평행선에서의 엇각의 크기가 같다는 정리를 이용하여 [문제 5]를 해결하였다.

<그림 Ⅳ-3> [문제 5]에서 영훈의 시각화 과정과 도형의 이해



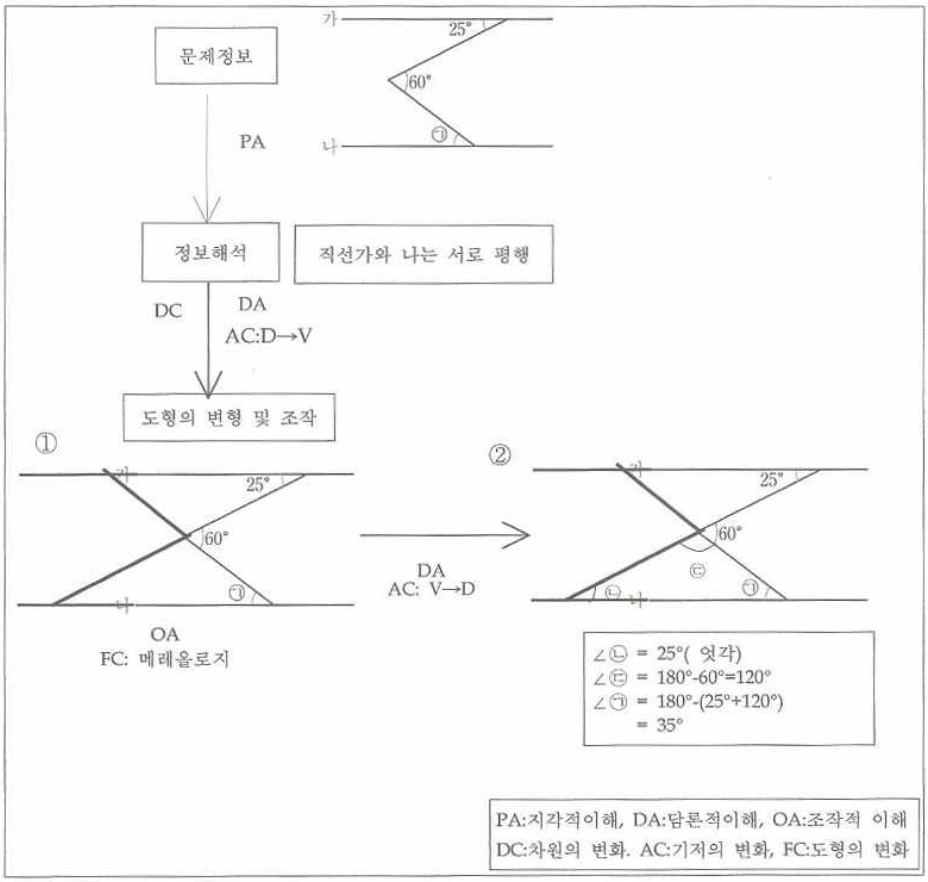
영훈이는 주어진 그림 정보를 파악하고 직선 가와 나가 평행하다는 것에 초점을 맞추었다. 여러 가지 보조선을 긋는 시행착오를 거치다가 그림처럼 두 직선 가운데

에 서로 평행하는 보조선을 긋고 도형을 변형하였다. 이때 기저는 담론적인 것에서 시각적인 것으로 이동한 것이다. 도형 ①처럼 메레올로지 기법을 통해 가운데 평행선을 그었다. 평행선에서의 엇각의 정리를 담론적으로 이해하였고, 그것이 도형을 시각화할 수 있도록 도왔다. 도형 ②와 같이 그림-배경 방법을 통해 25°와 엇각인 각 ㉡의 크기를 구할 수 있었다. 60°에서 각 ㉡의 크기를 빼서 각 ㉢의 크기를 구할 수 있었다. 마찬가지로 복잡한 배경에서 특정 그림을 부각시켜 바라보는 그림-배경 방법으로 각 ㉢의 크기와 각 ㉠의 크기는 엇각으로 같다는 사실을 이용하여 각 ㉠의 크기를 구할 수 있었다.

4) 유진(6학년-여학생)의 사례

유진이는 평행선에서 엇각의 크기는 같다는 성질과 삼각형 내각의 크기의 합은 180°라는 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있었다(<그림 Ⅳ-4>).

<그림 Ⅳ-4> [문제 5]에서 유진의 시각화 과정과 도형의 이해



두 평행선은 더 연장해도 변하지 않는 다는 것과 삼각형에서 세 내각의 합은 180°라는 성질을 이용해서 도형 ①과 같이 서로 평행인 두 직선 가와 나를 연장하였고, 평행선 사이에 있는 선분을 도형 ①처럼 연장하였다. 직선과 같은 1차원 요소로부터 삼각형과 같은 2차원적 도형을 생성할 때 차원의 변화가 요구된다. 그리고 도형에 대한 성질에 입각한 담론적 이해로 기저가 담론적인 것에서 시각적인 것으로 변화된 것이다. 이는 도형의 조작으로 초기 도형의 성질을 유지한 채 주어진 도형을 다르게 변화시킨 것이다. 곧, 주어진 도형 전체를 부분도형으로 나누는 방법으로 메레올로지 방법을 이용한 것으로, 그 결과 마주보고 있는 두 삼각형을 시각화한 것이다. 평행선에서 엇각의 성질을 이용하여 각 ㉡의 크기를 25°로 구할 수 있었고 평각의 크기 180°에서 나머지 각을 빼서 각 ㉢의 크기를 구할 수 있었다. 엇각의 성질과 삼각형 내각의 크기의 합이 180°라는 것을 인지함으로써 도형을 담론적으로 이해하여 문제를 해결하였다.

