East Asian Mathematical Journal
Vol. 26 (2010), No. 4, pp. 487-507

삼각함수의 Mathematization에 관한 연구

김 부 윤 · 정 영 우

ABSTRACT. We study mathematization of natural thinking and some materials developed in geometric construction of regular n-polygons. This mathematization provides a nice model for illustrating interesting approaches to trigonometric functions and trigonometric ratios as well as their inter-connections. Thereby, results of this paper will provide the procedure of the development for these concepts in natural way, which will be helpful for understanding background knowledges.

1. 서론

현행 수학과 교육과정에서는 삼각비를 중학교 3학년 '기하 영역'에서, 삼각함수를 고등학교 1학년 '함수 영역'에서 다루고 있는데, 삼각비는 종합기하의 관점에서 '닮음인 두 직각삼각형에서 대응변의 길이의 비가 항상 같다.'는 사실로부터 도입되고 있다. 그리고 삼각함수는 함수의 관점에서 '삼각비를 일반각으로 확장하여 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수를 정의하고, 이를 삼각함수라 함을 알게 한다.'라고 밝히고 있다. 삼각함수의 함숫값을 계산할 때 삼각비가 수단으로 사용됨으로 인하여 동일한 뿌리를 가진 것으로 여기지만, 이처럼 삼각비와 삼각함수는 본질적으로 다른 개념이므로, 각각의 본질적 개념과 이들 사이의 관련성에 대한 이해가 필요하다.

그런데 교육과정 및 교과서의 내용을 살펴보면, ① 기하 영역의 삼각비 지도에

2010년 7월 투고, 2010년 8월 심사 완료.
2000 Mathematics Subject Classification: 97D40
Key words: geometric construction of regular n-polygons(정다각형의 작도), trigonometric functions(삼각함수), mathematization(수학화)
* 이 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었음.

함수적 관점이 혼재되어 있어 삼각비와 삼각함수의 본질적 차이에 대한 고려가 부족하며, ② 삼각함수의 함숫값 계산에 삼각비를 수단적으로 사용하기 위한 배경적 내용이 충분히 다루어지지 않고 있음을 알 수 있다.

따라서 본 연구에서는 교육과정 및 교과서에 기초하여 삼각비와 삼각함수의 지도 내용의 정당성을 고찰하고, 김부윤・정영우(2010)의 교수・학습 이론인 'mathematization'을 적용하여 삼각비와 삼각함수의 관계 그리고 각의 크기를 나타내는 두 가지 표현방법의 의의를 맥락화한 '삼각함수의 mathematization'을 구성한다.

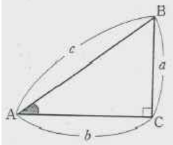
이러한 연구는 교사의 가르칠 지식에 대한 학문적 지식의 이해와 현대수학 구조 속에서 다양한 지도 관점 및 지도 방법을 개발하려는 것으로, 교재론적 관점에서의 모델 개발이 목적이다. 이러한 모델 개발을 위한 과정은 교수 활동을 위한 얼개를 제공할 뿐 아니라, 교육과정을 비판적 시각에서 분석할 수 있는 안목을 기르는데 도움이 될 것이다. 또한 이는 교사의 전문성 신장의 하위요소인 교과지식에의 전문성 신장을 위한 활동의 단초가 될 것이다.

Ⅱ. 본론

1. 삼각비와 삼각함수의 교수학적 고찰

(1) 삼각비의 교수학적 고찰

중학교에서 삼각비는 닮음인 두 직각삼각형의 대응변의 길이의 비가 항상 일정하다는 사실로부터 도입되고 있으며, 이어서 하나의 직각삼각형에서 직각이 아닌 각(A)의 사인($\sin A$), 코사인($\cos A$), 탄젠트($\tan A$)를 다음과 같이 정의하고 있다.



그러므로 한 예각 A에 대하여 ∠A를 한 각으로 하는 직각삼각형 ABC를 어떻게 만들더라도 변의 길이의 비

$$\frac{a}{c},\quad \frac{b}{c},\quad \frac{a}{b}$$

의 값은 항상 일정하다. 이 일정한 비의 값을 각각 ∠A의 **사인, 코사인, 탄젠트**라 하고

$$\sin A,\quad \cos A,\quad \tan A$$

로 나타낸다.

그리고 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$를 ∠A의 **삼각비**라 한다.

<그림 1> 삼각비 도입의 예

그리고 특수각 – 즉, 30°, 45°, 60° – 에 대한 삼각비를 다룬다. 그 후 임의의 예각에 대한 삼각비를 원점이 중심이고 반지름이 1인 사분원과 모눈종이를 이용하여 추측하고, 나아가 직관적 관찰을 통해 다음을 정의하고 있다 :

$$\sin 0^\circ = 0,\ \cos 0^\circ = 1,\ \tan 0^\circ = 0,\ \sin 90^\circ = 1,\ \cos 90^\circ = 0$$

마지막으로 삼각비의 표를 사용하여 0°에서 90°까지의 각에 대한 삼각비의 근삿값을 구하는 방법을 다루고 있다.

그러나 이러한 내용 전개에 있어 몇 가지 의문이 있을 수 있다. 우선, 정의에 의하면 삼각비는 직각삼각형이 있다는 것을 전제로 하여 나온 개념이다. 그런데 '삼각형의 내각의 합은 180°이다.'라는 사실로부터 직각이 아닌 각(A)은 90°보다 작은 크기를 가지게 된다. 즉, 삼각비에서 다룰 수 있는 각의 크기는 $0^\circ < A < 90^\circ$이다. 그렇다면 삼각비를 논할 직각삼각형이 존재하지 않는데 0°와 90°의 삼각비를 어떻게 정의할 수 있으며, 존재하지도 않는 이들 값들을 굳이 정의해야 하는 이유는 무엇일까?

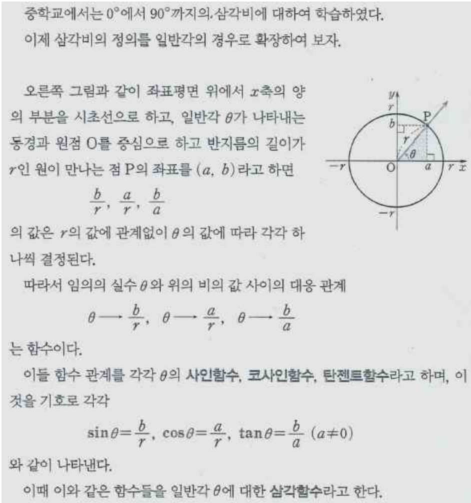
중학교 교육과정해설서(2008)에서는 다음과 같은 내용을 밝히고 있다.

> 0°와 90°에 가까워짐에 따라 삼각비의 값이 어떻게 변하는가를 살펴봄으로써 0°와 90°에 대해서도 사인과 코사인의 값을 정할 수 있다는 것을 알게 한다. (중략) 삼각비의 값은 0°에서 90°까지의 각도에 대한 것을 다루고, 삼각비의 그래프는 다루지 않는다.

