East Asian Mathematical Journal
Vol. 26 (2010), No. 4, pp. 447-461

LOGO와 함께 곡선 만들기
-다각형 패턴의 관점에서

김 화 경* · 송 민 호**

ABSTRACT. Papert [17] introduced the LOGO environment in which we make a curve using LOGO commands (FORWARD, ROTATE). We call this geometry as turtle geometry. This environment has influenced many researchers and designers of computers and mathematics education. But the curve that we can make using LOGO command is elementary or too difficult. Polygon and circle is elementary and making other curves is difficult. In this paper, we introduce the method of drawing some other curves mediating new command. First, we study epicycloid and hypocycloid in the historical and the physical context. And we introduce the method of making epicycloid and hypocycloid using vector addition. Next we study the polygon patterns of this curve. Finally, we extend the method for making more general curve and we improve the computer environment using this metaphor.

1. 들어가며

조한혁 [8]과 김화경 [5]는 수학교육에서 컴퓨터를 연구할 때, '학생주도형'([22]) 관점에서 수학교육을 연구하는 분야를 '컴퓨터와 수학교육'이라고 하였다. '컴퓨터와 수학교육'은 수학교육을 위해 컴퓨터를 종속적으로 이용하는 것이 아니라, 컴퓨터와 함께 수학을 학습하는 환경을 연구하는 분야로 전통적인 교육공학 관

2010년 1월 투고, 2010년 2월 심사완료.
2000 Mathematics Subject Classification: 97C80
Key words: computers and mathematics education(컴퓨터와 수학교육), epicycloid(에피사이클로이드), hypocycloid(하이포사이크로이드), cycloid(사이클로이드), circle model(원 모델), LOGO(로고)
* 교신저자, 상명대학교(indices@smu.ac.kr)
** 서울대학교 대학원(mino@snu.ac.kr)
이 연구는 2009학년도 상명대학교 자연과학연구소 연구비 지원에 의해 수행되었음.

점과 다르다. 컴퓨터와 수학교육의 대표적인 연구들은 [14], [15], [17], [19]등이 있다. 국내 연구로는 [5], [6], [7], [8] 등이 '컴퓨터와 수학교육'에 관한 연구들이다.

지금까지 가장 많이 알려진 '컴퓨터와 수학교육'을 위한 컴퓨터 환경의 예는 LOGO([17])이다. 학교수학에 등장하는 다각형과 같은 도형을 기본적이고 직관적이며 절차적인 명령으로 직접 구성하고 변화시켜 조작하고 이를 시각적으로 확인할 수 있는 교육용 프로그래밍 환경이다. LOGO 환경의 교육적 의미는 세계적으로 인정되고 있으며 우리나라 초등학교 수학 교과서에도 '거북 명령 프로그램' 이란 이름으로 소개되어 있다([1], [2]). 이 '거북 명령 프로그램'은 LOGO의 철학을 바탕으로 인터넷 기반의 애플릿 환경으로 구현되어 어디서나 접근이 가능하도록 만들어진 환경이다. 또한 JavaMAL(거북 마이크로월드)이란 이름으로 인터넷(http://www.javamath.com/class)에서 접근 가능하다.

학교수학에서 다루는 좌표 기하와는 달리 LOGO 기하(거북기하)의 특징은 '내재적', '국소적', '절차적'이라는 점이다([9]). 여기서 '내재적'이란 도형의 본질적인 특징으로만 도형을 구성한다는 의미로 도형을 구성하는 데 비본질적 외적 요소를 사용하지 않는다는 의미이고, '국소적'이란 시간에 따른 순간적 행동을 만들어 내고 그 결과로 전체적 모양을 완성한다는 의미로, 조건을 만족하는 점들의 집합으로 전체적 모양이 결정되는 좌표기하와 다르다는 의미이며, 마지막으로 '절차적' 이란 단계별 구성 방법이 제시되어, 단계별 구성 방법에 많은 변화를 줄 수 있다는 뜻이다. 이러한 특징을 LOGO에서 원을 그리는 과정을 통해 확인해 보자. 거북기하에서 원을 그리려면 거북이에게 '조금 가고(FORWARD; FD; 가자), 조금 돌고(ROTATE; RT; 돌자)'를 계속 반복하도록 명령해야 한다. 이에 비해 좌표기하에서는 방정식 $x^2+y^2=r^2$을 만족하는 점들의 집합이 원이다. 거북기하에는 필요 없는 좌표축(비본질적 외적 요소)이 좌표기하에서는 필요하다. 또 거북기하는 전체적인 원 모양이 아니라 시간에 따른 국소적 행동과 절차를 나타내고 거북 행동의 결과가 원이다. 이에 비해 좌표기하에서 원의 방정식은 관계식과 해집합이라는 전체적인 모양에 주목한다. 결과적으로 거북기하는 도형의 구성을 강조하지만, 좌표기하는 주어진 도형의 분석을 더 중시한다.

현재 학교수학에서 LOGO에서 그릴 수 있는 곡선의 예로 소개되는 것은 대부분 다각형, 원과 같은 초등 곡선이거나 또는 이해하기 어렵고 복잡한 곡선들이다. 이에 새로운 명령어(move)를 도입하여 거북 기하의 내재적 특징을 포기하고 절차적, 국소적 접근으로 함수의 그래프와 같은 학교수학의 곡선을 LOGO 환경에서 절차적으로 그리는 방법과 번역에 관해 [6]에서 연구하였다. 이 글은 같은 맥락에서 자주 보는 폐곡선을 거북기하에서 그리는 방법을 친숙한 다각형 패턴 관점에서 소개하려 한다.