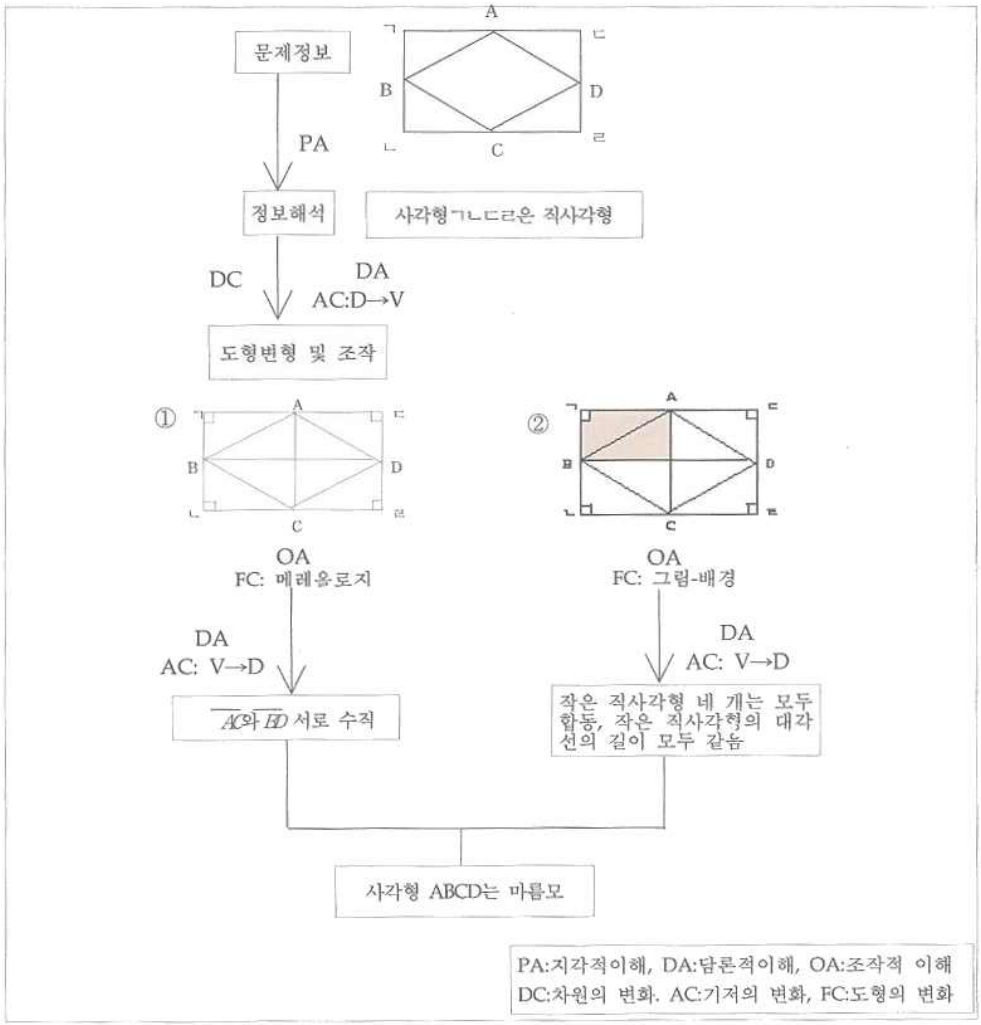
3. [문제 11]에서 나타난 시각화 과정과 도형의 이해

1) 소정(5학년-여학생)의 사례

소정이는 도형을 메레올로지 방법으로 조작하여 두 대각선을 그어서 네 개의 직사각형을 시각화하였다. 소정이는 이 도형이 직사각형이라는 것을 지각하고 고민하다가 도형 ①처럼 선분 AC와 선분 BD를 그었다. 점 A, B, C, D가 각 변의 중점이라는 것을 알고 도형 ①을 생성하였는데, 점, 선 등과 같은 1차원적 요소로부터 2차원적 도형(작은 직사각형)을 생성할 때 차원의 변화가 있게 된다. 그런 다음 두 선분이 수직으로 만난다고 하였다. 이때 도형의 선분을 긋고 나서 도형 ②처럼 큰 직사각형 안에 네 개의 작은 직사각형을 시각화하였다. 네 개의 직사각형이 합동임을 이용하여 안에 있는 사각형이 마름모라고 하였다. 처음에 두 대각선을 그어서 도형에 변화를 준 것은 메레올로지 방법이지만, 대각선을 긋고 작은 직사각형 4개를 시각화한 것은 문제해결에 필요한 부분만 독립적으로 시각화한 것으로 그림-배경 방법이 이용된 것으로 볼 수 있다.

소정이는 직사각형의 중점을 연결해서 만들어지는 작은 직사각형들은 합동이라고 보고 대각선의 길이는 모두 같다고 설명했다. 그것을 이용하여 안에 있는 사각형의 네 변의 길이가 같다고 하였다. 도형 ①, 도형 ②와 같이 도형을 변형하거나 부분도형을 시각화함으로써 문제해결을 위한 중요한 단서를 구하게 된 것이다.