여기서 '0°와 90°에 대해서도 삼각비의 값의 변화를 관찰함으로써 사인과 코사인의 값을 정할 수 있다'는 것과 '삼각비의 그래프는 다루지 않는다.'는 부분은 둘 다 함수의 관점에서 서술한 것이다. 이러한 개념을 다루기 위해서는 함수와 극한 그리고 연속 등의 개념이 필요하다. 중학교의 특성상 직관적으로 이러한 내용을 지도한다고 하더라도 기하의 관점에서 논의되는 삼각비 단원을 함수의 관점에서 다루어야 할 불가피한 필요성이 있는지는 의문이다. 실제로 이후 다루어지는 내용 가운데 이러한 것을 반드시 활용해야 하는 내용은 찾아보기 어렵다. 즉, 0°와 90°에서의 삼각비의 값은 삼각함수에서 다루어져야 할 내용이며, 삼각함수를 정의하고 그래프를 다루는 과정에서 필요한 개념이다. 그리고 이때 각의 표현은 호도법을 사용하여야 한다. 그러므로 중학교에서는 삼각비의 본질적인 이해에 초점을 두고, $0^\circ < A < 90^\circ$인 경우의 삼각비만을 다루어야 한다.

(2) 삼각함수의 교수학적 고찰

삼각함수는 일반각과 호도법을 다룬 뒤, '삼각비를 일반각으로 확장하여 삼각함수를 정의하여 보자.'는 발문으로부터 도입하고 있다. 그리고 다음과 같은 도식을 제시하며 삼각함수를 정의하고 있다.



중학교에서는 0°에서 90°까지의 삼각비에 대하여 학습하였다.

이제 삼각비의 정의를 일반각의 경우로 확장하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 x축의 양의 부분을 시초선으로 하고, 일반각 θ가 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이 만나는 점 P의 좌표를 (a, b)라고 하면

$$\frac{b}{r},\ \frac{a}{r},\ \frac{b}{a}$$

의 값은 r의 값에 관계없이 θ의 값에 따라 각각 하나씩 결정된다.

따라서 임의의 실수 θ와 위의 비의 값 사이의 대응 관계

$$\theta \longrightarrow \frac{b}{r},\quad \theta \longrightarrow \frac{a}{r},\quad \theta \longrightarrow \frac{b}{a}$$

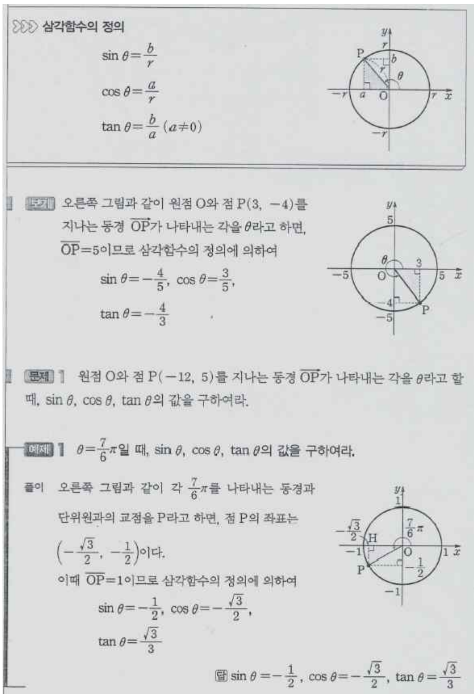
는 함수이다.

이들 함수 관계를 각각 θ의 **사인함수**, **코사인함수**, **탄젠트함수**라고 하며, 이것을 기호로 각각

$$\sin\theta=\frac{b}{r},\ \cos\theta=\frac{a}{r},\ \tan\theta=\frac{b}{a}\ (a\neq 0)$$

와 같이 나타낸다.

이때 이와 같은 함수들을 일반각 θ에 대한 **삼각함수**라고 한다.



삼각함수의 정의

$$\sin\theta=\frac{b}{r}$$
$$\cos\theta=\frac{a}{r}$$
$$\tan\theta=\frac{b}{a}\ (a\neq 0)$$

보기 오른쪽 그림과 같이 원점 O와 점 P(3, −4)를 지나는 동경 $\overrightarrow{OP}$가 나타내는 각을 θ라고 하면, $\overline{OP}=5$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin\theta=-\frac{4}{5},\ \cos\theta=\frac{3}{5},$$
$$\tan\theta=-\frac{4}{3}$$

문제 1 원점 O와 점 P(−12, 5)를 지나는 동경 $\overrightarrow{OP}$가 나타내는 각을 θ라고 할 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

예제 1 $\theta=\frac{7}{6}\pi$일 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

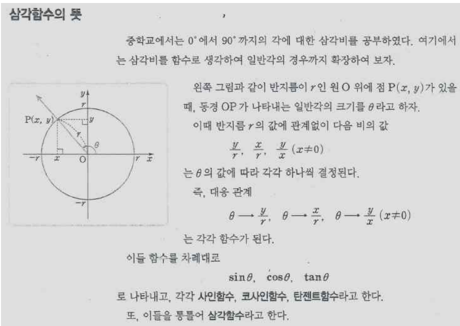
풀이 오른쪽 그림과 같이 각 $\frac{7}{6}\pi$를 나타내는 동경과 단위원과의 교점을 P라고 하면, 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$이다.

이때 $\overline{OP}=1$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin\theta=-\frac{1}{2},\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

<교과서 1>



삼각함수의 뜻

중학교에서는 0°에서 90°까지의 각에 대한 삼각비를 공부하였다. 여기에서는 삼각비를 함수로 생각하여 일반각의 경우까지 확장하여 보자.

왼쪽 그림과 같이 반지름이 r인 원 O 위에 점 P(x, y)가 있을 때, 동경 OP가 나타내는 일반각의 크기를 θ라고 하자.

이때 반지름 r의 값에 관계없이 다음 비의 값

$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

는 θ의 값에 따라 각각 하나씩 결정된다.

즉, 대응 관계

$$\theta \longrightarrow \frac{y}{r},\quad \theta \longrightarrow \frac{x}{r},\quad \theta \longrightarrow \frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

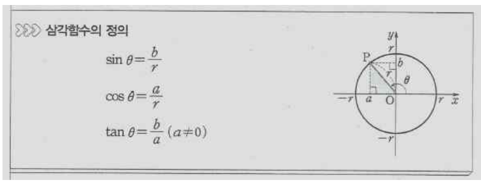
는 각각 함수가 된다.

이들 함수를 차례대로

$$\sin\theta,\quad \cos\theta,\quad \tan\theta$$

로 나타내고, 각각 **사인함수**, **코사인함수**, **탄젠트함수**라고 한다.

또, 이들을 통틀어 **삼각함수**라고 한다.



삼각함수의 정의

$$\sin\theta=\frac{b}{r}$$
$$\cos\theta=\frac{a}{r}$$
$$\tan\theta=\frac{b}{a}\ (a\neq 0)$$

<교과서 2>

<그림 2> 고등학교에서 삼각함수 도입 예

여기서 <교과서 1>은 '삼각비의 정의를 일반각의 경우로 확장하여 보자.'로 시작하여 제1사분면의 도식으로 삼각함수를 도입하고, 정의를 제시할 때에는 제2사분면의 도식을 사용하고 있다. 그리고 보기와 예제로 제3사분면과 제4사분면의 경우를 다루고 있다.