2. 이론적 배경과 마이크로월드

절차를 강조한다는 면에서 LOGO에서 곡선은 기존 학교수학에서 간과되는 곡선의 동적 표현이다. 곡선은 조건을 만족하는 1차원 집합이라는 정적인 의미와 함께 시각에 따라 변하는 점이라는 동적인 의미를 함께 가진다([3]). 정적인 의미에서 곡선은 일정한 관계를 만족하는 점들의 집합이며, 동적인 의미에서는 시간에 따른 행동의 자취이다. 정적인 의미에서 같은 곡선이라 하더라도 동적인 의미에서는 다른 행동의 자취일 수 있다. 시간에 따른 행동은 곡선을 구성하는 방법을 제시하는 반면 점들이 만족하는 관계는 이미 주어진 곡선을 분석하는 방법이다. 이는 거북기하와 좌표기하의 구분과 유사하다.

곡선의 동적 표현이란 매개 변수를 이용한 곡선의 표현과 관련된다. 예를 들어 원을 매개 변수를 도입하여 보다 동적으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \quad (0 \le t < 2\pi)$$

이 식에서 r은 반지름의 길이이고, t는 중심각의 크기 또는 시간이다. 시간을 매개 변수로 사용한다는 면에서 곡선의 매개 변수 표현을 시간에 따른 곡선의 동적 표현이라고 할 수 있다([10]). 이 때, 만약 시간의 변화를 $t = 0, 1, 2, \cdots$ 와 같이 이산적으로 고려한다면 곡선의 동적 표현은 시간에 따른 패턴이다.

이와 같이 곡선을 패턴으로 이해하는 것은 현대수학에서 패턴을 강조하는 입장과 맞아 떨어진다. Steen [20]은 컴퓨터와 응용 수학이 발전하는 요즈음 더 이상 수학적 탐구 대상은 수와 도형에만 한정되는 것이 아니라 패턴에 대한 연구로 그 영역을 확장하는 과학이라는 맥락에서 수학을 '패턴의 과학(science of patterns)'로 불렀다. 여기서 수학은 패턴을 관찰하고 실험하여 그 규칙성을 탐구하는 학문이 된다. 그리고 기존의 수학적 탐구 대상을 상을이 패턴의 관점에서 이해해야 한다는 뜻이기도 하다. 마찬가지로 Cuoco & Goldenberg는 [12] 마음의 습관(habit of mind)을 갖도록 하는 것이 수학교육의 목표이며 가장 중요한 마음의 습관은 '패턴 탐구자'라고 마음의 김화경은 [5] 이런 관점에서 컴퓨터 mind) 기하 패턴을 만들고 탐구하는 학습-지도 Xin 목표이요한 마음의 문자 되쓰기 규칙을 갖는 기하 패턴을 만들고, 각 항 사이의 규칙을 재귀적으로 탐구하는 환경의 설계에 관한 것이다.

교육에서 컴퓨터의 역할에 관한 연구가 구체성을 갖기 위해서는 실제 구현할 수 있는 컴퓨터 환경이 필요하다. 이와 같이 '컴퓨터와 수학교육'을 위한 컴퓨터 실험 환경을 마이크로월드(microworld: [17])라고 한다. 수학적 마이크로월드란 수학적 구조를 기본 명령으로 하고, 그 기본 명령을 이용하여 인공물들을 만들고 만든 인공물을 조작할 수 있는 환경이다. 김화경은 [5] 기존의 마이크로월드에

관한 연구를 정리하면서 마이크로월드가 가져야 하는 특징을 구성과 조작이 강조되는 언어 체계라고 하였다. 대표적 마이크로월드는 Papert가 스위스에서 Piaget와의 공동 연구를 끝내고 미국에 돌아와 만든 LOGO이다. 이는 당시에 컴퓨터의 교육적 역할에 대해 연구하던 많은 연구자들에 큰 감동을 주었고 현재의 많은 수학교육 연구자들은 그 당시의 감동을 기억하고 실제로 LOGO에 큰 영향을 받았다. 이후 LOGO의 불편함이 비판의 대상이 되기도 하였으나 그 본질적, 교육적 가치에 대해서는 대체로 인정되고 있다. [13], [18]과 같이 LOGO 환경의 수정과 계속적인 발전을 거듭하는 외국과는 달리, 우리나라에서는 연구가 빈약하다. 그에 비해, 컴퓨터를 이용하여 수학 지식을 전달하려는 시도는 크게 늘고 있다.

LOGO에 몇 가지 기능을 추가하고 사용자 편의적으로 개선한 일련의 마이크로월드를 거북 마이크로월드라고 한다. (그림 1)는 JavaMAL 거북 마이크로월드에서 원이라는 곡선을 패턴으로 이해하여 만든 그림이다. 주목할 점은 여기에는 두 가지 중요한 패턴이 동시에 존재한다는 것이다. 그 중 하나는 시간의 변화에 따른 거북이의 절차적 행동을 나타내는 패턴으로 (그림 1)에서는 세로 방향의 패턴이다. 다른 하나는 절차의 횟수에 관계되는 패턴으로 (그림 1)에서는 가로 방향의 패턴이다. 정다각형 패턴으로 원을 인식하는 것은 가로 방향의 패턴으로 같은 절차 횟수와 관련된 패턴이다. 이후를 위해 이 행동을 만드는 거북 명령을 적으면 다음과 같다.

$$\begin{array}{l} \text{for } x=1 \text{ to } k \\ \quad \text{돌자 } \dfrac{360}{k}\text{; 가자 } 1 \\ \text{next} \end{array}$$

