

논문 2010-47SP-6-19

# 신호 부공간에 기초한 간단한 적응 어레이 및 성능분석

## ( Signal-Subspace-Based Simple Adaptive Array and Performance Analysis )

최 양 호\*

( Yang-Ho Choi )

### 요 약

원하는 신호의 도래방향에 관한 정보를 이용하여 적응 어레이는 이 방향으로 빔 이득을 유지하면서 간섭신호를 제거한다. 신호 부공간에서 가중벡터를 조정하면 전체 공간에서 조정하는 방식에 비해 빠른 수렴속도를 가지며, 도래각 정보에서의 에러에 강인한 특성을 가진다. 그러나 공분산 행렬의 고유분해가 필요하고 이에 따른 계산이 복잡하다. 본 논문에서는 PASTd(projection approximation subspace tracking with deflation) 방식에 기초하여 계산이 간단한 신호 부공간에 기초한 적응어레이를 제시한다. 제시된 방식은 고유벡터가 직교하도록 원래의 PASTd를 변형해서 사용하고 있고, 직접 고유분해하는 방식과 동일한 성능을 가지면서 계산량을 크게 감소시킬 수 있다. 또한 신호 부공간 어레이의 SINR(signal-to-interference plus noise ratio)성능을 이론적으로 분석하여, 이의 동작특성을 고찰하였다.

### Abstract

Adaptive arrays reject interferences while preserving the desired signal, exploiting *a priori* information on its arrival angle. Subspace-based adaptive arrays, which adjust their weight vectors in the signal subspace, have the advantages of fast convergence and robustness to steering vector errors, as compared with the ones in the full dimensional space. However, the complexity of these subspace-based methods is high because the eigendecomposition of the covariance matrix is required. In this paper, we present a simple subspace-based method based on the PASTd (projection approximation subspace tracking with deflation). The original PASTd algorithm is modified such that eigenvectors are orthogonal to each other. The proposed method allows us to significantly reduce the computational complexity, substantially having the same performance as the beamformer with the direct eigendecomposition. In addition to the simple beamforming method, we present theoretical analyses on the SINR (signal-to-interference plus noise ratio) of subspace beamformers to see their behaviors.

**Keywords :** 적응 빔 형성, 신호 부공간, 조향벡터에러

## I. 서 론

적응어레이(adaptive array)는 원하는 신호에 관한 정보를 이용하여 어레이에 도래하는 간섭신호를 제거한다. 원하는 신호의 도래각이 알려졌을 때, LCMV (linearly constrained minimum variance) 어레이<sup>[1]</sup>는 이 방향으로 어레이 이득을 일정하게 유지하면서 출력

전력이 최소가 되도록 가중벡터(weight vector)를 조정한다. 이와 같이 조정하면, 출력전력이 최소일 뿐 아니라 SINR(signal-to-interference plus noise ratio)은 최대로 되고, 가중벡터는 신호 부공간(signal subspace)에 놓이게 된다.

신호 부공간에서 가중벡터를 조정하면, DMI(direct matrix inversion)와 같은 전체  $M$  차원 공간 조정방식에 비해 정상상태(steady state)로 빠르게 수렴하고, 조향벡터(steering vector) 에러에 강인한 특성을 얻을 수 있다<sup>[2~5]</sup>. 여기서  $M$ 은 어레이 센서의 수이다. 이러한 부공간 방식에서 가중벡터를 구하기 위해서는 수신신호

\* 정회원, 강원대학교 전자통신전공  
(Dept. of Electronic and Communication  
Engineering, Kangwon National University)  
접수일자: 2010년2월4일, 수정완료일: 2010년7월8일

에 대한 공분산행렬(covariance matrix)의 고유치, 고유벡터가 필요하고, 이를 계산하기 위해 공분산행렬을 고유분해 해야 한다. 그러나 공분산행렬을 직접 고유분해 하는 것은 많은 계산량을 요구하여 그 계산이 복잡하다.

본 논문에서는 직접 고유분해 함이 없이, PASTd (projection approximation subspace tracking with deflation)<sup>[6]</sup>에 기초하여 신호 부공간에서 간단히 가중벡터를 구하는 방법을 제시한다. 일반적으로 PASTd에서 구한 고유벡터는 서로 직교하지 않으나 제시된 방법에서는 고유벡터가 직교하도록 PASTd를 변형하였다.  $d$  개의 신호가 도래할 때, 가중벡터를 구하는 데 필요한 계산량이  $O(Md^2)$ 으로 직접 고유분해에 소요되는  $O(M^3)$ 에 비해 계산량을 크게 경감시킨다, 신호 부공간 어레이의 동작특성을 알아 보기위해 이에 대한 SINR 성능을 이론적으로 분석하였다. 조향벡터에러를 고려하여 분석하였으며, 가중벡터가 신호 부공간에 놓여 있으면서 출력전력을 최소화한다는 사실로부터 도래 신호의 어레이 응답벡터(array response vectors)의 합수로 가중벡터를 구하고, 에러가 작은 경우 등에 대해 근사시켜 해석한다.