한편, <교과서 2>는 '삼각비를 함수로 생각하여 일반각의 경우까지 확장하여 보자.'로 시작하여 정의뿐만 아니라, 문제에서도 제2사분면에서의 도식을 주로 제시하고 있다. 그리고 이어서 삼각함수의 값의 부호와 삼각함수의 성질, 그리고 삼각함수의 그래프를 다루고 있다.

그런데 두 교과서 모두 서로 다른 개념인 삼각비를 삼각함수로 생각할 수 있는 근거나 90°이상의 각에 대한 삼각비를 계산하기 위해 직각삼각형을 구성할 때, 왜 x축으로 수선을 내린 쪽을 선택하는지에 대한 충분한 설명이 없다.[1)]

이러한 도입 및 전개는 삼각비와 삼각함수의 본질 및 관계에 대한 충분한 설명이 이루어지지 않고 있음을 보여준다. 즉, 왜 각의 크기를 나타내기 위해 육십분법(단위 : °) 외에 호도법(단위 : rad)이 필요한지? 그리고 삼각함수의 함숫값 계산을 위해 삼각비를 활용하려면, 우리가 해결해야 할 선결과제가 무엇인지?에 대한 배경적 고려가 전혀 없다.

이를 위해서는 우선 삼각비와 삼각함수의 개념이 명확히 이해되어야 하며, 삼각함수의 내용을 구성함에 있어 제1사분면에서 삼각함수를 정의하여 삼각비와 그 관련성을 인식시키고, 다음으로 각을 0°와 90°이상인 양의 일반각에 대한 삼각함수의 함숫값을 구하기 위한 수단으로 삼각비를 이용하도록 지도하는 것이 바람직하다. 그리고 음의 일반각의 경우도 양의 일반각의 경우로 다룰 수 있음을 보인다. 이때, 각의 크기를 나타내는 두 가지 방법이 가지는 의의를 강조할 필요가 있다.

(3) 삼각비와 삼각함수의 교수학적 비교

실제로 삼각비와 삼각함수는 본질적으로 전혀 다른 개념이다. 특히 삼각함수를 도입할 때, 삼각비와의 차이점을 충분히 인식시키는 것은 이후의 함수 개념의 이해와 미적분학의 학습에 있어 중요하다. 그러나 삼각함수의 계산은 삼각비를 수단으로 하여 수학적으로 형식화될 수 있으므로 삼각비로부터 삼각함수를 구성하

---

1) 도식에는 직각삼각형이 두 개 제시되어 있다. 이것은 여각관계를 설명할 수 있는 소재이기도 하다.

기는 하되 이러한 차이점이 잘 드러나게 구성할 필요가 있다.

① 삼각비에서의 각의 크기는 도형이 이미 주어진 상태에서의 양(量)이며, 이는 종합기하의 입장이다. 이때, 각의 크기는 육십분법으로 표현한다. 반면, 삼각함수에서는 시초선과 동경을 사용한 회전량(回轉量)으로 각의 크기를 정의하며, 이는 함수 및 해석기하[2]의 입장이다. 이때, 각의 크기는 호도법을 사용하여 표현한다.[3]

② 삼각비를 생각할 수 있는 각의 범위는 직각이 아닌 나머지 두 각의 합이 90°이어야 하며, 따라서 예각의 경우에 한정된 논의이다. 그런데 삼각함수는 각에 회전의 개념이 도입되므로 일반각을 생각할 수 있다. 우리가 다루는 육십분법의 일반각은 호도법에 의한 일반각 표현을 육십분법의 경우로 재적용한 것이라 할 수 있다. 따라서 일반각의 개념은 본질적으로는 삼각비에서는 다룰 수 없는 개념이다. 즉, 평면에 대한 기하학적 각의 단위인 육십분법을 전제로 예각에 대해서만 삼각비의 개념을 논할 수 있으며, 그 외의 각에 대한 삼각비는 예각에 대한 삼각비를 활용하여 구하면 된다.

③ 삼각비는 직각삼각형이라는 기하학적 도구에서 논의되는 개념이므로 각의 크기는 실수의 개념이 아니다. 그런데 삼각함수는 정의역이 실수이어야 하므로 각의 크기를 ‘실수화’ 할 필요가 있다. 그러므로 호의 길이와 각의 크기가 일대일 대응 관계가 되도록 호도법을 정의한다.[4] 따라서 호도법은 삼각함수를 정의하고 연산을 다루기 위한 수단적 개념이다.

이러한 차이는 학생들이 이들 수학적 개념을 연결성 있게 이해하기 위해 충분히 지도되어야 한다. 그러나 삼각비와 삼각함수의 학습시기의 간극이 그다지 크지 않음에도 불구하고, 많은 학생들이 삼각함수나 삼각방정식과 삼각부등식에 육십분법으로 표현된 각을 혼용하여 사용하고 있다. 지도내용을 고려할 때, 그 원인으로 삼각함수에서 호도법을 사용해야 하는 이유에 대한 이해의 부족, 그리고 회전량으로서의 각의 개념이 나타나면서 주기함수인 삼각함수의 함숫값을 계산

---

2) 삼각함수의 그래프는 $(x,y)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$로 주어지며, (x,y) 또는 (r,θ)의 자취이다.

3) 이종희(2001)는 이 두 개념을 ‘삼각법에 의한 정의’라 분류하고 있다. 그러나 이것은 정적인 개념과 동적인 개념에서의 각의 본질적 차이가 고려되지 않은 분류라 생각된다.

4) 남진영 · 임재훈(2008)은 “라디안은 ‘각의 크기’와 부채꼴에서 호와 반지름의 관계라는 ‘동질량의 비’라는 두 측면을 가지며, ‘동질량의 비’란 측면은 삼각함수의 정의역과 치역을 동질량이 되게 하여 삼각함수의 합성이 가능하게 한다.”고 라디안의 의의를 밝히고 있다.

하는 수단으로 투입되는 과정에 대한 이해의 부족을 생각할 수 있다. 이는 단순히 '삼각비를 일반각으로 확장하여 삼각함수를 정의'하는 것이 아닌, 보다 삼각비와 삼각함수 사이의 내적 연결성 및 수학적 개념 형성의 필연성이 드러나는 지도가 필요함을 반증하고 있다.

결론적으로, 0°와 90°의 삼각비는 중학교 삼각비와 관련하여 지도할 것이 아니라, 고등학교에서 삼각함수를 다룰 때 함숫값으로 지도되어야 할 것이다. 또한 각의 표현법의 의의 그리고 삼각비를 삼각함수의 계산에 수단으로 사용할 수 있는 관계성에 대한 충분한 지도가 이루어져야 할 것이다.