이 명령은 k각형을 만드는 명령으로 만약 명령을 각각 $\frac{k}{4}, \frac{k}{2}, \frac{3k}{4}$까지만 실행한다면 k각형의 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ 만큼을 그리게 되어 가로 방향의 패턴을 얻을 수 있다. 명령어 'move'를 이용한 명령으로 번역하면 다음과 같다.[1)]

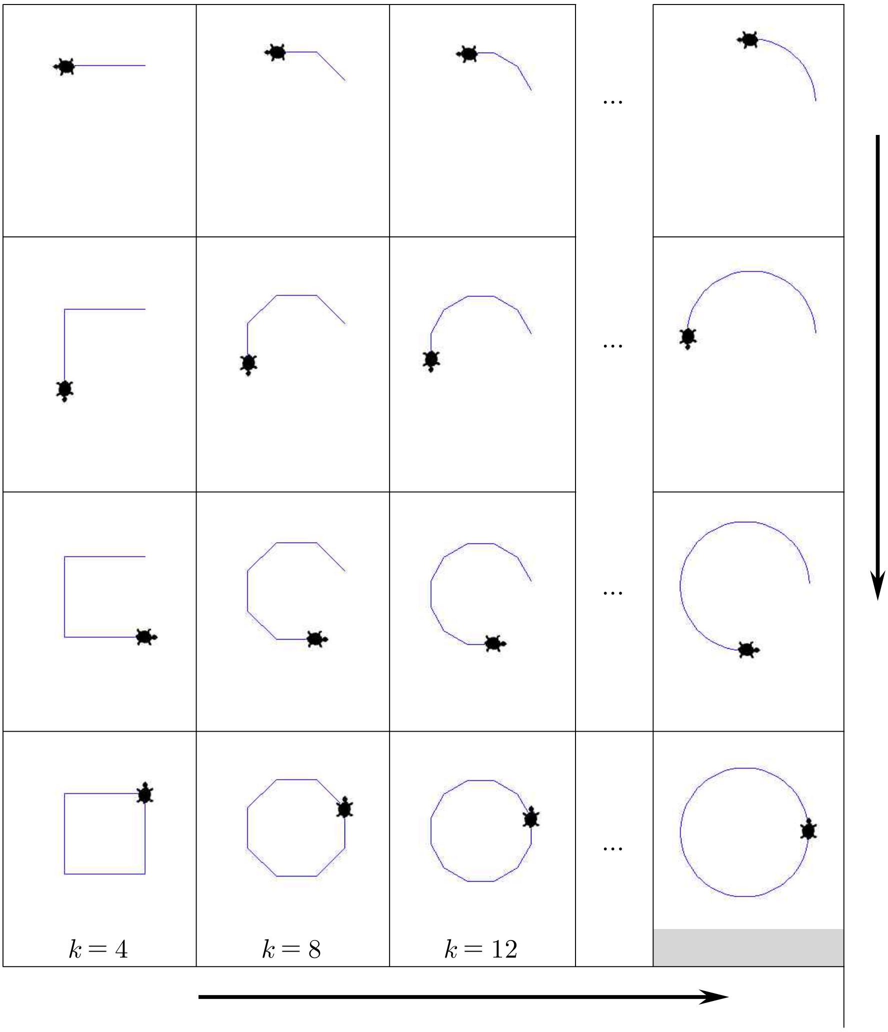
---

1) 실제 입력에서는 $\cos x, \sin x, \frac{a}{b}$ 를 Cos(x), Sin(x), a/b로 입력한다. 가자값은 크기를 결정하므로 적절히 조절할 수 있다.