## II. LCMV 적응 어레이

$M$ 개의 센서로 구성된 어레이에  $d$ 개의 신호가 도래한다. 어레이에 수신된 신호는 아래처럼 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{n}(t)$ 는 잡음벡터이고

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d] \quad (2)$$

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_d(t)]^T \quad (3)$$

$\mathbf{a}_k, s_k(t) (k=1, \dots, d)$ 는 각각  $k$ 번째 신호에 대한 어레이 응답벡터, 복소 포락선(complex envelope)이다. 첫 번째 신호  $s_1(t)$ 는 원하는 신호이고, 나머지는 간섭신호이다. 원하는 신호는 간섭신호와 상관되어 있지 않다고 가정한다. 잡음은 백색 가우시안 랜덤프로세스(white Gaussian random process)로 그 평균은 0, 분산은  $\sigma^2$  이며, 센서 간에 상관되어 있지 않아 잡음에 대한 상관행렬

은  $E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)] = \sigma^2\mathbf{I}$  와 같이 주어진다. 여기서  $E$ 는 기댓값,  $H$ 는 Hermitian(켈레 복소수와 전치 연산),  $\mathbf{I}$  는 단위행렬을 나타낸다. 수신신호에 대한 공분산행렬은 다음처럼 주어진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] \\ &= \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$  이다.

적용어레이에서는 각 센서에 수신된 신호를 가중하여 그들의 합으로 어레이 출력을 얻는다. LCMV 빔 형성기에서는 원하는 신호의 도래방향으로 빔 이득을 1로 일정하게 하면서 어레이 출력 전력이 최소가 되도록 가중벡터  $\mathbf{w}$ 를 구한다. 즉

$$\mathbf{w}_{opt} = \underset{\mathbf{w}}{\text{mim}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}, \quad \mathbf{a}_1^H \mathbf{w} = 1 \quad (5)$$

식 (5)의 해, 최적 가중벡터  $\mathbf{w}_{opt}$  는

$$\mathbf{w}_{opt} = c\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{a}_1 \quad (6)$$

와 같이 구해지고, 스칼라인자  $c$ 는 주어진 단위이득제한 조건에 의해  $c = 1/\mathbf{a}_1^H \mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{a}_1$  과 같다. 최적기준을 달리 하여 SINR을 최대가 되도록 가중벡터를 구할 수 있다. 식 (5)의 가중벡터는 SINR을 최대로 하는 가중벡터와 동일하다.

## III. 신호 부공간에 기초한 적응 어레이

공분산 행렬을 다음처럼 고유분해 할 수 있다.

$$\mathbf{R}_x = \sum_{m=1}^M \lambda_m \mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^H = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^H \quad (7)$$

여기서  $\lambda_m$  은 고유치로 내림차순으로 정렬되어 있으며, 즉  $k < l$  이면  $\lambda_k \geq \lambda_l$ ,  $\mathbf{e}_m$  은 대응하는 고유벡터,  $\mathbf{E}$ 는 고유벡터 행렬로  $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M]$ .  $\mathbf{\Lambda}$ 는 고유치를 요소로 가지는 대각행렬로  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_M]$  이다.  $\mathbf{R}_x$ 는 positive definite Hermitian 행렬로 고유치는 양수 값을 가지며, 고유벡터는 서로 직교한다<sup>[7]</sup>. 즉  $\mathbf{E}^H \mathbf{E} = \mathbf{I}$  이다.  $\mathbf{R}_x$ 의 고유분해는 다시 신호성분과 잡음 성분으로 나눌 수 있다.

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{E}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{E}_s^H + \mathbf{E}_n \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{E}_n^H \quad (8)$$

여기서

$$\mathbf{E}_s = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d] \quad (9)$$

$$\mathbf{\Lambda}_s = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_d] \quad (10)$$

$$\mathbf{E}_n = [\mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_M] \quad (11)$$

$$\mathbf{\Lambda}_n = \text{diag}[\lambda_{d+1}, \dots, \lambda_M] \quad (12)$$

어레이응답행렬  $\mathbf{A}$ 의 열이 생성하는 공간을 신호 부공간이라 부르며,  $\mathbf{E}_s$ 의 열 공간(column space)은 신호 부공간과 동일하다. 잡음 고유벡터행렬  $\mathbf{E}_n$ 의 열공간을 잡음 부공간(noise subspace)이라 한다.