<그림 Ⅳ-5> [문제 11]에서 소정의 시각화 과정과 도형의 이해

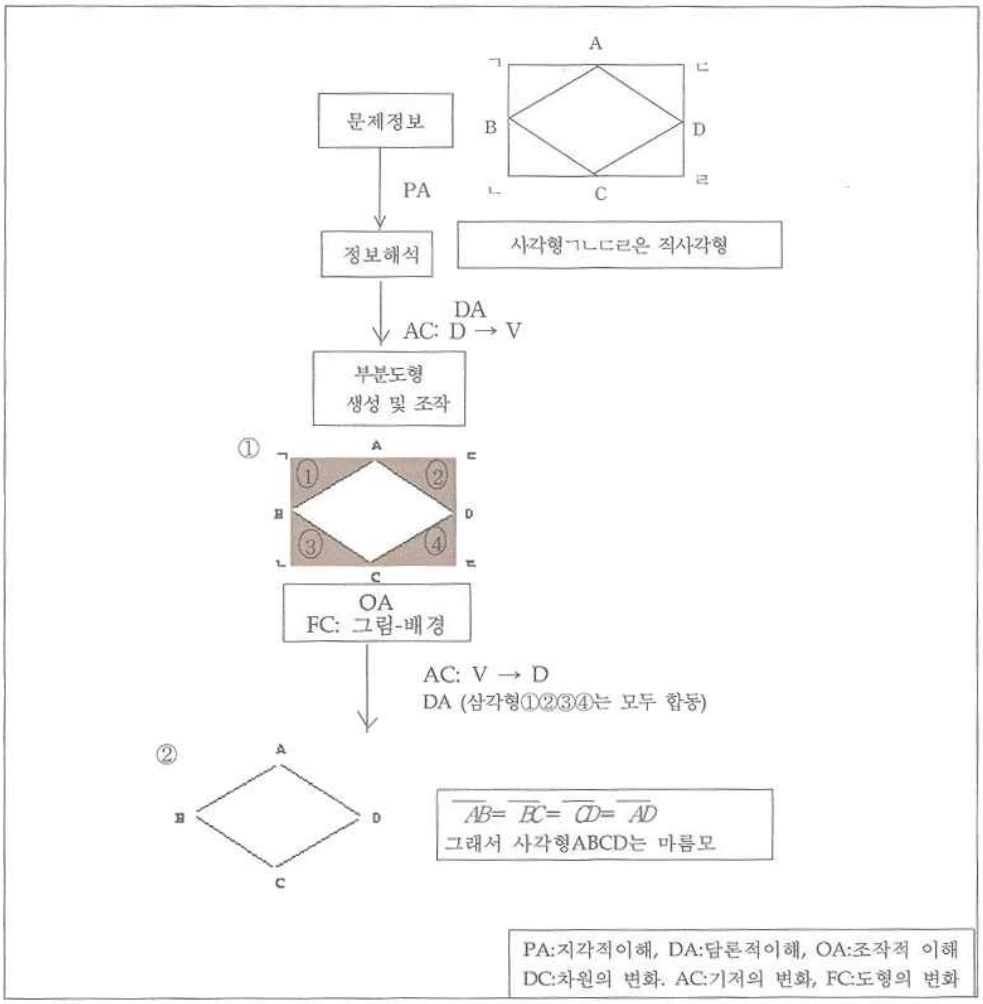


2) 승환(5학년-남학생)의 사례

승환은 문제가 주어졌을 때 이 도형이 직사각형이라는 정보를 읽고 직사각형이라는 조건에 집중하여 네 각의 크기에 직각 표시를 하였다. 네 모퉁이에 있는 삼각형에 색칠을 하고 번호 ①②③④를 표시했다. 이것은 도형에 변화를 주기 보다는 도형을 바라보는 시각적 조직에 변화를 준 그림-배경방법이 이용된 것이다. 직사각형은 네 각이 직각이고 대변의 길이가 같다는 성질에 근거하여 도형 ①과 같이 변형하였다. 이것은 직사각형의 성질을 근거로 시각화가 이루어 진 것이므로 기저가 담론적인 것에서 시각적인 것으로 이동한 것으로 볼 수 있다. 이로부터 도형에 대한 조작적 이해가 가능해진다. 네 개의 삼각형을 시각화 하여 직사각형의 중점으로 변

의 길이가 같고 직사각형으로 각의 크기가 90°로 같다고 생각하여 합동으로 보았다. 승환은 문제해결과정에서 기존의 도형을 변형하여 삼각형 ①②③④ 부분도형을 시각화하였으며, 이는 문제해결을 위한 결정적 단서로 작용한다.

<그림 Ⅳ-6> [문제 11]에서 승환의 시각화 과정과 도형의 이해



이상의 사례에서 보듯이, 같은 문제라도 학생들마다 다양하게 시각화하여 문제를 해결한다는 것을 알 수 있다. 또한 주어진 문제에서도 한 가지 방법으로 도형을 조작하는 것이 아니라 메레올로지, 그림-배경 방법과 같은 다양한 방법으로 도형을 조작·변형하여 시각화하는 모습을 볼 수 있다. 이처럼 다양한 방법으로 도형을 변형하거나 부분도형을 시각화한 것이 문제해결을 위한 단서를 제공해주고 있으며,

시각적으로 재조직하는 과정에서 통찰이 이루어지고, 다시 이것이 문제해결로 연결되고 있다. 정보를 해석하고 이미지를 생성하는 과정에서 도형에 대한 지각적 또는 담론적 이해가 요구되고, 도형을 변형·조작하는 과정에서 도형에 대한 조작적 이해가 요구된다. 또한 도형에 관한 지각적 이해가 담론적 이해로 이어지기 위해 도형에 대한 차원의 변화가 일어나고 있으며, 조작적 이해 과정은 도형의 변화와 함께 일어남을 알 수 있다.

Ⅴ. 공간도형 문제해결에서 시각화 능력

공간도형에서의 문제해결과정을 분석한 결과 대부분의 학생들은 상상을 통해 도형을 조작하는 능력을 가지고 있었다. 학생들이 보여준 상상을 통해 도형을 조작하는 능력이란 평면에 표현된 공간도형을 접거나 공간도형을 평면에 펼치는 능력, 복잡한 배경에서 특정 도형을 분리하는 능력, 대상을 동일한 패턴에 따라 재배열 구성하는 능력, 대수적 사고를 기초로 공간도형을 표현하거나 상상하는 능력 등을 말한다. 또한 학생들은 하나의 문제에 2-3개 이상의 다양한 공간 시각화 능력을 동시에 사용함으로써 문제를 해결하였다. 문제를 모두 성공적으로 해결한 몇몇 학생은 문제해결에서 다양한 시각화 능력을 나타냈는데, 특히 한 문제를 해결하기 위해 두 가지 이상의 공간 시각화 능력을 사용한 경우가 많았다. 이에 비해 문제를 해결하지 못한 학생들의 경우 비교적 단순한 형태의 공간도형 문제에서만 공간 시각화가 가능하였으며, 나머지 문제에서는 상상을 통해 도형을 조작하였으나 시각화된 공간도형이 잘못되어 문제해결에 실패했다. 이는 공간도형 문제해결에서 시각화 능력이 결정적인 역할을 하고 있음을 보여주는 것이다. 다음은 각각의 공간 시각화 능력에 대한 사례와 그 특징을 제시한 것이다.

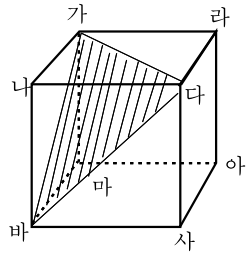
1. 정신적 상상 및 정신 조작능력

정신적 상상 및 조작 능력은 학습자가 3D/2D 형태의 겨냥도나 입체도형을 공간에서 정신적으로 상상하여 공간도형의 전체적인 형태를 인지하고, 그것을 정신적으로 회전시켜 시각화하는 능력이다. 본 연구에서 몇몇 학생은 허공에서 손을 이용하여 공간도형의 형태를 시각화하고 정신적으로 그 구조를 상상하거나 회전하는 모습을 보여주었다.

1) 정신적으로 공간도형의 구조를 상상하고 조작하기

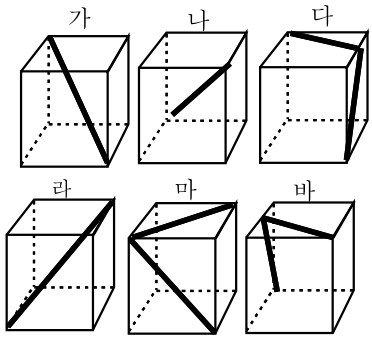
학생들은 공간도형의 형태의 이미지를 시각화 하고 정신적으로 그 구조를 상상하고 조작할 수 있었다. 예를 들어, 하균이는 문제 16-(1)에서 겨냥도에 선을 표시하며 마치 공간에서 손으로 단면을 자르는 모습을 보이면서 그 면을 손바닥으로 표시

하였다. 가, 마, 사, 다를 지나는 단면은 직사각형임을 정확히 시각화하고 확신하였다. 눈으로 봤을 때는 평행사변형처럼 보이지만 직사각형이라고 말하였다. 16-(2)에서도 <그림 Ⅴ-1>과 같이 표시하며 정신적으로 공간도형을 상상하며, 가, 바, 다를 자를 때 생기는 면은 정삼각형이라고 정확하게 확신하였다. 왜 정삼각형이 되느냐라는 질문에 하균이는 정육면체는 정사각형으로 이루어져 있고, 가, 바, 다를 자를 때 생기는 선분은 전부 정사각형의 대각선으로 길이가 같다고 그 구조를 상상하며 설명하였다.