for $x = 1$ to k

  move $-\sin\frac{360}{k}\cdot x,\ \cos\frac{360}{k}\cdot x$

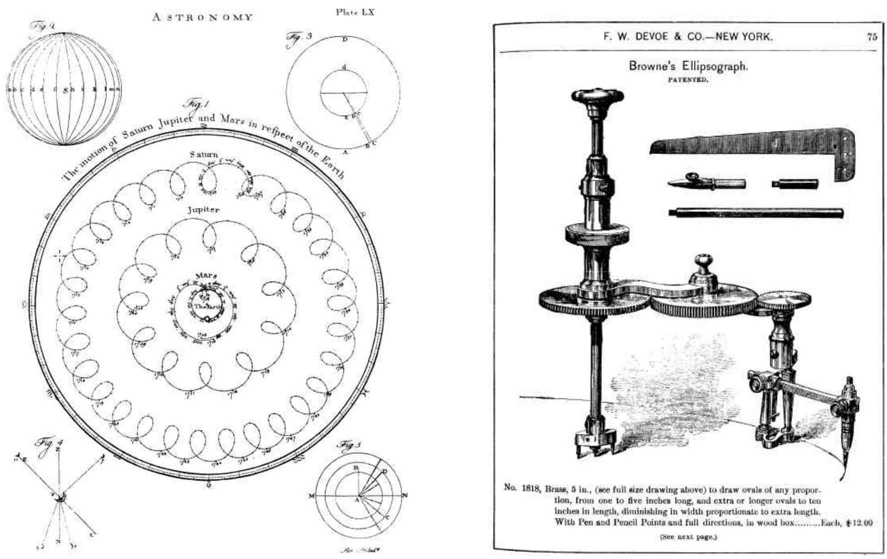
next



(그림 1). 원을 패턴으로 인식하기

3. 다른 곡선 패턴으로 접근하기 – epicycloid와 hypocycloid

1970년대에 스파이로 그래프(spirograph)라는 재미있는 교구가 많이 사용되었다. 스파이로 그래프는 안쪽과 바깥쪽에 톱니를 가지고 있는 링으로 이루어져 있어서 두 톱니를 맞물리고 움직이며 그 원의 내부의 한 점에 연필을 꼽아서, 톱니가 움직일 때의 그 점의 자취를 연필 흔적으로 나타내는 도구다. 바깥쪽에서 맞물려 움직일 때 epicycloid라고 하고 안쪽에서 맞물려 움직일 때 hypocycloid라고 한다. 만약 고정된 원의 반지름이 아주 크다면 이는 평면 위를 굴러가는 원 위의 한 점의 자취, 즉 cycloid가 된다. 또한 두 원을 이용해서 만들기는 하지만 도는 원의 원주로 제한하지 않았을 때 그 곡선을 epitrochoid와 hypotrochoid라고 한다.
역사적으로 이런 종류의 곡선에 대한 연구는 그리스 시대부터 시작되었다. 천동설을 믿던 그리스인 프톨레미는 별을 관찰하다가 역행하는 별을 발견하였다. 천동설이라는 믿음을 유지하면서 그 별의 움직임을 과학적으로 설명하기 위해 프톨레미는 행성이 지구를 중심으로 공전하면서 자전한다는 생각을 했다. 즉, 큰 원 운동(deferent)을 하면서 다시 작은 원(epicycle) 위를 움직인다고 생각하였다([21]). 즉 프톨레미는 행성은 epitrochoid 곡선을 따라 운동한다고 설명하였다. (그림 2)는 1789년의 행성의 epicycle에 관한 판화 그림이다([16]). 이후 좀 더 정확하게 행성의 운동을 설명하기 위해 원들을 추가하여 여러 개의 epicycle들을 만들기도 하였다. 이후 코페르니쿠스의 지동설이 등장하기까지 별의 움직임을 설명하기 위해 deferent/epicycle 모델은 계속 사용되었다. 천동설이라는 잘못된 믿음을 유지하기 위해 계속적 잘못된 설명을 덧붙인 것이다. 이런 역사적 배경에서, 이 deferent/epicycle란 용어는 잘못된 과학을 비유하는 말로 사용되기도 한다.



(그림 2). epicycle과 Ellipsograph ([16]에서 재인용)

특별히 epicycloid를 그리는 도구에 대한 연구는 중세에도 계속되었다. 컴퓨터나 그래픽 계산기가 등장하기 전까지 곡선을 그리기 위해 사용된 중세의 기계들을 계속 만들어졌다. (그림 2)는 1900년경의 수학 측량 기구 그림이다([16]). 원하는 곡선이 그려지는 것은 기계를 고안한 사람들에게는 큰 기쁨이었다.

> 이런 기어들이 천천히 움직이면서 원하던 곡선을 그려나가는 것을 본다는 것은 그들에게 큰 기쁨이기도 했다([16], p.106).

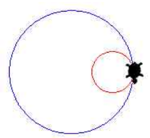
우리는 그러한 기쁨을 거북 마이크로월드에서 학생들이 다시 느낄 수 있고 그것이 바람직하다고 생각한다. 천천히 곡선을 그리는 기계들과 마찬가지로 거북이가 원하는 곡선을 그릴 때의 기쁨이 있을 것이라 생각한다. 이와 관련하여 Armon [11]은 내재적 식을 이용하여 곡선을 거북 명령으로 그리는 방법에 관해 연구하였다. 우리는 여기에 'move'라는 새로운 명령을 중간 매개로 이용하고, 다각형 패턴의 관점을 도입하려 한다.

먼저 epicycloid와 hypocycloid를 그리기 위해 먼저 원을 그리는 명령을 좀 더 자세히 분석하자. 원을 거북 마이크로월드에서 그리는 것은 원을 360각형으로 간주하여 360개의 아래의 벡터를 연결하는 것과 같다.

$$(-\sin 1^\circ,\ \cos 1^\circ)+(-\sin 2^\circ,\ \cos 2^\circ)+\ \cdots\ +(-\sin 360^\circ,\ \cos 360^\circ)$$

만약 이 때 각 크기의 변화를 달리한다면 얻어지는 원의 크기도 달라진다. 예를 들어, 각의 변화를 $m\,(>0)$배하면 원은 $1/m$ 배가 되고 거북 운동은 m 회전하게 된다. 만약 $m<0$이면 회전의 방향이 반대가 된다. $m=3$일 때 (그림 3)와 같이 1/3만큼 작은 원을 3바퀴 돌게 되는 것이다. (그림 3)는 360개의 벡터를 줄여서 나타낸 명령과 그 결과의 시각적 표현이다.

```
for x=1 to 360
 move -Sin(mx), Cos(mx)
next
```



(그림 3). 크기가 다른 원

이제 epicycloid가 얻어지는 두 원이 맞물려 돌아가는 상황을 '움직이는 원 중심의 회전운동'과 '움직이는 원 자체의 회전운동'으로 분리하여 본다면 epicycloid는 이 두 원 운동 벡터의 합성으로 이해할 수 있다[2]. 즉, 각각의 원 운동을 360개의

2) 행성과 위성의 운동으로 생각해본다면 전자를 공전, 후자를 자전 운동으로 생각할 수

벡터로 나타내면 epicycloid는 서로 합성한 벡터 360개를 연결해서 얻어지는 것이다. 이 때, 모양은 두 원의 반지름의 비에 따라 달라진다. 또한 epicycloid는 두 운동이 같은 방향으로 일어나지만, hypocycloid의 경우는 움직이는 원의 중심 운동과 원 운동의 방향이 반대이다.