식 (7)을 (6)에 대입하면

$$\mathbf{w} = c\mathbf{E}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{E}^H\mathbf{a}_1 \quad (13)$$

이다.  $\mathbf{a}_1$ 은 신호 부공간에 놓여있고 따라서 잡음 부공간에 직교한다. 이때 식 (13)의 가중벡터는

$$\mathbf{w} = c\mathbf{E}_s\mathbf{\Lambda}_s^{-1}\mathbf{E}_s^H\mathbf{a}_1 \quad (14)$$

와 같이 주어지고,  $\mathbf{w}$ 는 신호 고유벡터의 선형결합으로 신호 부공간에 놓여있게 된다.  $\mathbf{R}_x, \mathbf{a}_1$ 을 알고 있다면 식 (6) 또는 (14)에 의거, 가중벡터를 구할 수 있다. 그러나 실제로는 공분산행렬  $\mathbf{R}_x$ 는 알려져 있지 않고 데이터 샘플을 이용하여 추정해야 한다.  $\mathbf{a}_1$ 에 대한 추정을  $\hat{\mathbf{a}}_1$ 이라 하자. 스칼라 인수 범위 내에서  $\hat{\mathbf{a}}_1$ 이  $\mathbf{a}_1$ 과 같지 않고 조향벡터  $\hat{\mathbf{a}}_1$ 에 에러가 있을 수 있는 데, 이는, 예를 들어, 원하는 신호의 도래방향이 정확하게 알려져 있지 않거나, 사전에 가정된 어레이 특성과 실제 특성이 다르면 발생한다. 데이터 샘플을 이용하여  $\mathbf{E}_s, \mathbf{\Lambda}_s$ 의 추정이 각각  $\mathbf{E}_s(N), \mathbf{\Lambda}_s(N)$ 으로 주어졌다면, 신호 부공간 적응어레이는

$$\mathbf{w}(N) = c(N)\mathbf{E}_s(N)\mathbf{\Lambda}_s^{-1}(N)\mathbf{E}_s^H(N)\hat{\mathbf{a}}_1 \quad (15)$$

와 같이 가중벡터를 구한다. 여기서  $N$ 은 데이터 샘플 수,  $c(N)$ 은 단위 이득제한  $\mathbf{w}_c^H(N)\hat{\mathbf{a}}_0 = 1$ 을 만족하는 인수이다.

도래하는 신호 수  $d$ 는 알려져 있다고 상정한다. 만약 알려져 있지 않다면, MDL (minimum description length)<sup>[8]</sup> 기준, 또는 다른 방식을 통해 추정할 수 있다. 공분산 행렬  $\mathbf{R}_x$ 에 대한 추정은 다음처럼 구할 수 있다.

$$\mathbf{R}_{x_1}(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n) + \delta\mathbf{I}] \quad (16)$$

여기서  $\mathbf{R}_{x_1}(N)$ 이  $N < M$  이어도 역행렬을 가질 수 있도록  $\delta\mathbf{I}$ 를 더했으며, 필요치 않은 경우,  $\delta$ 는 0인 값을 가진다. 기존의 신호 부공간 빔 형성 방법<sup>[2~3]</sup>에서는 샘플행렬  $\mathbf{R}_{x_1}(N)$ 을 직접 고유분해하여  $\mathbf{\Lambda}_s(N), \mathbf{E}_s(N)$ 을 계산해서 식 (15)와 같이 가중벡터를 구한다. 이와 같이 샘플행렬을 직접 고유분해 하는 것은  $O(M^3)$ 의 계산량을 요구하여, 매우 복잡해진다.

PASTd<sup>[6]</sup>에서는 반복계산을 통해 고유치, 고유벡터를 효율적으로 구하고 있다. 이 방식에서는 아래에 있는 샘플행렬  $\mathbf{R}_{x_2}(N)$ 의 고유치, 고유벡터를 근사적으로 구한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{x_2}(N) &= \sum_{n=1}^N \beta^{N-n} \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n) \\ &= \beta\mathbf{R}_{x_2}(N-1) + \mathbf{x}(N)\mathbf{x}^H(N) \end{aligned} \quad (17)$$

먼저  $\mathbf{R}_{x_2}(N)$ 의 가장 큰 고유치, 고유벡터를 구한 후, 이에 대한 성분을  $\mathbf{R}_{x_2}(N)$ 로부터 제거하고, 제거된 행렬에서 가장 큰 고유치, 고유벡터를 구하는 이러한 방식을 반복하여  $d$ 개의 고유치, 고유벡터를 계산한다. 샘플의 수  $N$ 이 무한대로 접근하면 PASTd에서 구한 고유벡터는 서로 직교하지만, 유한한  $N$ 에 대해서 일반적으로 직교하지 않는다. 고유벡터가 직교하도록 PASTd를 수정하였다. 수정된 Orthogonal PASTd(OPASTd) 알고리즘을 표 1에 요약하였다. 표에서 \*은 켈레 복소수를 의미하며, orthonorm  $[\mathbf{e}_k'(N)]$  과정에서는  $\mathbf{e}_k'(N)$ 을  $\mathbf{e}_l(N)$  ( $l = 1, \dots, k-1$ )에 대해 직교화하고, 그 크기가 1이 되도록 정규화 한다. 원래의 PASTd에서는 직교화 과정 없이  $\mathbf{e}_k(N) = \mathbf{e}_k'(N)$ 이다. Gram-Schmidt<sup>[7]</sup> 방법에 따라 직교화 할 때,  $\mathbf{e}_k(N)$ 은

$$\mathbf{e}_k(N) = \frac{\mathbf{e}_k''(N)}{\|\mathbf{e}_k''(N)\|} \quad (18)$$

와 같이 나타낼 수 있고,  $\mathbf{e}_k''(N)$ 은

$$\mathbf{e}_k''(N) = \mathbf{e}_k'(N) - \sum_{l=1}^{k-1} \rho_{kl} \mathbf{e}_l(N) \quad (19)$$

$$\rho_{kl} = \mathbf{e}_k^H(N)\mathbf{e}_l'(N) \quad (20)$$

와 같이 계산된다. 식 (18)에서  $\|\cdot\|$ 은 Euclidean norm 을

표 1. OPASTd 알고리즘  
Table 1. OPASTd Algorithm.