2. 삼각비와 삼각함수의 역사[5)]

삼각비를 이용하여 삼각형의 변의 길이, 각의 크기 등을 계산하는 방법을 삼각법이라 하는데, 삼각법은 천문학, 토지 측량과 같은 실용상의 필요에 의해서 시작되었기 때문에 그 역사는 매우 길다. 또, 삼각법은 천문학상의 응용에서 출발한 것으로 평면삼각법보다는 구면삼각법[6)]이 먼저 시작되었다. 고대 이집트, 바빌로니아, 중국 등에서도 각의 계량이나 삼각법에 대한 단편적 지식 등이 있었으나, 삼각법의 창시자는 기원 전 150년경에 살았던 Hipparchos라고 한다. 서기 150년경 Ptolemaeos가 저술한 「알마게스트(Almagest)」에는 소수점 아래 다섯 자리까지 정확한 30′마다 현의 표와 가법정리가 나온다. 그때까지는 삼각함수를 호와 관련시켜서 생각했으나, Ptolemaeos는 직각삼각형을 만들어 그들의 각에서 직접 삼각함수표를 처음 생각해낸 사람으로 알려져 있다. 그는 또 tangent, secant의 표도 처음 만들었다고 한다. 그러나 Aryabhata의 「아리아바티야(Aryabhatiya)」에는 사인을 각의 함수로 취급하고 있다. 또한 Müller가 쓴 「모든 종류의 삼각형에 대하여(De triangluis omnimodis)」에서는 처음으로 삼각법이 천문학에서 분리되어 독립된 분야로써 계통적으로 다루어졌다. 삼각법의 여러 정리는 그 후에 Rhaeticus, Napier, Kepler 등을 거쳐 Newton에 이르러서야 일반각이 정확하게 인식되었으며, $\sin x$, $\cos x$의 급수전개가 발견되었다. 또 Euler에 의해서 이 공식은 복소수 변수로 확장되었고, 복소수의 편각(偏角)을 생각하고 나서부터 오늘날

5) 박규홍 외(2002), pp.151-152.

6) 이것은 위도($\varnothing$)와 경도(θ)를 이용한 구면좌표계에서 논의된다. 직각좌표계와의 관계는 $x = r\cos\varnothing\cos\theta$, $y = r\cos\varnothing\sin\theta$, $z = r\sin\varnothing$ 이다.

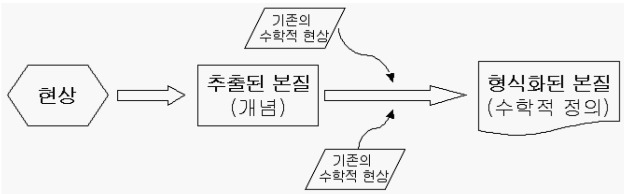
쓰고 있는 삼각함수의 기호가 도입되었다. 이렇게 삼각함수는 삼각형에 관한 본래의 연관성에서 벗어나 차츰 삼각함수 사이의 관계, 즉 본질적인 해석학적 삼각함수로 그 중요성이 옮겨갔다. 따라서 역사적으로 보면, 삼각비의 표에서 함수 개념도 같이 발생하고 있다고 분석할 수 있으며, 사인함수가 먼저 도입[7]되었고, 여각의 사인을 계산하기 위한 필요성에서 코사인함수가 탄생하였다.

3. Mathematization과 Byproduct Mathematization

수학 교수·학습 이론의 하나인 역사발생적 원리나 Freudenthal의 수학화(mathematising)는 수학적 개념을 학생들에게 지도할 때, 학습자의 수준을 고려하여 가르칠 개념의 역사적 사실을 재구성하고, 이를 경험시킨다는 것이다. 여기서 주요 개념은 '역사적 사실'과 '재구성'이다.

김부윤·정영우(2010)는 이러한 원리를 받아들이면서도 교육과정과 학습 수준을 고려했을 때, '역사적 사실'만으로는 효율적인 수학화가 이루어지기 어렵다고 보고, 역사적 사실, 교육과정의 흐름, 현대수학의 학문적 구조를 고려한 보다 확장된 범위에서의 'mathematization(수학화)'를 정의하였다. 또한 초점을 수학적 개념이 발생되고, 그러한 형태로 형식화될 수밖에 없었던 필연성 및 관련 수학적 지식들과의 개연성에 두고, 이러한 수학화를 구성할 것을 주장하고 있다. 또한 수학화를 현상에서 본질을 형식화해가는 목적성 있는 활동으로 보고, 목적과 수단이란 측면에서 수학화를 다음 세 가지 유형으로 분류하였다.

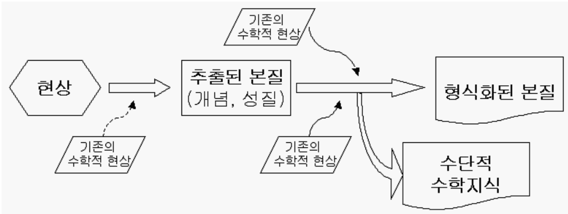
<유형 1>은 현상으로부터 수학적 개념을 추출하고 이를 형식화하여 본질을 구명하는 과정으로 기존의 수학적 지식이 투입되기도 한다.



<그림 3> 유형 1의 도식

7) 예를 들어, 피라미드의 높이를 막대기의 그림자를 이용하여 측정하려면 사인과 관련된 개념이 필요하다. 즉, 역사적으로는 사인과 코탄젠트가 먼저 나타난다.

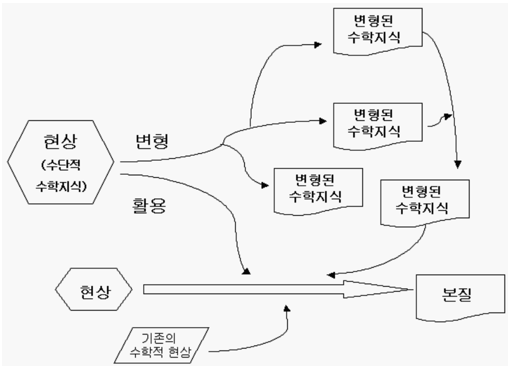
<유형 2>는 유형 1의 과정에서 본질을 형식화하기 위하여 새로운 수학적 지식이 수단으로 구명되는 경우를 말한다.



<그림 4> 유형 2의 도식

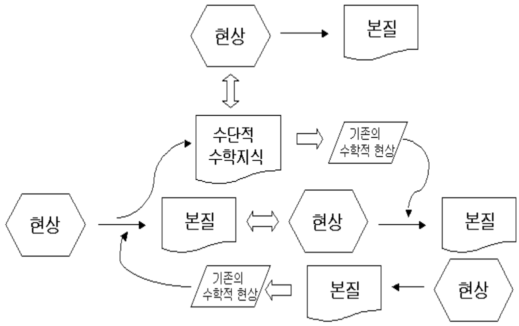
본질을 형식화하기 위한 이러한 수단적 지식을 ‘byproduct(곁가지)’라 한다.

<유형 3>은 유형 2의 곁가지가 변형과 활용을 통하여 자신의 가치를 높여가는 과정으로 ‘byproduct mathematization(곁가지의 수학화)’이라 한다.



<그림 5> 유형 3의 도식

또한 수학적 지식은 수학화를 통한 본질이 다시 현상이 되는 순환적 과정을 통해 성장해간다.