이제 벡터의 합성을 이용하여 구하는 epicycloid나 hypocycloid를 거북 명령으로 나타내 보자. 먼저 운동 회전의 비가 $m:n$ 인 두 원 운동을 생각하자. 이 때, 편의상 m, n 은 정수로 가정하자. 만약 비율이 유리수가 아니라면 폐곡선을 얻을 수 없다. 이제 움직이는 두 점의 원 운동에서 하나씩의 벡터를 뽑아 합성하자. 이때, 벡터의 합성과 함께 삼각함수의 공식을 이용한다.

$$(-\sin mx,\ \cos mx)+(-\sin nx,\ \cos nx)$$

$$=(-\sin mx-\sin nx,\ \cos mx+\cos nx)$$

$$=\left(-2\cdot\sin\frac{m+n}{2}x\cdot\cos\frac{m-n}{2}x,\ 2\cdot\cos\frac{m+n}{2}x\cdot\cos\frac{m-n}{2}x\right)$$

이제 이를 다시 'move'와 거북 명령 사이의 관계를 이용해 나타내면 다음을 얻을 수 있다.

for x=1 to 360

돌자 $\frac{m+n}{2}$; 가자 $2\cos\frac{m-n}{2}x$;

next

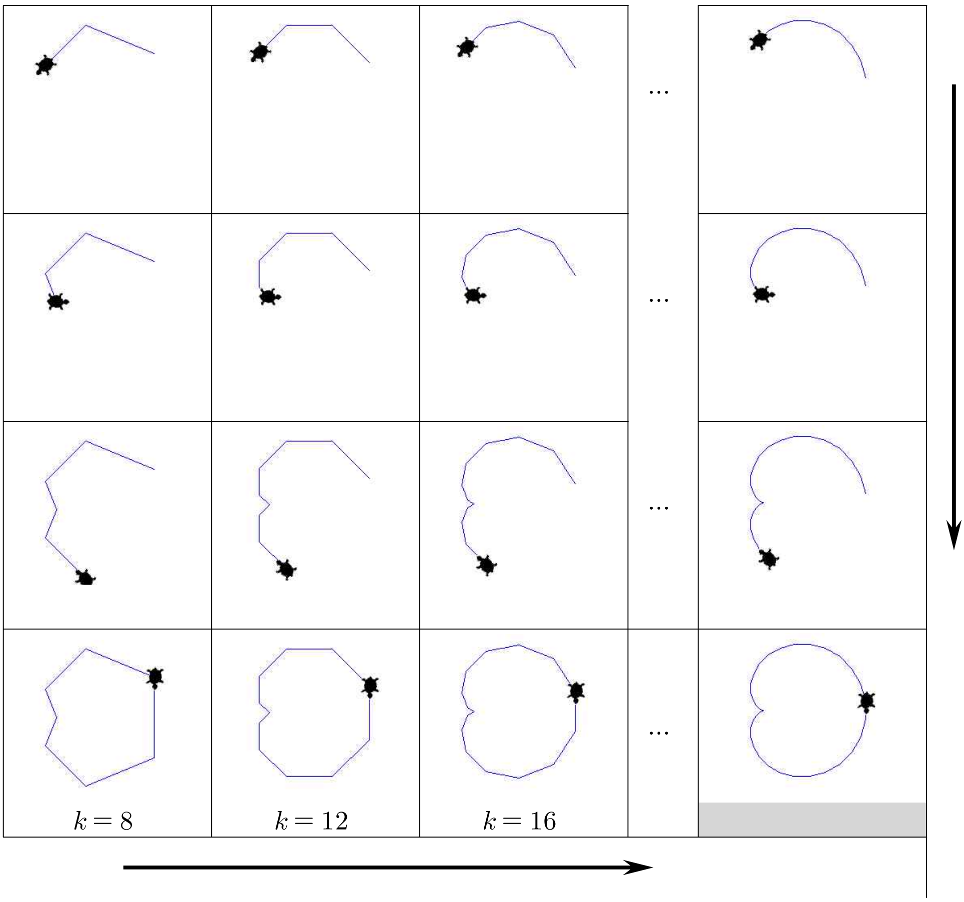
이제 곡선을 다시 다각형 패턴으로 만들어 보자. 먼저 도는 각의 크기를 수정하자. 만약 각각의 원 운동을 정다각형 운동이었다고 생각하면 쉽게 그 명령을 찾을 수 있다. 정360각형을 그릴 때는 한 번에 도는 각이 1도이고, 만약 정k각형운동을 생각한다면 한 번에 도는 각의 크기는 $a=360/k$ 이다. 이는 정다각형의 외각의 합이 360°라는 사실에서 쉽게 얻을 수 있다. 그리고 'move' 명령에서 각의 변화가 ma, na 만큼씩 이루어진다. 이에 앞선 벡터의 합성 과정을 그대로 따라가게 된다면 (표 1)과 같이 다각형 패턴을 만드는 명령을 얻을 수 있다.

for $x=1$ to k
돌자 $\frac{m+n}{2}a$; 가자 $2\cos\frac{m-n}{2}ax$;
next

(표 1). 다각형 패턴 명령

있다.

위의 명령을 좀 더 자세히 살펴보면 x에 따라 회전하는 각도($\Delta\theta$)는 $\dfrac{m+n}{2}a$로 일정하고 움직이는 거리(Δs)는 $2\cos\dfrac{m-n}{2}ax$로 변화한다는 것을 알 수 있다. 즉, 조금 돌고, 조금 가는 행동을 반복해서 원을 그릴 수 있는 것과 마찬가지로 조금 일정하게 돌고, 얼마 가는 행동을 계속하여 원하는 곡선인 epicycloid와 hypocycloid, cycloid를 얻을 수 있게 되는 것이다. 여기서 돌자와 가자의 거북 명령은 각각 $\Delta\theta$, Δs이고, 'move'는 Δx, Δy의 표현이다.