---


$$\mathbf{x}_1(N) = \mathbf{x}(N)$$

For  $k = 1, 2, \dots, d$  Do

$$z_k(N) = \mathbf{e}_k^H(N-1)\mathbf{x}_k(N)$$

$$\lambda_k(N) = \beta\lambda_k(N-1) + |z_k(N)|^2$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_k(N) = \mathbf{x}_k(N) - z_k(N)\mathbf{e}_k(N-1)$$

$$\mathbf{e}_k'(N) = \mathbf{e}_k(N-1) - [z_k^*(N)/\lambda_k(N)]\tilde{\mathbf{x}}_k(N)$$

$$\mathbf{e}_k(N) = \text{orthnorm}[\mathbf{e}_k'(N)]$$

$$\mathbf{x}_{k+1}(N) = \mathbf{x}_k(N) - z_k(N)\mathbf{e}_k(N)$$


---

나타낸다.

$N$ 이 무한대로 접근하더라도 OPASTd(또는 PASTd)에서 구한 고유치는 공분산 행렬  $\mathbf{R}_x$ 의 고유치와 일치하지 않고 상수 배의 차이를 가진다. 이 차이를 보기 위해, 식 (17)에 기댓값을 취한 후,  $E[\mathbf{R}_{x_2}(N)]$ 의 고유치를 구하면

$$\bar{\lambda}_m(N) = \frac{1-\beta^N}{1-\beta}\lambda_m, \quad m = 1, \dots, M \quad (21)$$

와 같고, 구한 고유치는  $\lambda_m$ 에  $(1-\beta^N)/(1-\beta)$ 를 곱한 값으로 주어진다. 그러나 스칼라 인자에서 고유치가 다르더라도 식 (14) 또는 (15)는 변하지 않는다. 제안 방식에서는 OPASTd 알고리즘에 따라 구한  $\mathbf{A}_s(N) = \text{diag}[\lambda_1(N), \dots, \lambda_d(N)]$ ,  $\mathbf{E}_s(N) = [\mathbf{e}_1(N), \dots, \mathbf{e}_d(N)]$ 을 식 (15)에 대입하여 가중벡터  $\mathbf{w}(N)$ 을 구한다.

OPASTd를 이용한 제안방식에서 가중벡터를 구하는 데 필요한 계산량을 보면,  $\mathbf{e}_i'(N)$  ( $i = 1, \dots, d$ )을 직교화하는 데  $O(Md^2)$ 의 복소수 곱셈이 필요하고, 이외에는  $O(Md)$  이하의 계산량이 요구되어 전체 계산량은  $O(Md^2)$ 이다. 직접 고유분해하여 계산할 때 소요되는  $O(M^3)$ 에 비해 제안방식은 크게 계산량을 절감한다.

#### IV. 성능분석

$N$ 이 무한대로 접근하면 (15)의 가중벡터는

$$\mathbf{w} = c\mathbf{E}_s\mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{E}_s^H\hat{\mathbf{a}}_1 \quad (22)$$

과 같이 주어진다. 이 가중벡터는  $\mathbf{E}_s$ 의 열공간에 놓여 있으며,  $\mathbf{E}_s$ 의 열공간은  $\mathbf{A}$ 의 열공간과 같으므로  $\mathbf{w} = c_a\mathbf{A}\mathbf{u}$ 와 같은 형태로 쓸 수 있다. 여기서  $c_a$ 는 단위 이득 제한조건에 의해 구해진다. 이 사실로부터 (22)의 다른 표현식을,  $c_a\mathbf{A}\mathbf{u}$  형태의 벡터 중 출력전력을 최소화하는 벡터  $\mathbf{u}$ 를 구하고 단위이득조건을 적용하여, 유도할 수 있다<sup>[5]</sup>.

$$\min_{\mathbf{u}} (\mathbf{A}\mathbf{u})^H\mathbf{R}_x(\mathbf{A}\mathbf{u}), \quad \hat{\mathbf{a}}_1^H\mathbf{A}\mathbf{u} = 1 \quad (23)$$

식 (23)을 만족하는  $\mathbf{u}$ , 그리고 이때  $\mathbf{w}$ 는 다음처럼 구해진다.

$$\mathbf{u} = c_a(\mathbf{A}^H\mathbf{R}_x\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\hat{\mathbf{a}}_1 \quad (24)$$

$$\mathbf{w} = c_a\mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{R}_x\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\hat{\mathbf{a}}_1 \quad (25)$$

여기서  $c_a = 1/\hat{\mathbf{a}}_1^H\mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{R}_x\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\hat{\mathbf{a}}_1$ 이다.