<그림 6> 수학적 지식의 성장 과정

4. 삼각함수의 mathematization[8)]

삼각함수를 역사적 사실에 기초하여 지도하기에는 현행 수학과 교육과정과는 맞지 않는 부분 – 예를 들면, 각을 원의 중심각으로 해석하는 아이디어나 회전각으로 보는 것보다 호의 길이에 의하여 각을 해석하는 것이 먼저라든지[9)], 현행 수학과 교육과정에서 사인함수와 코사인함수를 대등하게 다루고, 사인함수와 코사인함수의 비로 탄젠트함수를 다루며, 나머지 삼각함수는 상대적으로 덜 강조하고 있다는 것 등 – 이 더러 있다. 이것은 역사적 흐름이나 발생적 중요도와는 거리가 있다. 그러므로 이러한 거리를 극복하기 위하여 학생들에게 제공될 맥락은 Freudenthal의 안내된 재발명의 원리를 받아들인다면, 그러한 개념이 어떻게 생겨났고, 다른 개념들을 어떻게 파생시켰는지, 그리고 기존의 수학적 지식들과 어떤 관련성을 맺으며 발전되어 왔는지를 재구성하는 것이면 충분하다고 여겨진다. 즉, 현행 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 내용이나 순서를 고려하면서, 수학적 개념의 본질이 잘 드러나게끔 구성하여 학생들에게 수학화 하는 활동을 제공할 필요가 있다.

이에 대한 하나의 모델로 '정다각형의 작도를 이용한 삼각함수의 수학화'를 제안한다.

<단계 1> 작도의 일반적 방법 탐구

고전적 의미에서 작도는 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 도구로 사용한다. 이때,

---

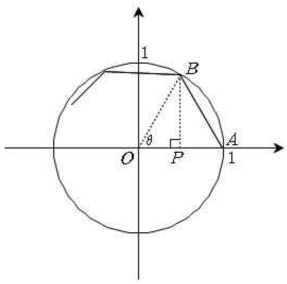
8) 본 내용은 이영옥(2010)을 기초로 재분석하여 구성하였다.

9) 남진영 · 임재훈(2008) 참고.

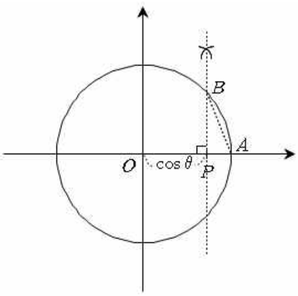
다룰 수 있는 기본도형은 선분과 원이다. 따라서 다각형을 작도할 경우에도 이 두 도구와 기본도형을 사용할 수밖에 없다. 한편, 원의 중심에서 원을 분할하면 연속된 삼각형들을 얻을 수 있다. 그렇다면 이러한 사실들을 이용하여 정삼각형, 정사각형, 정오각형, …, 정n각형을 어떻게 작도할 수 있을까를 생각해 보자.

수학적 문제를 해결하는 하나의 방법은 이미 결과가 만족된 상황을 가정하고, 관점을 바꾸어 봄으로써 해결의 실마리를 얻게 되는 경우가 있다. 이 문제를 해결하기 위해 그런 방법을 활용해 보자.

아래 그림과 같이 중심이 원점인 단위원 O를 그리자. 이 단위원 위에 정다각형의 각 꼭짓점이 놓이게 정다각형을 작도하도록 하자. 우선 정n각형이 단위원 위에 그려진 상태를 생각해 보자. 중심을 O, $(1,\ 0)$을 점 A라 하고, 제1사분면에 있으면서 x축 위에 있지 않는 첫 번째 점 B을 생각하자. 점 B에서 x축 위에 수선을 내리고 x축과의 교점을 P라 하자. 점 P, 점 O, 점 B를 이으면 직각삼각형 BOP가 얻어진다. 사실, 정n각형을 작도하는 문제의 핵심은 정n각형의 한 변을 결정하는 점 B를 어떻게 정하는가이다. 그런데 위의 상황에서 점 B를 결정하는 요소는 각 $\theta = \angle BOP$와 점 P임을 알 수 있다.



그러나 우리가 알고 있듯이, 모든 각을 작도할 수는 없다. 그렇다면 점 P를 이용할 수 있는 방법을 생각하게 되고, 따라서 직각삼각형의 한 변인 선분 OP를 수학적으로 다룰 필요가 생긴다. 그런데 이 경우 삼각비를 이용하면 $OP = \cos\theta$이다. 그러므로 $\cos\theta$의 값으로 점 P의 위치를 정할 수 있다. 이렇게 점 P가 정해지고 나면, 점 P에서 x축에 대해 수선을 작도하고, 그 직선과 단위원이 만나는 점이 점 B로 결정된다. 이 점 B와 x축 위의 점 A를 이으면, 선분 AB가 정n각형의 한 변이 된다.



<단계 2> 작도하기

이제 이렇게 발견한 방법을 적용하여 정삼각형, 정사각형, 정오각형을 작도하여 보자.

① 정삼각형은 첫 번째 점이 제1사분면 안에 존재하지 않으므로 이 방법으로 작도할 수 없다.

② 정사각형을 작도하려면 $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$이므로 첫 번째 점이 y축 위에 있다. 즉, 이 경우 직각삼각형을 이루지 않으므로 삼각비를 이용할 수 없다.

따라서 삼각비를 이용하는 방법으로는 정삼각형과 정사각형을 작도할 수 없다. 그러나 정사각형의 경우는 단위원과 각 축과의 교점을 이어서 작도할 수 있다.

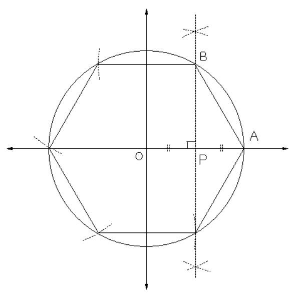
③ 정오각형부터는 첫 번째 점이 제1사분면에 위치하므로 이 방법을 이용하여 작도할 수 있다. 그런데 정오각형은

$$\cos\frac{360^\circ}{5} = \cos 72^\circ = 0.30901699\cdots$$

이고, 정육각형은

$$\cos\frac{360^\circ}{6} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

이므로 정오각형의 경우 OP의 길이를 정확하게 작도할 수 없다. 반면, 정육각형의 작도는 수직이등분선의 작도법을 이용하여 다음과 같이 쉽게 할 수 있다.



<그림 7> 정육각형의 작도

⑤ 정칠각형, 정팔각형, 정구각형 등으로 이 과정을 반복하면서 각 θ의 크기에 따라 점 P의 위치가 바뀐다는 사실에 주목하게 되어, 비로소 함수 개념이 대두되게 된다. 이것은 직각삼각형이라는 이미 주어진 상황에서 변과 각의 관계를 논하는 정적인 의미의 삼각비와는 다른 개념으로, 각 θ가 변함에 따라 $\cos\theta = OP$

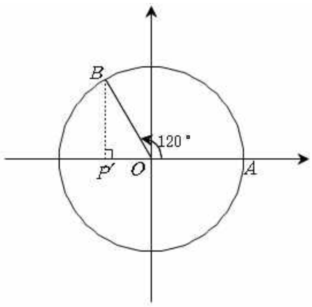
가 변하므로 함수의 개념을 추출할 수 있다. 여기서 중요한 것은 각을 변화의 대상으로 정의하는 관점의 변화이며, 이 관점은 위의 방법을 정삼각형의 작도에 적용하려는 시도에서 더욱 발전하게 된다.