(그림 4). cardioid 패턴으로 인식하기

이제 $m=1, n=2$인 경우 k값을 여러 가지로 바꿔가면서 거북 행동을 나타내면 (그림 4)과 같은 패턴을 얻을 수 있다. $m=1, n=2$이라는 것은 크기가 같은 두

원이 맞물려서 돌고 있는 상황으로 이 때 만들어지는 곡선은 cardioid이다.

원하는 곡선 패턴을 얻기 위해서는 벡터의 합성이나 삼각함수의 성질과 같은 '수학'을 사용해야 한다. 이는 마치 LOGO에서 별을 그리기 위해 초등학생이 자신의 행동을 반성하고 수학을 사용하는 것과 마찬가지이다. 원하는 것을 만들기 위해 수학을 사용하고, 이를 통해 수학교육을 이루려는 것이 '컴퓨터와 수학교육'의 목표이다.

또한 이렇게 원하는 곡선 패턴을 일단 얻으면 그 구성을 반성하여 다시 몇 가지 수학적 추측이나 발견을 할 수도 있다. 예를 들어, hypocycloid에서 고정된 원의 반지름의 길이와 움직이는 원의 반지름의 길이를 각각 R과 r이라 할 때, 고정된 원의 중심에서 굴러가는 원의 중심까지의 거리는 $R-r$이다. 즉, 두 원 운동의 비 $m:n$에서 $m=R-r, n=r$인 경우이다. 그러므로 만약 고정된 원의 반지름의 길이와 움직이는 원의 반지름의 길이를 각각 R과 $R-r$이라 하면, 원의 중심까지의 거리는 r이다. 즉, $m=r, n=R-r$인 경우이다. 이는 m, n의 값이 바뀐 경우로 (표 1)의 명령에서 그 결과는 같다는 것을 알 수 있다. 결국 같은 자취를 얻을 수 있다. 이것이 다니엘 베르누이가 발견한 hypocycloid의 이중 생성 정리이다.

다음으로 (표 1)에서 $m=1$로 고정하고 n의 값을 매우 작은 값으로 택한다면 이는 두 원 중 한 원이 아주 큰 원으로 가정하는 것과 같다. $n\to+0$이면 epicycloid들의 극한이고, $n\to-0$라면 hypocycloid들의 극한이다. 결국 그 곡선은 cycloid가 된다. 즉 cycloid는 '돌자 1; 가자 $\cos x$'의 계속적 적용으로 얻어질 수 있다. 물론 거북기하의 내재적 성질이 성립하므로 방향은 다르지만 '돌자 1; 가자 $\sin x$'으로도 cycloid를 얻을 수 있다. 그리고 epicycloid, hypocycloid, cycloid가 결코 다르지 않고 서로 같은 것을 알게 된다. 이는 연속성의 원리의 한 예가 될 수 있다.

그리고 (표 1)에서 가자에 해당하는 값의 절댓값을 모두 더한다면 그 값은 거북이가 움직인 총길이이고, 그 값은 만들어진 곡선 둘레의 길이와 근사적으로 같다. 만약 $a=1$, $m\neq n$인 경우만을 생각하면 그 길이는

$$\sum_{x=1}^{360}\left|2\cos\frac{(m-n)x}{2}\right|$$

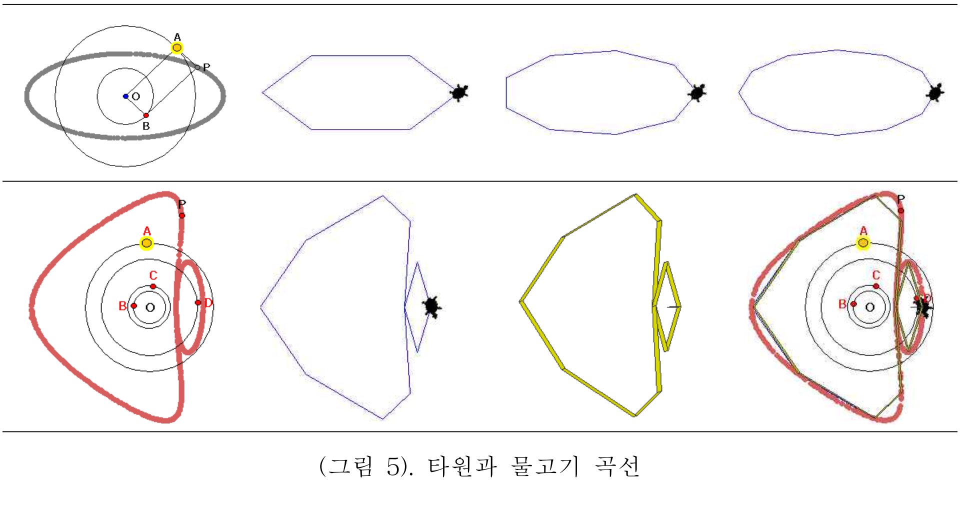
이다. 만약 이를 극한으로 이해하고 주기함수의 적분과 연결하여 생각하면 그 값은 항상 일정하다. cycloid인 경우 계산하면 그 값은 $8\cdot\dfrac{180}{\pi}$와 근사적으로 같다. 즉, $m=1$로 고정하면 그 원 반지름의 길이 $R=\dfrac{360}{2\pi}$이므로 곡선의 둘레의

길이는 $8R$로 일정하다. cycloid 둘레의 길이는 적분을 사용하여 얻을 수 있다. 이 방법은 직관적으로 cycloid 둘레의 길이를 이해하는 데 도움을 주고 다른 epicycloid와 hypocycloid의 길이가 같다는 직관적 이해를 제공해 줄 수 있다.