<그림 Ⅴ-1> 하균의 [문제 16-2] 그림

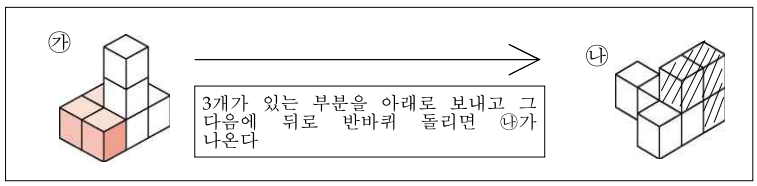
그리고 하균이는 [문제 18]에서 <그림 Ⅴ-2>과 같이 한쪽 점에서 대각선으로 긴 다른 점으로 연결했기 때문에, 가, 라가 가장 긴 선이 된다고 하였다. 또한 눈으로 보기에는 아니지만 직육면체 나에서 표시된 선분도 한 점에서 가장 먼 대각선으로 두 점이 연결된 선으로 서로 같다고 하였다. 직육면체 다와 바에서 보여지는 선분들의 실제 길이도 도형에 표시하기보다 정신적으로 공간도형의 구조를 상상하여 밑변의 점에서 윗변의 중점을 지나는 두 선분들의 길이이기 때문에 이 둘은 서로 같다고 설명하였다.



<그림 Ⅴ-2> [문제 18] 그림

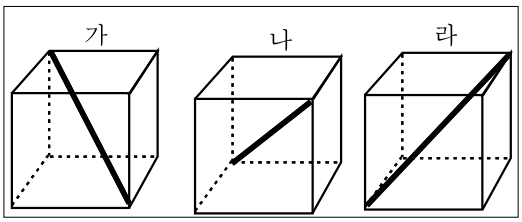
2) 정신적으로 공간도형을 회전하기

[문제 17]에서 학생들은 입체도형을 정신적으로 회전시켜 색칠한 부분을 찾아 문제를 해결하였다. 예를 들어, 민주는 <그림 Ⅴ-3>과 같이 입체도형 ㉮에서 3개가 쌓여 있는 부분을 아래로 눕히고, 그 다음에 뒤쪽으로 반 바퀴 돌리면 입체도형 ㉯가 나오고 ㉮에서 보이지 않는 부분은 쌓기나무가 없다고 하였다. 그래서 입체도형 ㉯를 그림처럼 색칠하였다. 입체도형을 공간에서 회전시킴으로써 생성되는 역동적 이미지를 이용한 것이다.



<그림 Ⅴ-3> [문제 17]의 민주의 해결과정

영훈이는 <그림 Ⅴ-4> [문제 18]의 선분들의 실제 길이를 비교하는 문제에서 가 직육면체를↘오른쪽으로 180° 돌리면 나 직육면체 모양이 된다고 설명하면서, 보기에는 나 직육면체에서 보여지는 선분의 길이가 짧아 보이나 실제로는 길이가 같다고 설명하였다. 그리고 가 직육면체를 오른쪽으로 90° 돌리면 라 직육면체가 나온다고 설명하면서, 가와 나, 라에서 표시된 선분들의 실제 길이는 같다고 설명하였다.



<그림 Ⅴ-4> [문제 18] (가),(나),(라) 그림

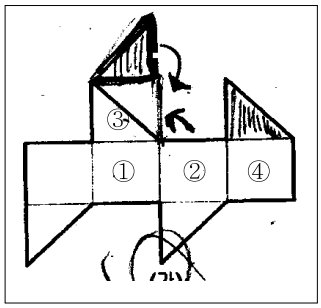
2. 공간도형의 차원 변환 능력

공간도형의 차원 변환 능력은 정신적으로 조작하여 2D/2D 형태의 전개도에서 3D 공간도형을 상상하거나 3D/2D 형태의 겨냥도를 2D/2D 형태의 전개도로 펼쳐서 볼 수 있는 능력이다.

1) 정신적으로 2D/2D에서 3D로의 변환하기

학생들은 2D/2D 형태의 전개도를 보면서 아무런 표시 없이 정신적으로 3D 형태의 공간도형을 상상할 수 있었다. [문제 14]에서는 대부분의 학생들이 전개도에 아무런 표시를 하지 않고 손으로 종이를 접는 동작을 취하거나 정신적으로 입체도형을 시각화하여 문제를 해결하였다.

다음은 [문제 15]에서 재원과 창현이가 전개도로부터 입체도형을 어떻게 시각화하는지에 대한 설명이다.



<그림 V-5> [문제 15] (가) 창현의 설명

“문제 15-(가)(<그림 Ⅴ-5>)는 이것(①)을 앞면으로 했을 때 이게(②) 오른쪽 옆면으로 가고, 이것은(④) 이것(①)하고 평행하게 뒤로 가요. 이 면(④)이 뒤로 가면서 빗금 친 면은 그림처럼 되요. 화살표처럼 접으면 정사각형 모양이 되요. 그래서 윗면의 모양은 □ 이렇게 되요. 아랫면도 접어서 보면 직각삼각형 두 개가 만나 정사각형으로 이루어져서 정육면체가 되요.”(창현)

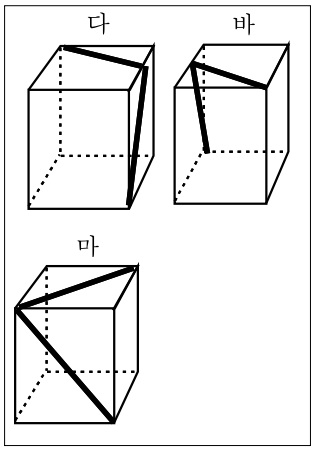
2) 3D/2D에서 2D/2D로의 변환하기

[문제 18](<그림 Ⅴ-6>)을 학생들은 앞에서 기술했듯이 공간도형을 움직여 보고 시각화 하여 문제를 해결하였다. 그리고 몇몇 학생은 3D/2D 형태의 겨냥도에서 2D/2D 형태의 전개도로 차원을 변화시켜 공간도형의 점과 점 사이의 거리를 비교

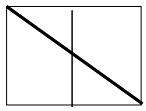
하였다.

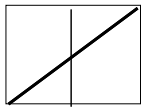
다음의 예는 이 문제를 전개도로 펼쳐서 문제를 해결한 진녕이의 설명이다.