<단계 3> 문제 상황 해결하기

정삼각형의 작도는 $\theta = 120^\circ$이므로, 삼각비를 이용할 수 있는 삼각형의 조건으로 '직각이 아닌 나머지 두 각의 합이 90°이다.'에 맞지 않는 상황이 된다. 그러므로 앞에서의 초기 함수적 개념과 더 이상 삼각비를 이용할 수 없다는 문제 상황이 현상이 되어 새로운 개념을 만들어야 하는 필요성을 이끌어낸다.

(작도) 아래 그림에서와 같이, 첫 번째 점이 제2사분면에 있을 경우 OP의 길이 – 즉, $\cos 120^\circ$ – 를 어떻게 다룰 것인지가 문제이다. 여기서 우리는 또 하나의 수학적 지식을 구성하게 된다.

앞에서 선분 OP를 구하기 위하여 삼각비를 이용하였으며, 이때 그 방법의 힌트는 점 B에서 x축 위에 수선을 내려 직각삼각형을 구성하는 것이었다. 이것을 그대로 적용하면 오른쪽 그림과 같이 제2사분면에 직각삼각형이 생기게 된다. 이 직각삼각형에 대해서는 선분 OP'를 구할 수 있다. 그리고 역으로 점 P'로부터 수선을 그어 추측한 점을 B라 하면, 120°의 각과 단위원이 만나는 점 B와 일치함을 알 수 있다. 이때, 제2사분면의 직각삼각형의 각을 β라 하면, $\beta = 180^\circ - \alpha$이다. 따라서 $\alpha \geq 90^\circ$인 α에 대한 $\cos\alpha$와 $\sin\alpha$의 값을 예각인 β의 삼각비를 이용하여 구할 수 있는 방법 – 즉, $\alpha = 120^\circ$에 대한 OP'를 구하는 방법으로 $\beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$인 $\cos\beta = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$을 이용하여 구한다. – 을 얻게 되었다. 그리고 직각삼각형을 만들기 위해 'x축 위에 수선을 내린다.'고 규정한 수학적 지식은 삼각함수의 정의를 일관되게 적용하게 한다. 이로써 정삼각형도 작도할 수 있게 되었다. 즉, 정육각형의 작도에서와 같이 점 P'를 잡고, 수직이등분선 작도를 통하여 점 B를 잡고, 점 A와 점 B를 연결하면 선분 AB의 길이가 정삼각형의 한 변의 길이가 된다.



<단계 4> 삼각함수의 형식화

이렇게 정n각형의 작도를 다루는 과정에서 발생된 초기 개념들은 다음과 같은

개념으로 발전하게 된다 :

i) 변화하는 값으로써의 각

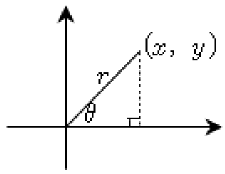
ii) 점 B를 결정하는 각과 반지름의 관계로부터 정의되는 새로운 좌표계

iii) 삼각비를 함의하는 함수 개념

i)의 개념을 수학적으로 형식화한 것이 '회전량으로서의 각'이라는 개념이다. 지금까지의 각은 도형이 주어진 상태에서 두 반직선의 내부 크기를 나타내는 것으로, 원으로 표현된 평면을 360등분한 한 조각의 크기를 단위로 하여 기호 1°로 나타내었다. 이처럼 종합기하의 입장에서 다룰 수 있는 각은 평면에 주어진 각으로 360°보다 작은 값이다. 그러나 회전량으로서의 각의 개념은 일반각 등의 수학적 개념을 만들어냈으며, 일반각의 개념은 다시 육십분법에 적용되어 일반각 $\theta = 360^\circ \times n \pm \alpha$ (단, $n \in \mathbb{Z}$)로 확장되었다.

ii)의 개념을 수학적으로 형식화한 것이 극좌표계로, 반지름 r과 각 θ를 요소로 가지는 것이다. 점 B에서 수직인 변의 길이를 나타내기 위하여 사인함수가 정의되고, 점 B는 $(\cos\theta, \sin\theta)$로 나타내어진다. 이때, $\theta = \frac{\pi}{2}$인 경우의 수직인 높이는 $\sin\frac{\pi}{2} = 1(=r)$이고, $\theta = 0$인 경우의 OP는 $\cos 0 = 1(=r)$임을 알 수 있으며, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$과 $\sin 0 = 0$도 얻을 수 있다[10]. 그리고 이것을 r이 1이 아닌 경우로 일반화하면, 평면 위의 모든 점들은 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$로 나타낼 수 있다.

그러므로 직교좌표 (x, y)를 극좌표 (r, θ)로 변환할 때, 다음 식이 이용된다 :



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

10) 이처럼 삼각함수를 위한 도식 및 그래프를 통하여 비로소 사인과 코사인의 0와 $\frac{\pi}{2}$의 함숫값이 필요해지며, 이를 엄밀하게 형식화하기 위해 극한이 필요하다.

한편, 극좌표 (r,θ)를 직교좌표 (x,y)로 변환할 때는

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$$

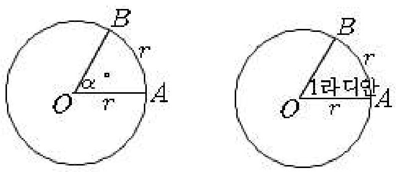
가 이용된다.

ⅲ)의 개념을 형식화한 것이 각의 크기를 정의역으로 하는 삼각함수이며, 함수의 연산인 합성함수를 고려하면 실수 $\mathbb{R}$에서 실수 $\mathbb{R}$로의 함수가 정의될 필요가 생긴다. 이때, 삼각함수를 실수에서 실수로의 함수로 정의할 수 있는가 하는 것이 문제가 되는데, 이것은 삼각함수의 그래프를 다루기 위한 전제 조건이기도 하다. 그러므로 삼각함수의 정의역에서 각의 크기를 육십분법으로 표현하는 것은 적절하지 못하게 되어 새로운 각의 단위가 필요해진다. 여기서 비록 실수는 아니지만 실수화 할 수 있는 각의 단위인 라디안이 정의되게 된다[11]. 호도법에서의 각의 단위인 라디안은 다음과 같이 정의된다 :

<정의 1> 반지름의 길이가 r인 원에서 길이가 r인 호 AB에 대한 중심각의 크기를 α°라고 하면, 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로

$$r : 2\pi r = \alpha^\circ : 360^\circ$$

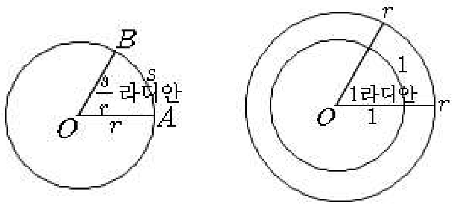
이다. 따라서 $\alpha^\circ = \dfrac{180^\circ}{\pi}$이다. 여기서 $\dfrac{180^\circ}{\pi}$는 반지름의 길이 r에 관계없이 항상 일정하다. 이 일정한 각의 크기 $\dfrac{180^\circ}{\pi}$를 1라디안(radian)이라 하며, 이것을 단위로 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라 한다.