편의상 행렬  $\mathbf{R}_d$ 를

$$\mathbf{R}_d = \mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H \quad (26)$$

와 같이 정의한다. 도래하는  $k$ 번째 신호의 입력전력을  $p_k$ 로 나타낸다. 즉  $p_k = E[s_k(t)s_k^*(t)]$ ,  $k = 1, \dots, d$ , 이다. 역행렬  $(\mathbf{A}^H\mathbf{R}_x\mathbf{A})^{-1}$ 은

$$(\mathbf{R}_d + \sigma^2\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{R}_d^{-1}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{R})^{-1} \quad (27)$$

과 같이 나타낼 수 있고,  $\Delta\mathbf{R} = \sigma^2\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{R}_d^{-1}$ 이다. 어레이에 도래하는 신호 중 최소 한 신호, 예로  $k$ 번째 신호는 잡음에 비해 그 전력이 매우 커서, 즉  $p_k \gg \sigma^2$  이어서

$$\begin{aligned} &(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{R})^{-1} \\ &= \mathbf{I} - \Delta\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}^2 - \Delta\mathbf{R}^3 + \dots \simeq \mathbf{I} - \Delta\mathbf{R} \end{aligned} \quad (28)$$

와 같이 근사시킬 수 있다고 가정한다. 이때 (26)은 (29)처럼 근사적으로 쓸 수 있다.

$$(\mathbf{R}_d + \sigma^2\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1} \simeq \mathbf{R}_d^{-1}(\mathbf{I} - \Delta\mathbf{R}) = \mathbf{R}_d^{-1} - \Delta\mathbf{R}' \quad (29)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{R}' &= \mathbf{R}_d^{-1}\Delta\mathbf{R} \\ &= \sigma^2\mathbf{R}_d^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{R}_d^{-1} \\ &= \sigma^2(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{R}_s^{-1}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{R}_s^{-1}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1} \end{aligned} \quad (30)$$

식 (29), (30)을 (25)에 대입하면

$$\mathbf{w} \simeq c_a(\mathbf{w}_s - \mathbf{w}_n) \quad (31)$$

처럼 나타낼 수 있고

$$\mathbf{w}_s = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R}_s^{-1} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{a}}_1 \quad (32)$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{A} \Delta \mathbf{R}' \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{a}}_1 \quad (33)$$

이다. 만약 잡음이 존재하지 않는다면  $\mathbf{w} = c_a \mathbf{w}_s$  와 같고,  $-c_a \mathbf{w}_n$  은 잡음의 영향에 의한 가중벡터 성분이다.

정의에 따라 SINR은

$$\text{SINR} = \frac{p_{od}}{p_{oI} + p_{on}} \quad (34)$$

이고, 여기서  $p_{oi}$ ,  $p_{oI}$ ,  $p_{on}$  은 각각 어레이 출력단에서 원하는 신호, 간섭, 잡음 전력이다. 원하는 신호, 간섭의 출력전력은  $p_{od} = p_1 |\mathbf{a}_1^H \mathbf{w}|^2$ ,  $p_{oI} = \sum_{l=2}^d p_l |\mathbf{a}_l^H \mathbf{w}|^2$  이고, 출력잡음전력은  $p_{on} = \sigma^2 \|\mathbf{w}\|^2$  이다. 식 (32)에  $\mathbf{A}^H$  을 곱하면

$$\mathbf{A}^H \mathbf{w}_s = \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{g} \quad (35)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= [g_1, \dots, g_d] \\ &= (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{a}}_1 \end{aligned} \quad (36)$$

이다.  $\mathbf{A}$  의 열공간을 생각하자.  $\mathbf{A}$  를 이 열공간 대한 순서를 가지는 기저(ordered basis)<sup>[7]</sup>라 하자.  $\mathbf{A}$  의 열공간에서 첫 번째 기저벡터(basis vector)는  $\mathbf{a}_1$ , 두 번째는  $\mathbf{a}_2$ , 그리고  $d$  번째는  $\mathbf{a}_d$  이다. 서로 독립적인 열을 가지는 어떤 행렬  $\mathbf{M}$  의 열공간으로 투사하는 행렬(projection matrix)  $\mathbf{P}_M$  은

$$\mathbf{P}_M = \mathbf{M}(\mathbf{M}^H \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^H \quad (37)$$

이다. 조향벡터  $\hat{\mathbf{a}}_1$  을  $\mathbf{A}$  의 열공간으로 투사된 벡터는

$$\mathbf{P}_A \hat{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{A} \mathbf{g} \quad (38)$$

이다. 식(38)로부터  $\mathbf{g}$  는 순서기저  $\mathbf{A}$  에 대한  $\mathbf{P}_A \hat{\mathbf{a}}_1$  좌표(coordinates)임을 알 수 있다. 식 (33)에  $\mathbf{A}^H$  을 곱하면

$$\mathbf{A}^H \mathbf{w}_n = \sigma^2 \mathbf{R}_s^{-1} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{g} \quad (39)$$