4. 마치며

epicycloid와 hypocycloid의 예는 맞물려 돌아가는 톱니바퀴나 구르는 원이라는 물리적 상황을 수학적으로 번역하고 DGS 중간 과정(circle model)을 거쳐 거북 마이크로월드에서 천천히 그려지는 곡선과 패턴으로 새로이 태어나게 된다. 그러나 물리적 도구에 비해 DGS에서는 반지름의 길이 등을 자유롭게 조절하고, 원을 여러 개 추가하여 새로운 곡선을 실험해 볼 수 있다.

예를 들어, circle model에서 크기가 다른 두 원 위를 운동하는 두 점 A, B가 서로 반대 방향으로 같은 크기의 각속력으로 운동할 때, 이 두 벡터의 합성으로 얻어지는 점 P의 자취는 타원이 된다. 또한 모든 타원은 이와 같이 반대 방향으로 운동하는 두 원 운동의 합성으로 만들 수 있다.[3] (그림 5)는 이러한 타원을 다각형 패턴으로 거북 마이크로월드에서 구현한 것이다. 원과 같은 방식의 다각형 패턴으로 타원을 만들 수 있는 경험은 타원을 보다 다르게 이해하는 기회를 제공한다. 다른 예로 원 운동 4개의 합성으로 (그림 5)와 같은 물고기 곡선을 그릴 수 있고, 놀랍게도 이를 거북 행동의 패턴으로 나타낼 수 있다.



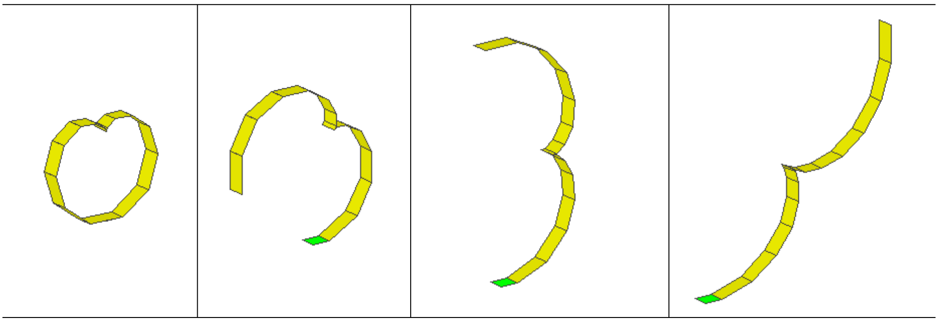
(그림 5). 타원과 물고기 곡선

3) 장축, 단축의 길이가 각각 $2a$, $2b$라면 $R+r=a$, $R-r=b$를 만족하는 R, r을 두 원의 반지름으로 하면 원하는 타원을 얻을 수 있다.

아름다운 곡선을 친숙한 정다각형과 수학을 이용하여 내가 직접 만들 수 있다는 것은 즐거운 경험이다. 물리적 구성을 통한 정신적 구성이 LOGO의 기본 철학이다. 곡선을 만들면서 곡선의 성질을 직관적으로 학습하게 된다.

이제 LOGO 환경의 개선 방향 몇 가지를 생각해자. 먼저, 거북 행동이 '가자'와 '돌자' 명령의 절차적 조합이라는 점에 주목하여, 이를 긴 띠 접기 은유로 바라볼 수 있다. 우선 주어진 긴 띠를 적당한 길이의 칸으로 나누고 알맞은 크기의 각으로 칸과 칸을 접어서 곡선 모양의 띠를 만든다고 생각해 보자. 이 때 '가자' 값을 띠 한 칸의 길이로, '돌자' 값을 연결된 두 칸이 접히는 이면각의 크기라고 하면, 같은 거북 명령으로 평면에 그리기도 하고 띠 접기로 나타내기도 하는 것이다. 이렇게 띠 접기 은유를 사용하면 마우스를 이용해서 곡선을 회전시키거나 띠를 펴보는 조작이 가능해 진다. 이러한 활동을 통해 자유로운 구성에 비해 조작의 어려움이 있는 거북 마이크로월드를 보완하는 활동이 가능해진다.

(그림 6)은 cardioid 곡선 패턴을 거북 명령어로 띠 접기로 만든 후 마우스 조작을 통해 띠를 펴는 과정을 순차적으로 나타낸다. 실생활에서 띠를 이용해서 cardioid를 접는 것은 각도나 길이의 정확성을 유지하기 어려워 거의 불가능하지만 이를 거북 마이크로월드라는 컴퓨터 환경을 이용하면 보다 정확하게 만들고 움직여 볼 수 있다.

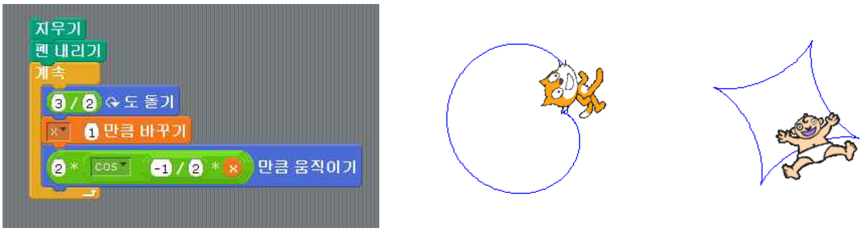


(그림 6). 띠 접기(cardioid)

다음으로 멀티미디어를 LOGO 관점에서 도입하려는 새로운 연구인 Scracth 환경[4] [18]을 살펴보자. Scratch 환경은 사용자 편의를 강조하면서도 LOGO의 기본 철학을 유지한 많이 사용되는 환경으로 미국을 중심으로 많이 사용되는 교육용 프로그래밍 환경이다. 여기서는 프로그래밍을 마우스 끌기와 놓기를 이용하여

4) http://scratch.mit.edu 에서 얻을 수 있는 무료 환경으로 LOGO 환경에 멀티미디어 기능을 추가하고 인터넷 공유 기능을 강화한 환경으로 Resnick의 연구팀에 의해 운영되고 있다.