만일 반지름이 r이고 호의 길이가 s이면, 라디안 단위로 나타낸 각의 크기는

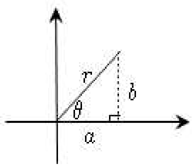
11) 교육과정에서는 호도법을 먼저 지도한 후 삼각함수를 도입하고 있는데, 이종희(2001)는 역사적으로 육십분법과 호도법은 다른 과정으로 발전한 개념으로 보고 있다. 본 연구에서는 역사적 사실의 단순한 재구성이 아닌 인간 사고의 자연스러운 흐름 속에 수용될 수 있게 현대수학의 구조 속에서 재구성한다는 수학화의 원칙을 살려 이 단계에서 호도법의 정의 및 의의를 밝히고 있다.

$\frac{s}{r}$라디안이다. 그리고 $r=1$이라 하면 1라디안과 호의 길이가 같은 값을 갖게 된다. 이것은 반지름의 길이를 변화시켜도 같은 결과를 가진다.



따라서 코사인함수와 사인함수의 변수인 각이 호의 길이인 실수로 ‘실수화’ 할 수 있게 되어 이들 함수의 그래프를 다룰 수 있게 되고 합성함수를 논의할 수 있게 된다.

이로써 이들 삼각함수를 실수에서 실수로의 함수로 다음과 같이 형식화하게 된다.



$$\sin\theta=\frac{b}{r}\quad \cos\theta=\frac{a}{r}$$
$$\tan\theta=\frac{b}{a}\quad \csc\theta=\frac{r}{b}$$
$$\sec\theta=\frac{r}{a}\quad \cot\theta=\frac{a}{b}$$

따라서 제1사분면에서는 삼각비의 값과 삼각함수의 함숫값이 같아진다. 그러나 그 외의 각에 대해서는 각을 일반각으로 표현하고, 함수를 일반각에 대해 정의한 것일 뿐, 함숫값을 어떻게 계산할 것인지는 여전히 과제로 남아 있다. 즉, 수학적 기호로 표현된 사실을 산술로 환원하는 과정이 필요하다. 그 방법이 바로 ‘x축 위에 수선을 내린다.’는 것에 의한 삼각비의 활용이다.

이제 평면 위의 모든 각에 대한 삼각함수의 함숫값을 계산할 수 있게 되었다. 그러나 현재로써는 $\cos\alpha$, $\sin\alpha$의 값을 모두 구할 수는 없다. 따라서 삼각함수의 덧셈정리를 비롯한 공식들이 구명되어[12] 평면 위의 각에 대한 함숫값을 특수각의 함숫값을 이용하여 구하게 된다. 나아가 회전량으로서의 각의 개념에 의해 일반각에 대한 삼각함수의 함숫값 역시 계산할 수 있게 된다.

12) 김부윤 · 정영우(2010) 참고.

결과적으로 회전량으로서의 각의 개념은 또 다른 좌표계를 정의하게 했으며, 단위원의 반지름을 변화시킴으로써 원의 반지름 r도 변수가 되며, 이들 원의 반지름 r과 회전량 θ를 변수로 직교좌표계에서의 점 (x, y)는 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$임을 구명했다. 그리고 평면 위에서 정다각형의 작도문제를 통해 $r \geq 0$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$에서의 삼각함수의 계산법을 삼각비의 개념을 이용하여 얻었으며, $0 \leq \theta < 2\pi$로 확장하였다. 또한 $r < 0$인 경우와 $\theta \geq 2\pi$, $\theta < 0$인 경우까지 r과 θ를 확장하게 되어 실수 전체에 대해 삼각함수를 다룰 수 있게 된다.[13)]

이로써 연속된 변화로 각의 크기와 선분 OP와 선분 BP의 길이 사이의 관계를 추상화할 수 있게 되어 비로소 삼각함수를 형식화하고, 이를 수학적 고찰의 대상으로 삼게 된다.

이처럼 정다각형을 작도하는 방법에 대한 연구를 현상으로 사인함수와 코사인함수의 개념을 본질로 구명했으며, 이 과정에서 '회전량으로서의 각의 개념', '극좌표계', 각의 크기의 실수화를 위한 '호도법'을 곁가지로 얻었다. 그리고 '탄젠트함수를 포함한 다른 삼각함수들'을 추가로 얻었다. 삼각함수는 이후 주기적 변화를 나타내는 함수로 해석학적으로 발전하였으며, 다항식 표현을 이용한 Taylor 급수 전개 대신 삼각함수를 사용한 Fourier 급수 전개를 이끌게 된다. 또한 탄젠트함수는 삼각비에서 알 수 있듯이, 빗변의 기울어진 정도를 수치로 나타낸 기울기라는 개념을 보다 발전시켜 해석학의 발전에 기여하게 된다. 이 개념은 미분계수의 개념인 순간변화율로 추상화되게 되며, 나아가 접선의 기울기와 속도를 정의하는 수단이 된다. 더욱이 도함수의 개념으로 일반화되게 되면서 자신의 가치를 한층 높여간다. 이러한 기울기를 의미하는 미분계수의 개념은 국소적으로 곡선을 직선과 동형구조로 파악할 수 있게 해 줌으로써 직선을 통해 곡선의 변화를 다룰 수 있게 해준다.

한편, 역함수의 개념과 Taylor 급수 표현을 기존의 수학적 현상으로 하여

---

13) $r < 0$인 경우 : (r, θ)는 $(-r, \theta)$를 구한 후 그것을 원점에 대칭이동 시킨 점으로 정의한다.
$\theta \geq 2\pi$ 혹은 $\theta < 0$인 경우 :

$$\theta = 2m\pi + \theta' \ (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots,\ 0 \leq \theta' < 2\pi)$$

일 때 (r, θ')로 정의한다(박건 · 신용호 · 이동수 · 추상목(2010), p.161.).

$$\tan^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

를 얻음으로써, $\frac{\pi}{4}$를 급수로 표현할 수 있게 되었는데, 이는 무리수를 표현하는 또 다른 방법을 준다. 즉, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$이므로

$$\tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$$

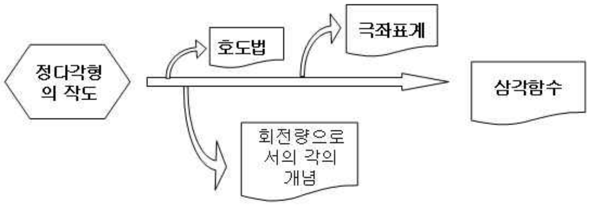
이다. 그러므로 $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$이다. 그리고 접선의 기울기라는 개념은 벡터공간에서 접평면의 개념으로 확장된다.