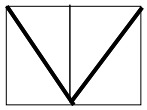
“직육면체 다에서 보여지는 선분은 전개도로 봤을 때 이렇게(<그림 Ⅴ-7>) 펼쳐져요. 결국 보이는 선분의 실제 길이는 두 직사각형을 합친 직사각형의 대각선 길이가 되요. 직육면체 바도 이렇게(<그림Ⅴ-8>) 전개도를 펼쳤을 때 실제 선분의 모습이고, 이것도 직육면체 다와 같이 두 직사각형을 합친 직사각형의 대각선의 길이가 되요. 그래서 다와 바에서 보여지는 실제 선분의 길이는 같아요. 근데 직육면체 마는 펼쳐보면 그러니까 선분이 있는 면만 펼쳐보면 이렇게(<그림Ⅴ-9>)처럼 펼쳐져요. 그래서 다와 바에서 보이는 선분의 길이와 달라요.”(진녕)



<그림 Ⅴ-6> [문제 18]그림


<그림 Ⅴ-7>


<그림 Ⅴ-8>

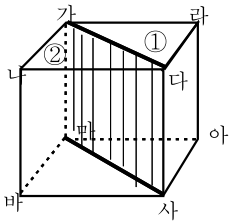

<그림 Ⅴ-9>

3. 그림-배경 지각 능력

그림-배경 지각능력은 복잡한 그림에서 필요한 특정 도형 윤곽을 다른 그림(배경)과 분리시켜 따로 떼어서 시각화하는 능력이다.

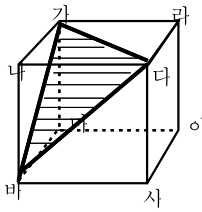
1) 3D/2D 형태의 겨냥도에서 또 다른 입체도형 지각하기

일부 학생들은 정육면체 겨냥도에서 네 점을 지나도록 잘랐을 때 삼각기둥으로 도형을 시각화하였고, 또한 세 점을 지나도록 잘랐을 때는 삼각뿔 도형을 시각화하여 문제를 해결하였다. 6학년인 진녕이의 경우는 삼각기둥, 삼각뿔 도형을 시각화하여 생기는 단면의 모양을 정확히 시각화하였으나, 5학년인 창현이의 경우 삼각기둥, 삼각뿔 도형을 시각화하였으나 생기는 도형의 구조를 구체적으로 파악하지 못하였다. 다음은 진녕이의 [문제 16]에 대한 설명이다



<그림 Ⅴ-10> 진녕 [문제 16]-(1) 그림

“16-(1) 문제의 경우는 정육면체를 반으로 자른 것이므로 이렇게(<그림 Ⅴ-10>) 두 개의 삼각기둥이 나와요 이렇게 잘라보면 삼각기둥의 옆면과 자른 단면이 같으므로 삼각기둥의 옆면은 직사각형으로 자른 단면은 직사각형이 되요. 16-(2) 문제는 가, 다, 바를 자른다고 했어요.



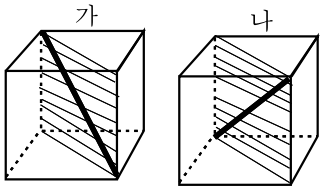
<그림 Ⅴ-11> 진녕 [문제 16]-(2) 그림

이렇게 선을 그어보면 나가 꼭짓점인 삼각뿔이 나와요. 삼각뿔 밑면이기 때문에 자른 단면은 삼각형 모양이 나와요. 그런데 가만히 보니 삼각형 모양인데 세 변의 길이가 같아요. 세 변의 길이는 정사각형의 대각선으로 길이가 같아요."(진녕)

2) 3D/2D 형태의 겨냥도에서 단면 지각하기

한 학생은 정육면체의 겨냥도에서 주어진 직선이 포함되어 있는 평면으로서 단면을 지각하여 실제 선분의 길이를 비교하였다. 예를 들어, [문제 18]에서 민주는 앞 문제에서 직사각형의 모양을 잘라서인지 직사각형 단면을 시각화하여 문제를 해결하였다. 다음은 민주의 문제 설명과 그림이다.

"가, 나 직육면체에서 보이는 실제 선분의 길이는 같아요. 이렇게(<그림 Ⅴ-12>) 빗금을 그어 보면 그 단면은 직사각형이에요. 실제 선분의 길이는 직사각형의 대각선으로 서로 길이가 같아요."(민주)



<그림 V-12> [문제 18] 민주의 그림

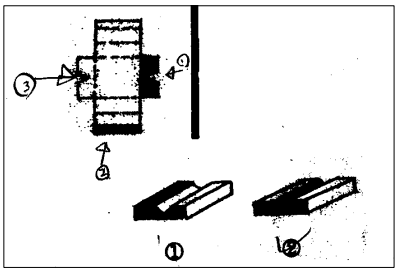
4. 대상 또는 학습자의 상대적 위치 변화 능력

대상 또는 학습자의 상대적 위치 변화 능력은 입체도형의 겨냥도는 그대로 두고 학습자의 위치에 변화를 주어 바라보는 방향을 고려하거나 또는 그림을 돌려보거나 돌렸다고 생각하고 학습자가 바라보는 방향을 변화를 주어 공간도형을 시각화하는 능력이다.

1) 학습자가 바라보는 위치 변화

학생들은 공간도형을 바라보는 자신의 위치를 변화시켰다고 생각하여 공간도형의 구조와 단면을 상상할 수 있었다. 예를 들어, 예현이는 [문제 13]에서 입체도형은 그대로 두고 자신이 그림을 바라보는 방향을 바꾸어 공간도형을 상상할 수 있었다. 다음은 [문제 13]에 대한 풀이과정에 대한 설명이다.

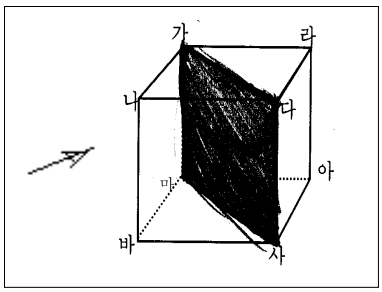
"<그림Ⅴ-13>처럼 내가 ①번에 위치에 있다고 가정했을 때 그쪽으로 해서 봤을 때 전개도를 접으면 앞면은 검은색 색칠되어 있고, ②번의 색칠되어 있는 것이 안쪽 파인 곳에 오게 되요. ③번에서 봤다고 쳐도 앞면은 색칠하지 않고 검은색 색칠되어 있는 부분이 안쪽 파인 곳에 오게 되게 되요. 보기 중에 안쪽 V자 파인 곳에 검은색을 칠한 곳은 보기 중 ②번 밖에 없어요."(예현)