가능하도록 설계되어 있다. (그림 7)는 곡선을 만드는 방법을 Scratch 프로그램에 적용하여 cardioid, astroid 곡선 운동을 나타낸 그림이다.



(그림 7). Scracth에서 곡선 그리기

Armon [11]은 LOGO에서 곡선을 그리는 활동의 교육적 의미를 번역의 관점에서 살펴보면서, 그 첫 번째로 곡선의 식에서 곡선을 그리는 절차 사이의 번역, 두 번째로 외재적, 전체적 표현의 내재적, 국소적 체계로의 번역, 마지막 세 번째로 미분기하라는 연속수학을 이산수학으로의 번역이라고 말하고 있다.

거북 명령으로 표현한다는 것은 두 번째의 번역에 자연스럽게 해당하는 것으로 우리는 첫 번째 번역과 세 번째 번역을 패턴이라는 관점에서 이해하고 곡선을 절차적 패턴과 다각형 패턴으로 접근하는 방법에 대해 살펴보았다. 이를 통해 곡선을 다각형 패턴으로 이해하고, 곡선을 시간에 따른 운동으로 이해할 수 있기를 기대한다. 또한 곡선을 만지고 조작하는 기회 제공을 위해 환경을 개선하는 방법에 대해 살펴보았다.

그러나 이 방법은 삼각함수와 그에 따른 몇 가지 수학공식을 사용하고 있어 중학교나 초등학교 수준에서 학교수학에 직접적으로 도입하는 데는 한계가 있다. 하지만 역사적으로 삼각함수 개념은 매우 일찍 생겨났다는 점([16])을 고려하고 교육과정의 순서를 조금만 다르게 바꾸어 생각한다면 영재교육의 소재로는 사용할 수 있을 것이다. 또한 간단한 명령체계에서 '가자' 값을 바꿔가면서 복잡해 보이는 곡선을 패턴으로 그리는 경험은 창의성 교육과 관련되어 좋은 소재가 될 수 있을 것이다.

또한 이번 연구에서는 번역의 방법만을 소개하고 있을 뿐 이러한 방법의 교육적 효과에 대한 논의가 빈약하다. 이에 대한 실제적인 교수·학습 자료의 개발이나 효과성에 대한 논의가 진행되어야 할 것이다.

참고문헌

[1] 교육인적자원부 (2002a). **수학 3-가 익힘책.** 대한교과서주식회사.

[2] 교육인적자원부 (2002b). **수학 4-가 익힘책.** 대한교과서주식회사.

[3] 김홍종 (2004). **미적분학 1.** 서울: 서울대학교 출판부.

[4] 김화경 (2008). 거북 마이크로월드에서 곡선의 행동 표현. **교육과정평가연구 11**(1), 187-204, 서울: 한국교육과정평가원.

[5] 김화경 (2006). **'컴퓨터와 수학교육' 학습-지도 환경에 관한 연구.** 서울대학교 대학원 교육학 박사학위 논문.

[6] 김화경 (2007). 포물선의 동적 표현과 마이크로월드. **수학교육 47**(1), 49-59, 서울: 한국수학교육학회.

[7] 김화경·송민호 (2007). LOGO와 DGS 매개 모델과 오류 사례. **수학교육학연구 17**(2) 111-125, 서울: 대한수학교육학회.

[8] 조한혁 (2003). 컴퓨터와 수학교육. **수학교육 42**(2), 177-192, 서울: 한국수학교육학회.

[9] Abelson, H. & diSessa, A. (1980). *Turtle geometry.* Cambridge, MA: MIT Press.

[10] Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2005). Calculus(8th edition). Wiley.

[11] Armon, U. (1999). An algorithm that translates intrinsic equations of curves into intrinsic procedures of these. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(6), 833-854.

[12] Cuoco, A. & Goldenberg, E. P. (1996). Habits of mind: an organizing principle for mathematics curricula. Journal of Mathematical Behavior 15, 375-402.

[13] diSessa, A. (2000). Changing minds. Cambridge, MA: MIT Press.

[14] Kafai, Y. (1995). *Minds in play: computer game design as a context for children's learning.* NY: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

[15] Kafai, Y. & Resnick, M. (1996). *Constructionism in practice.* NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

[16] Maor, E. (1998). *Trigonometric Delights.* Princeton University Press.

[17] Papert, S. (1980). *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas.* Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing.

[18] Resnick, M. (2007). All I really need to know (about creative thinking) I learned (by studying how children learn) in kindergarten. *Proceedings of the ACM SIGCHI conference on Creativity & Cognition,* Washington, DC.

[19] Resnick, M. & Silverman, B. (2005). Some reflections on designing construction kits for kids. *Proceeding of interaction design and children conference,* Boulder, CO.

[20] Steen, L. A. (1988). The science of patterns. Science 240, 611-616.

[21] Stillwell, J. (2001). Mathematics and its history. NY: Springer.

[22] Taylor, R. (1980). *The computer in the school: tutor, tool, tutee.* NY: Teachers College Press.

Kim, Hwa Kyung
Department of Mathematics Education
Sangmyung University, Korea
E-mail address: indices@smu.ac.kr

Song, Min Ho
Department of Mathematics Education
Seoul National University, Korea
E-mail address: mino@snu.ac.kr