이다. 간단한 하나의 예로 각 도래신호 입사전력이 동일한 경우, 즉,

$$p_1 = p_2 \cdots = p_d \equiv p_\alpha \quad (40)$$

인 경우, 식 (32), (33)으로부터,  $\|\mathbf{w}_s\|$  는  $p_\alpha^{-1}$  에,  $\|\mathbf{w}_n\|$  은  $\sigma^2 p_\alpha^{-2}$  에 비례함을 알 수 있으며,  $p_\alpha \gg \sigma^2$  이므로  $\|\mathbf{w}_s\| \gg \|\mathbf{w}_n\|$  이다. 따라서 출력잡음전력은

$$p_{on} \simeq \sigma^2 c_a^2 \|\mathbf{w}_s\|^2 = \sigma^2 c_a^2 \mathbf{g}^H \mathbf{R}_s^{-1} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{g} \quad (41)$$

과 같이 근사적으로 나타낼 수 있다. 각 신호 전력이 동일하지 않더라도 어느 한 신호, 가령  $k$  번째 신호 전력이  $p_k \gg \sigma^2$  이면 출력잡음전력을 (41)처럼 근사시킬 수 있다. 분석의 간편함을 위해 도래하는 신호는 서로 상관되어 있지 않다고 하자. 이때

$$\mathbf{R}_s = \text{diag}[p_1, \dots, p_d] \quad (42)$$

와 같이 주어진다. 식 (35), (39)로부터

$$\mathbf{a}_k^H \mathbf{w}_s = p_k^{-1} g_k \quad (43)$$

$$\mathbf{a}_k^H \mathbf{w}_n = \sigma^2 p_k^{-1} \mathbf{z}_k^T (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{g} \quad (44)$$

이고  $\mathbf{z}_k$  는  $k$  번째 요소만 1이고 나머지는 0인 벡터이다.  $|g_k|$  가 0에 가까운 작은 값이 아니라면  $p_k \gg \sigma^2$  이므로  $|\mathbf{a}_k^H \mathbf{w}_s| \gg |\mathbf{a}_k^H \mathbf{w}_n|$  이고, 따라서  $k$  번째 신호에 대한 출력전력  $p_{ok}$  는

$$p_{ok} \simeq p_k c_a^2 |\mathbf{a}_k^H \mathbf{w}_s|^2 = p_k^{-1} c_a^2 |g_k|^2 \quad (45)$$

와 같이 구할 수 있다.  $p_{o1}$  은 원하는 신호에 대한 출력전력으로  $p_{od}$  이고,  $p_{ok} (k \geq 2)$  는  $(k-1)$  번째 간섭신호에 대한 출력전력이다. 전체 간섭신호에 대한 출력전력은  $p_{oI}$  으로 표시하고 있고, 개별 간섭신호에 대한 출력전력은 대문자 'I' 대신, 'd'와 'n'이외의 다른 소문자나 수자를 사용한다. 출력간섭전력이 출력잡음전력보다 매우 작아 이를 무시할 수 있는 경우와 그렇지 않은 경우에 대해 SINR.을 분석한다.

1. 출력간섭전력을 무시할 수 있는 경우

$\hat{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_1$  이라면  $g_1 = 1$  이고 나머지 좌표  $g_j$  ( $j = 2, \dots, d$ )는 모두 0이다.  $\mathbf{a}_j^H \mathbf{w}_s = 0$  이므로

(j-1)번째 간섭신호에 대한 출력전력  $p_{oj}$ 은

$$p_{oj} \approx p_j c_a^2 |\mathbf{a}_j^H \mathbf{w}_n|^2 = \sigma^4 p_j^{-1} |\mathbf{z}_j^T (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{g}|^2 \quad (46)$$

과 같이 주어진다.  $p_{oj}$ ,  $p_{on}$ 의 크기를 비교하기 위해 (40)과 같이 동일전력인 경우를 생각하면,  $p_{oj}/c_a^2$ 은  $\sigma^4 p_\alpha^{-3}$ 에 비례하고, 반면에  $p_{on}/c_a^2$ 은  $\sigma^2 p_\alpha^{-2}$ 에 비례한다.  $p_\alpha \gg \sigma^2$  이므로  $p_{on} \gg p_{oj}$  이고, 결과적으로  $p_{on} \gg p_{oI}$ 로 전체 출력간섭신호  $p_{oI}$ 는 출력잡음보다 매우 작아 무시된다.

조향벡터 에러가 없는  $\hat{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_1$ 인 경우에 대해 출력간섭신호가 무시됨을 보았는데, 에러가 작아  $|g_j|$  ( $j=2, \dots, d$ )가 0은 아니지만 매우 작은 값을 가진다면, 이 경우에도 출력간섭신호전력이 출력잡음전력보다 매우 작게 되어 무시할 수 있다.