<그림 V-13> [문제 13] 예현 문제 그림

또한 영훈이는 [문제16]의 (1)에서 가, 마, 사, 다를 지나게 자른 다음, <그림Ⅴ-14>와 같이

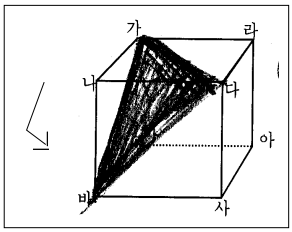
표시하며 직사각형이라고 말했다. 정육면체라서 정사각형이므로 대각선의 길이가 같기 때문에 선분 가다와 선분 마사의 길이가 같다고 하였다. 그런데 선분 가마와 선분 다사는 정사각형 한 변의 길이로 네 변의 길이는 같지가 않다고 분석하였다. 영훈이는 단면을 자르고 생기는 도형의 성질을 나름대로 분석하였다. 또한 네 각이 직각인데 정사각형은 아니고 마주보는 변의 길이가 같으므로 직사각형이라고 하였다. 정육면체를 잘라 놓고 그 단면 위에서 보면 직각으로 보인다고 하였다. 정육면체를 돌렸을 때 생긴 도형을 봤다는 의미인지 물었을 때, 영훈이는 "정육면체는 그대로 두고 내가 저쪽으로 갔을 때 그렇다는 거죠."라고 답하였다. 영훈이 역시 도형인 정육면체는 그대로 두고 자신이 도형을 바라보는 방향을 바꾸어 도형을 상상한 것으로 볼 수 있다.



<그림 V-14> [문제 16-(1)] 영훈 문제 그림

2) 정신적으로 대상을 움직임으로써 바라보는 위치 변화

학생들은 대상을 움직여서 도형의 구조를 상상하였다. 3D/2D 형태의 겨냥도나 공간도형을 정신적으로 움직임으로써 자신의 바라보는 방향에 변화를 주어 공간도형의 단면을 상상할 수 있었다. 예를 들어, 재원이는 [문제 16]의 (2)에서 가, 바, 다를 지나도록 잘랐을 때 생기는 단면의 모양을 <그림 V-15>와 같이 그렸고, 처음에는 삼각형이라고 말하다가 생각하더니 정삼각형이라고 말하였다. 변의 길이가 모두 정사각형의 대각선으로 길이가 같다고 정삼각형이라고 말하였다. 이때, "눈으로 보면 그냥 이등변삼각형처럼 보이지만 이 정육면체를 이쪽으로 돌려서 보면 정삼각형처럼 보일 것 같아요."라고 설명했다. 재원이는 자기 자신은 그대로 있고 대상을 움직여서 필요한 부분을 바라보고 도형의 구조를 상상하여 문제를 해결한 것이다.



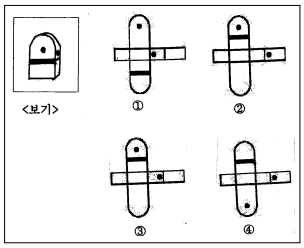
<그림 V-15> [문제 16-(2)] 재원문제그림

5. 대상, 정신적 이미지를 서로 관련시키는 능력

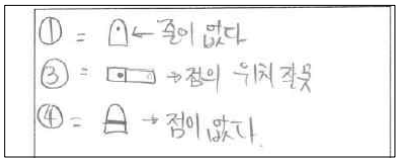
대상, 정신적 이미지를 서로 관련시키는 능력은 주어진 대상이나 그림, 정신적 이미지를 비교, 분석하면서 서로 관련시켜 그것으로부터 공간도형을 구성할 수 있는 능력이다.

1) 주어진 대상을 비교 분석하는 능력

학생들은 주어진 겨냥도와 보기의 전개도를 비교 분석하면서 문제를 해결하였다. 예를 들어 [문제 12](<그림 Ⅴ-16>)에서 몇몇 학생들이 주어진 선과 점의 위치를 비교하며 주어진 겨냥도의 전개도를 쉽게 찾을 수 있었다. <그림 Ⅴ-17>은 수정이의 [문제 12]의 해결과정 설명이다. 이 학생은 공간도형을 직접 머릿속으로 펼치기보다는 공간도형의 점과 선의 위치를 비교분석하여 문제를 해결하였다.

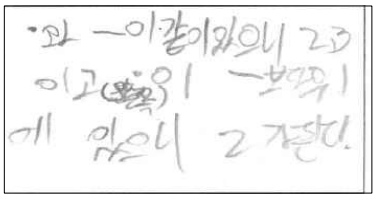


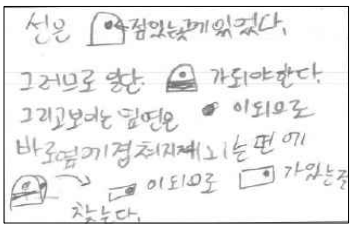
<그림 Ⅴ-16> [문제 12]



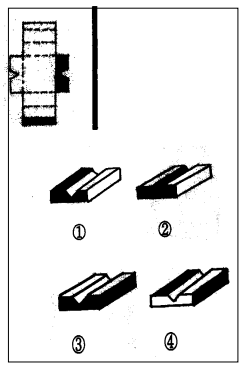
<그림 Ⅴ-17> 수정 [문제 12] 풀이설명>

창현과 승환이의 경우도 주어진 겨냥도를 펼쳐서 찾기보다는 보기의 겨냥도과 주어진 전개도에서 보여지는 점과 선의 위치를 비교하며 문제를 해결하였다. 다음 그림 <그림 Ⅴ-18>, <그림 Ⅴ-19>는 각각 창현과 승환이의 [문제 12]의 해결과정 설명이다.

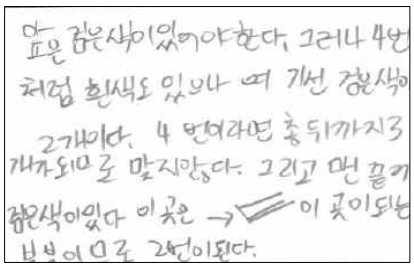

<그림 Ⅴ-18> 창현의 [문제 12]풀이설명


<그림 Ⅴ-19> 승환의 [문제 12]풀이설명

2D/2D 형태의 전개도에서 3D/2D 형태의 겨냥도를 찾는 [문제 13]에서도 창현이는 공간도형의 차원을 변화시키면서 주어진 대상을 비교 분석하며 문제를 완벽하게 해결할 수 있었다.



<그림 Ⅴ-20> [문제 13]


<그림 Ⅴ-21> 창현의 [문제 13]풀이설명

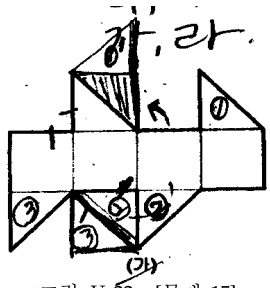
6. 패턴의 변형 및 재배열 능력

패턴의 변형 및 재배열 능력은 평면에 표현된 패턴에서 동일한 구조로 일부를 수정, 변형, 또는 재배열 하여 그것으로부터 도형을 구성할 수 있는 능력이다. 본 연구에서 몇몇 학생의 경우는 주어진 전개도가 공간도형이 가능한지 판단하기 위해 전개도의 면의 배열을 일정한 패턴을 가지고 변형시킬 수 있었다.