탄젠트함수는 삼각함수의 수학화 과정에서 보면, 그다지 중요한 개념은 아니다. 역사적으로 코탄젠트가 탄젠트보다 앞서 정의되는 과정에서 사인이 주요 개념이었으므로 코탄젠트함수가 $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$로 정의되는 것이 자연스러운 흐름이었다. 이후 역의 개념인 탄젠트함수는 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$로 정의된 것이다. 이처럼 분모를 주요 개념으로 두는 것은 분수를 정의할 때의 사고 방법을 차용한 것으로 보인다. 그러나 삼각함수의 수학화 과정에서는 코사인함수가 주요 개념이므로 코사인을 분모에 두는 것으로 그 비를 정의하고, 그 역수로 코탄젠트를 정의한다. 이것은 역사적 사실과는 다르지만 현행 교육과정의 내용과는 일치하는 것이며, 수학화의 흐름에서도 자연스럽다. 즉, 삼각함수는 역사적으로는 사인함수와 코탄젠트함수가 먼저 나온 개념이며, 이것은 측정과 관련된 문제를 다루는 과정에서 아는 것과 구해야 하는 것 사이의 관계라는 관점에서 보면 자연스러운 현상이다. 그러나 작도와 관련한 본 수학화에서는 코사인함수가 먼저 나오고, 사인함수가 정의되며, 마지막으로 부수적인 개념으로 탄젠트함수와 나머지 삼각함수들의 개념이 다루어지게 된다. 이것이 ‘수학화의 다양성’이라 할 수 있다. 따라서 어떤 관점에서 수학적 개념을 다루는가에 따라 수학화는 달라질 수 있다.

이처럼 역사적으로 그 발생적 본질을 반영하지는 않지만, 이러한 수학화를 통해서 역사적 사실에서 볼 수 있는 필연성 및 개연성, 그리고 그렇게 형식화될 수밖에 없었던 당위성 등을 충분히 경험하게 구성할 수 있다.

또한 극좌표계는 복소수의 시각화와 통계의 정상분포곡선을 정의하는데 필요한 식의 계산을 가능하게 하며, 적분에서 원주좌표나 구면좌표와 같은 새로운 좌

표계를 정의하는 것으로 수학화 될 수 있다. 따라서 이러한 삼각함수의 수학화는 <유형 2>의 예가 된다.



<그림 8> 삼각함수의 수학화

Ⅲ. 결론

본 연구에서는 중학교에서는 기하 영역의 관점에 맞게 예각에 대해서만 삼각비를 다룰 것과 고등학교에서 삼각함수의 본질적 이해를 위해 호도법의 의의와 삼각비와의 내적 연결성을 강조할 것을 주장하였다. 그리고 mathematization을 적용한 삼각함수 지도 모델을 구성하였다.

이 모델에서는 단위원 위의 정다각형의 작도 방법을 탐구하는 것을 현상으로 분석법을 사용하여 정다각형의 한 변의 길이를 결정하는 요소가 각과 선분 OP의 길이라는 것을 발견하고, 이들의 변화를 통해 함수 개념을 추출하였다. 이때, 선분 OP의 길이를 삼각비의 개념을 빌려 $\cos\theta$로 정의하고, 이를 코사인함수라 하였다. 그러나 삼각비를 그대로 적용할 수 없다는 것을 정삼각형, 정사각형의 경우를 통해 경험하게 되고, 이를 해결하기 위하여 새로운 수단적 지식인 'x축으로 직각삼각형 만들기'라는 조건을 산출하였다. 이 과정에서의 초기함수 개념을 보다 발전시키고 형식화하면서, 새로운 각의 개념과 다양한 삼각함수 그리고 새로운 좌표가 구명되게 된다.

이처럼 정다각형의 작도를 소재로 한 삼각함수의 수학화는 삼각함수의 함수적 본질에 대한 이해 및 삼각비와의 내적 연결성을 경험하게 해주며, 호도법의 의의에 대한 자연스러운 인식을 하게 돕는다. 나아가 그러한 수학적 개념이 필요하게 되는 상황과 그것을 해결해가는 과정에 대한 경험 – 즉, 수학적 활동에 대한 경험 – 을 하게 해준다.

이러한 수학화는 관점과 소재에 따라 다양하게 구성될 수 있으며, 교사들이 수

업을 구성할 때에도 교육과정이나 학습자의 수준 등을 고려하여 이와 같은 수학화를 연구할 필요가 있다. 또한 이러한 수학화를 바탕으로 수학화 활동을 재구성하기 위해서 교사는 가르칠 지식에 대한 깊은 이해와 관련성을 숙지하고 있어야 함은 당연하다고 할 것이다.

본 연구에서 사용한 정다각형의 작도 문제는 다음과 같은 제한점을 가지고 있다. 실제로 작도를 하는 과정에서 정오각형, 정칠각형과 같이 각의 크기나 삼각비의 값이 무리수일 때, 선분 OP의 길이를 작도할 수 없는 경우가 생긴다는 점이다. 그러나 이러한 한계는 '무리수 개념의 발생과 구명'이라는 무리수의 수학화를 위한 좋은 소재가 될 수 있다.

참 고 문 헌

[1] 교육과학기술부(2008), 고등학교 교육과정 해설 5-수학, 한국보훈복지의료공단 신생인쇄조합.

[2] 교육과학기술부(2008), 중학교 교육과정 해설 Ⅲ, 한국보훈복지의료공단 신생인쇄조합.

[3] 김부윤 · 정영우(2010). Byproduct mathematization에 관한 연구. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 제20권 제2호, 145-161.

[4] 권은정(2009). 호도법 개념의 효과적인 지도방안에 관한 연구. 부산대학교 교육대학원 석사학위논문.

[5] 남진영 · 임재훈(2008). 라디안에 대한 교수학적 분석. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 제18권 제2호, 263-281.

[6] 박건 · 신용호 · 이동수 · 추상목(2010). 미분적분학. 울산 : 울산대학교출판부.

[7] 박규홍 · 고성군 · 김성국 · 김유태 · 박재용 · 육상국 · 임창우 · 한옥동(2003). 중학교 수학 9-나 교사용 지도서. 서울 : 두레교육(주).

[8] 양승갑 · 박영수 · 박원선 · 배종숙 · 성덕현 · 이성길 · 홍우철(2003). 중학교 수학 9-나. 서울 : (주)금성출판사.

[9] 이영옥(2010). 삼각비와 삼각함수의 지도방법에 관한 연구. 부산대학교 교육대학원 석사학위논문.

[10] 이재학 · 정상권 · 박혜숙 · 홍진곤 · 박부성 · 김정배 · 김상훈(2009). 고등학교

수학. 서울 : (주)금성출판사.
[11] 이종희(2001). 각 개념에 대한 수학교육적 분석. 대한수학교육학회지 학교수학, 제3권 제1호, 25-44.
[12] 황선욱・강병개・김수영(2009). 고등학교 수학. 서울 : (주)좋은책신사고.
[13] D. Downing(2006). 이야기로 아주 쉽게 배우는 삼각함수. (이정국 역), 서울 : 이지북.
[14] E. Maor(2004). 사인 코사인의 즐거움. (조윤정 옮김). 서울 : 파스칼북스.
[15] H. Eves(2005). 수학사. (이우영・신항균 옮김). 서울 : 경문사.

Kim Boo Yoon
Pusan National University
E-mail address: kimby@pusan.ac.kr

Chung Young Woo
University of Ulsan
E-mail address: nahime1130@hanmail.net