조향벡터 에러가 작아 출력간섭전력을 무시할 수 있을 때, 식 (41), (45)로부터 SINR은

$$\text{SINR} \approx \frac{p_{od}}{p_{on}} \approx \frac{|g_1|^2}{p_1 \sigma^2 \mathbf{g}^H \mathbf{R}_s^{-1} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{g}} \quad (47)$$

처럼 구해진다. 각 센서가 무지향성(omni-directional)이고, 도래하는 신호가 서로 충분히 떨어져 있어  $\mathbf{A}^H \mathbf{A} \approx \mathbf{M}\mathbf{I}$ 와 같이 근사 시킬 수 있다면, 식 (47)은

$$\text{SINR} \approx \frac{p_{od}}{p_{on}} \approx \frac{\frac{Mp_1}{\sigma^2} |g_1|^2}{\sum_{m=1}^M \left( \frac{p_1 |g_m|}{p_m} \right)^2} \quad (48)$$

과 같이 주어진다. 위 식에 따르면 조향벡터 에러가 작아  $|g_j|$  ( $j=2, \dots, d$ )가 작은 값을 가지더라도, 원하는 신호전력  $p_1$ 이 어느 하나의 간섭신호 전력, 예로,  $(k-1)$ 번째 간섭신호 전력보다 매우 크면, 즉  $p_1/p_k \gg 1$ 이면,  $|g_k|$ 가 작은 값을 가져도  $p_1 |g_k|/p_k \gg 1$  일 수 있어 SINR은 작은 값을 가질 수 있다. 다시 말하면 원하는 신호의 전력이 어느 한 간섭신호의 전력보다 매우 크면 신호 부공간 적응 어레이는 성능저하를 겪게 된다. 반대로, 각  $j$  ( $j=2, \dots, d$ )에 대해  $p_1 |g_j|/p_j \ll 1$ 이면, 식 (48)의 분모에서 이들 항을 무시하여

$$\text{SINR} \approx \frac{Mp_1}{\sigma^2} \quad (49)$$

과 같이 근사시킬 수 있다. 식 (46)의 SINR은 간섭신호가 존재하지 않고 조향벡터 에러가 없을 때의 SINR로 적응 어레이로 얻을 수 있는 최대값이다. 식 (46)은 조향벡터 에러가 있더라도  $\mathbf{A}^H \mathbf{A} \approx \mathbf{M}\mathbf{I}$ ,  $p_1 |g_j|/p_j \ll 1$ 이면 최대 SINR과 매우 비슷한 성능을 얻을 수 있음을 보여준다.

## 2. 출력간섭전력을 무시할 수 없는 경우

$|g_j|$  ( $j=2, \dots, d$ ) 중 어느 하나라도 0에 가까운 매우 작은 값을 가지지 않는다면  $p_{oI}$ 를 무시할 수 없다.

이때,  $\sum_{j=2}^d p_j |\mathbf{a}_j^H \mathbf{w}_s|^2 \gg \sum_{j=2}^d p_j |\mathbf{a}_j^H \mathbf{w}_n|^2$  이고,  $p_{oI}$ 를 다음처럼 근사적으로 구할 수 있다.

$$p_{oi} \approx c_a^2 \sum_{j=2}^d p_j^{-1} |g_j|^2 \quad (50)$$

$\mathbf{A}^H \mathbf{A} \approx \mathbf{M}\mathbf{I}$ 인 경우, SINR은

$$\text{SINR} \approx \frac{\frac{Mp_1}{\sigma^2} |g_1|^2}{\frac{M}{\sigma^2} \sum_{j=2}^d \frac{p_1 |g_j|^2}{p_j} + \sum_{m=1}^M \left( \frac{p_1 |g_m|}{p_m} \right)^2} \quad (51)$$

처럼 나타낼 수 있다. 식 (51)을 보면,  $|g_j|$ 가 작은 값이 아니더라도  $p_j$ 가  $p_1$ 에 비해 충분히 크면 분모의 첫 번째 항을 무시할 수 있어 식 (48)과 같아진다. 다시 말하면,  $p_j \gg p_1$ ,  $j=2, \dots, d$ , 이면, 출력 간섭전력을 무시할 수 있다. 이를 뒤집어서 생각하면, 앞에서 언급한 바와 같이,  $p_1$ 이 어느 한  $p_j$ 보다 매우 크면 성능저하가 발생함을 말한다.

$d$ 차원의 신호 부공간에서 가중벡터를 조정함에 따라 가중벡터의 실효 차원은  $d$ 이고, 따라서 도래하는 신호 방향으로  $(d-1)$ 개까지 널(null)을 만들 수 있다. 식 (23)에 따라 적응 어레이는 출력전력이 최소로 되도록 가중벡터를 구한다. 조향벡터에러가 작거나 각 간섭신호의 입사전력이 원하는 신호의 그것보다 매우 크면,  $(d-1)$ 개의 널을 간섭신호방향으로 만들어 출력전력을 최소로 한다. 그러나 원하는 신호의 입사전력이 어느 한 간섭신호 전력보다 매우 큰 경우, 원하는 신호방향 쪽으로 널을 형성해야 출력전력을 최소로 할 수 있다. 따라서 이 경우 성능저하가 발생한다. 위 분석결과들은 이러한 부공간 어레이의 동작을 말해준다.