1) 전개도 패턴 변형하기

정육면체의 전개도를 찾는 문제로 [문제 15]의 경우 쉽게 접하지 못한 문제라서 많은 학생들이 어려워하였고 제대로 시각화 하지 못하였다. 몇몇 학생만이 주어진 전개도가 공간도형이 가능한지 판단하기 위해 전개도의 면의 배열을 일정한 패턴을 가지고 변형시킬 수 있었다.

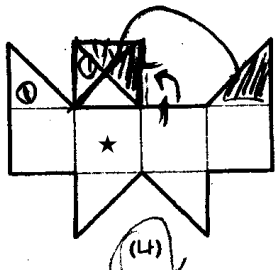
예를 들어, [문제 15]에서 민주 같은 경우는 <그림 V-22>와 같이 전개도에 서로 만나서 모서리를 이루는 변을 짝지어 표시하고, 그것을 기준으로 삼각형 모양을 회전시켜 정육면체의 한 면을 이룰 수 있는지 판단하였다. 다음은 민주의 설명이다.



<그림 V-22> [문제 15]

"이걸 이렇게(그림 화살표) 접었을 때 이게(①) 따라와요. 90° 돌렸을 때 이것이(①) 이렇게 (①′)되잖아요. 이것을 다시 접으면 빗금 친 삼각형 모양으로 접히잖아요. 그러면 면이 만들어지고 아래쪽도 돌려서 똑같은 방법으로 해봐요. 이것이(③) 접으면 이렇게 (③′) 되고 이것도(②) 접으면 이렇게(②′) 접혀져요. 그러므로 (가) 전개도는 정육면체가 되요.

(나) 전개도는 보면 앞의 가처럼 똑같은 방법으로 해봐요. 이것도 이 면(★)을 기준으로 접어 봐요. 90° 돌아서 이건(①) 이렇게(①′) 되고, 오른쪽 면도 똑같이 접으면 빗금 친 것은 이렇게 접어져요. 두 삼각형이 그림처럼 이렇게 겹쳐줘요. 그러므로 (나) 전개도는 정육면체가 될 수 없어요.



<그림 V-23> [문제 15] 민주문제그림

7. 대수적 사고와 공간 시각화의 연합 능력

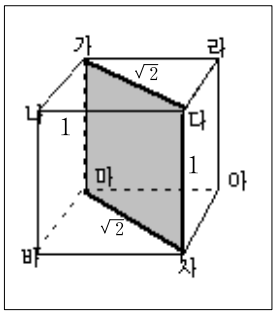
대수적 사고와 공간 시각화 연합능력은 입체도형을 상상하기 위해 대수적 접근을 시도하거나 주어진 조건을 논리적으로 조작하여 입체도형을 시각화하는 능력이다.

1) 3D/2D에서 단면의 모양을 대수적으로 규명

학생들은 겨냥도에서 단면의 모양을 판단하기 위해 변의 길이를 대수적으로 판단하였다. 예를 들어, 영훈과 재원의 경우는 선생님이 질문에 수치를 대입하여 피타고라스 정리를 이용하여 자신의 생각을 증명해보였다. 이 학생들은 평면기하문제에서도 피타고라스 정리를 이용하여 문제를 해결하려는 모습을 보였다.

영훈이의 [문제 16-(1)]에서 먼저 점 가, 마, 사, 다를 연결하고 자른 단면의 모양은 사각형이라고 말하더니, 사각형의 선분의 길이를 비교하며 직사각형이라고 도형을 시각화하였다. 왜 직사각형인지 선생님의 질문에 다음은 이 학생의 설명이다

"이 선분 가마와 선분 다사의 길이는 같아요. 예를 들어, <그림 Ⅴ-24>와 같이 이것을 1cm라고 하면 정사각형의 한 변의 길이로 같아요, 이 선분 가다와 선분 마사의 길이는 정사각형의 대각선의 길이로 같아요, 피타고라스 정리에 의해 옆의 그림처럼 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$cm예요. 마찬가지로 선분 마사의 길이도 정사각형의 대각선으로 $\sqrt{2}$ cm예요."(영훈)



<그림 Ⅴ-24> [문제 16] 영훈의 그림

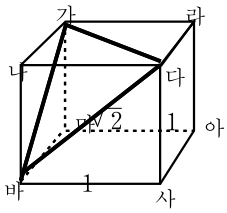
영훈이는 네 각이 직각이고 길이를 비교해가며, 직사각형은 마주보는 변의 길이가 같다는 성질을 활용하여 생기는 단면은 직사각형이 된다고 확신하였다.

재원이의 경우도 [문제 16-(2)]에서 처음에는 각 가, 바, 다 점을 연결하여 삼각형, 이등변삼각형이라고 말하더니, 도형을 움직여서 정삼각형이 된다고 말하였다. 왜 정삼각형이 되는지 선생님의 질문에 다음은 재원이의 설명이다.

"피타고라스 정리를 이용하여 숫자를 넣어 봐요. 이 도형은 정육면체이므로 정사각형으로 이루어져 있어요. 정사각형 한 변의 길이를 1cm라고 하면 직각삼각형에서

$a^2+b^2=c^2$ 이라는 공식에서 $1^2+1^2=2$가 나와요.

그래서 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$가 돼요. 그림처럼 정사각형의 대각선으로 전부 길이가 같아요, 그래서 생기는 도형은 정삼각형이 되요."(재원)



<그림Ⅴ-25> 재원의 [문제16]-(2) 그림

이처럼 학생들은 정신적인 상태에서 도형을 회전시키거나 조작함으로써 공간도형의 구조를 파악하거나, 전개도로부터 공간도형을 상상하거나 겨냥도를 전개도로 변환하는 등 자유롭게 차원을 변화시키는 공간 시각화를 통해 문제를 해결하였다. 또한 겨냥도에서 직선이 포함되어 있는 평면의 윤곽을 시각화하거나, 겨냥도를 다른 방향에서 바라보았다고 상상하거나 겨냥도를 공간에서 정신적으로 움직여줌으로써 공간도형의 단면을 시각화하여 문제해결에 도달하였다. 이와 함께 공간도형이 가능

하도록 전개도에서 면을 이루는 도형의 배열을 변형하고, 대수적 접근을 시도하여 공간도형의 단면의 모양을 규명하거나 평면에 겨냥도로 표현하는 공간 시각화 능력이 나타내고 있음을 알 수 있다.

본 연구에서 관찰 대상인 학생들은 전개도나 겨냥도에서 도형이 배열된 패턴에 주목하여 그것을 변형하거나 재배열함으로써 문제를 해결할 수 있었는데, 이러한 공간 시각화 능력은 하나의 문제를 해결하기 위해 반드시 한 가지 능력만 사용되는 것은 아니며, 다루어 본 경험이 없거나 복잡한 형태로 제시된 문제에서는 두 가지 이상의 공간 시각화 능력이 서로 통합되었을 때 문제해결에서 도형의 조작과 구성이 보다 원활하게 이루어지고 있다.

Ⅵ. 결론

본 연구는 초등수학에서의 기하문제해결에서 시각화 과정이 어떻게 전개되는지, 그리고 이러한 과정에서 도형에 대한 이해는 어떤 형태로 이루어지는지를 살펴보았다. 또한 공간도형에서의 문제해결에서 시각화 능력은 어떤 역할을 하는지 살펴보았다.

기하문제해결에서 공간 시각화는 외부로부터 지각된 대상이나 정보에 대하여 정신적으로 관련된 이미지를 구성하거나, 정신적으로 구성된 이미지를 외적으로 표현하는 활동 모두를 포함하고 있으며, 수학적 개념의 이해와 문제해결을 목적으로 내적 또는 외적으로 이미지를 다루는 모든 과정을 포함한다. 기하교육에서 공간에 대한 이해를 기르기 위한 연구는 공간지각능력을 구성하는 요인으로 공간 관계, 공간 시각화, 공간 방향 등이 제시하면서 전개되어왔다. 여기서 공간 시각화는 기하에서의 문제해결을 결정짓는 중요한 요인으로 다루어지고 있다.

지금까지 이러한 공간 시각화는 주로 중등수준에서의 기하교육에서 다루어진 반면, 초등수학에서 문제해결 특히 평면도형과 공간도형에서의 문제해결과 관련해서 초등학생들의 공간 시각화에 대한 논의는 부족했다. 이에 본 연구는 공간 시각화를 초등수준의 수학에서 살펴보기 위한 것으로, 기하문제해결과 관련해서 평면도형과 입체도형 문제를 해결하는 과정을 분석하여 시각화 과정과 도형 이해, 그리고 시각화 능력에 대해 살펴보았다.

먼저 평면도형 문제해결의 경우, 시각화 과정에서 도형에 대한 이해는 일차적인 지각적 이해와 함께 담론적 이해, 조작적 이해를 통해 이루어지며, 이러한 이해는 구성 요소 간, 여러 성질 간의 관계를 이끌어내고, 아울러 도형의 구조를 파악하는 발견적인 역할을 하고 있음을 알 수 있다. 본 연구에서는 동일한 문제에 대해 학생들의 각기 다른 시각화 과정을 분석함으로써, 도형에 대한 이해가 어떻게 진행되고, 그리고 시각화를 통한 도형의 이해가 어떻게 문제해결로 나아가는지를 중점적으로 살펴보았다. 다음으로 입체도형 문제해결에서는 시각화 능력을 7가지 범주로 구분

하여 각각에서 시각화 능력이 어떻게 발현되고 있는지, 그리고 시각화 능력이 어떻게 문제해결로 이어지고 있는지를 살펴보았다.

본 연구에서 분석한 결과를 종합해보면, 초등수학의 경우 기하문제해결에서 시각화는 문제해결을 위한 출발점에 놓여 있으며, 시각화 과정에서 비롯된 도형의 이해와 시각화 능력이 문제해결과 직접적으로 관련되어 있음을 알 수 있다. 이는 시각화가 문제해결에 유용한 도형의 구조와 관계에 대한 이해를 낳고 있으며, 더불어 시각화를 통한 통찰이 문제해결에서 결정적인 역할을 하기 때문으로 여겨진다.

본 연구의 후속과제로는, 문제해결에서 학생들이 어떻게 추론과 정당화를 이끌어내는지 살펴볼 필요가 있다. 또한 평면도형에서의 시각화 과정과 공간도형에서의 시각화 능력의 관련성을 분석할 필요가 있다. 평면도형 문제해결에서 나타나는 시각화 과정과 공간도형 문제해결에서 나타나는 시각화 능력을 관련지어 그 특징을 분석함으로써, 공간 시각화가 평면도형과 공간도형 두 영역에서 동등하게 발달할 수 있는지, 아니면 구분해서 생각해야 하는 문제인지 살펴보는 것은 기하문제해결 과정을 전반적으로 검토하는데 중요한 연구과제가 될 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] 교육부(1998), 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서(주).
[2] 교육인적자원부(2003), 수학5-가・나 교사용 지도서, 서울: 대한교과서주식회사.
[3] 교육인적자원부(2003), 수학6-가・나 교사용 지도서, 서울: 대한교과서주식회사.
[4] 김성준(2002), 과정-대상 측면에서 본 '대수적 사고' 연구, 대한수학교육학회 수학교육학연구, 12권 4호, 457-472.
[5] 김은영(2009), 4Dframe 활용 학습이 초등학생의 공간감각능력 신장에 미치는 효과, 서울교육대학교 석사학위논문.
[6] 김혜정(2003), 공간 시각화 활동을 통한 기하학습이 공간감각능력과 의사소통능력에 미치는 효과, 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.
[7] 류현아(2008), 중등 기하문제 해결에서 시각화와 추론과정, 건국대학교 대학원 박사학위논문.
[8] 문광호(1998), 중・고등학교 수학의 시각화에 관한 연구(대수, 기하 영역을 중심으로), 서울대학교 대학원 석사학위논문.
[9] 백은자(2006), 초등수학에서 유시스킨의 반힐레 수준검사지의 문제점 분석 및 개선 연구, 전주교육대학교 석사학위논문.
[10] Del Grande. J.(1987), Spatial perception and primary geometry. In M. M. Lindquist, *Learnning and Teaching Geometry K-12: 1987 Yearbook,* Reston: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
[11] Dubinsky, E.(1991), Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, In D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*(pp.95-123). Kluwer Academic Publishers.
[12] Duval, R.(1998), Geometry form a cognitive point a view. In C. Mammana and V. Villani(eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st*

Century(pp.37-52), Kluwer Academic Publishers.
[13] Freudenthal, H.(1973), *Mathematics as an Educational Task*, Dordercht: D. Reidel Publishing Company.
[14] Gutiérrez(1996), Visualization in 3-dimensional geometry, Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
[15] National Council of Teachers of Mathematics(1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Yun, Yea Joo
Daeyon Elementary School
Daeyon 5-dong Nam0gu, Busan, 608-025, Korea
E-mail address: sailermoon018@hanmail.net

Kim, Sung Joon
Busan National University of Education
37 Gyodae-ro Yeonje-gu, Busan, 611-736, Korea
E-mail address: joonysk@bnue.ac.kr