V. 시뮬레이션

시뮬레이션을 위해 10개의 센서가 반 파장의 일정한 간격으로 놓여있는 ULA(uniform linear array) 어레이를 사용하였다. 하나의 원하는 신호, 두 개의 간섭신호가 어레이에 도래한다. 원하는 신호의 도래각  $\theta_1$ 은 다르게 언급하지 않는다면  $\theta_1 = -3^\circ$  이고, 두 간섭신호의 도래각은 각기  $\theta_2 = -40^\circ$ ,  $\theta_3 = 25^\circ$  이다. 신호대 잡음비(SNR: signal-to-noise ratio)  $\gamma_1 = 10$  dB 이고, 여기서  $\gamma_k = p_k/\sigma^2$ ,  $k = 1, \dots, 3$ , 이다.  $\theta_1$ 에 대한 추정은  $\hat{\theta}_1 = 0^\circ$  이다.

그림 1, 2에서는 공분산 행렬  $\mathbf{R}_x$ 를 알고 있는 정상

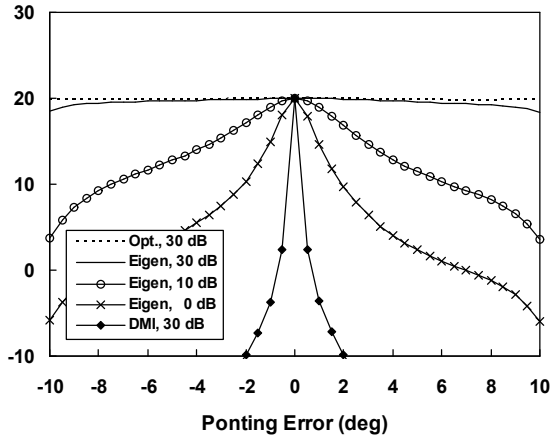


그림 1. 정상상태에서 포인팅 에러  $(\theta_1 - \hat{\theta}_1)$ 에 따른 SINR

Fig. 1. SINR versus  $(\theta_1 - \hat{\theta}_1)$  at the steady-state.

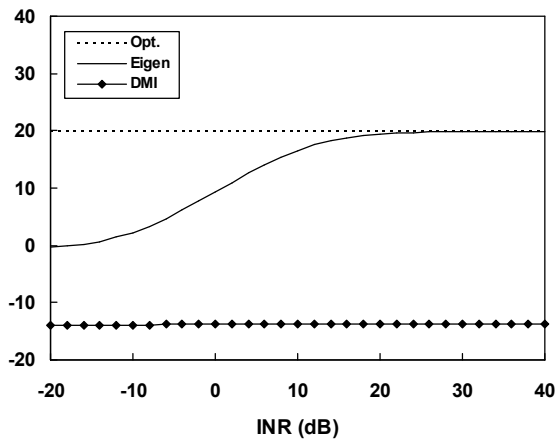


그림 2. 정상상태에서  $\gamma_2$ 에 따른 SINR

Fig. 2. SINR versus  $\gamma_2$  at the steady-state.

상태에서 신호 부공간에 기초한 어레이와 DMI 어레이의 성능을 예시한다. 편의상, 신호 부공간에 기초한 어레이를 고유치 어레이(eigen array)라 부른다. 그림 1은 포인팅 에러  $(\theta_1 - \hat{\theta}_1)$ 에 대한 성능을 보여준다.  $\gamma_2 = \gamma_3 \equiv \gamma_\alpha$  이고, 범례에서 수자는  $\gamma_\alpha$ 의 값을 나타낸다. 최적(optimum) 성능은 조향에러 없이 식 (6)의 최적가중벡터에 의한 성능이다. 최적 성능, DMI 어레이 성능은  $\gamma_\alpha = 30$  dB 인 경우인데, 이들 성능은 다른  $\gamma_\alpha$ 에 대해서도 거의 같은 값을 가진다. 포인팅 에러가 클수록,  $\gamma_\alpha$ 가 작을수록 원하는 신호의 감쇠는 커지고, 출력간섭전력이 증가하여 고유치 어레이에서, 식 (51)에서 보듯이, 성능저하가 커지게 된다. 그러나  $\gamma_\alpha$ 가  $\gamma_1$ 에 비해 매우 크면, 큰 포인팅 에러에도 성능저하가 거의 없으며, SINR이 (49)와 같이 근사됨을  $\gamma_\alpha = 30$  dB에 대한 고유치 어레이 성능 결과로부터 확인할 수 있다. DMI 어레이에서는 작은 에러에도 원하는 신호가 간섭신호처럼 취급되어 심한 SINR 감소가 발생한다.

그림 2는 첫 번째 간섭신호에 대한 입력 INR (interference-to-noise ratio)  $\gamma_2$ 의 함수로 성능을 보여준다.  $\gamma_3 = 30$  dB 이다.  $\gamma_2$ 가 매우 작으면 어레이에 거의 영향을 주지 못하고, 따라서  $\gamma_2$ 가 조금 변화여도 성능은 일정하며, 이 경우 조향에러로 인해 고유치 어레이는 원하는 신호를 감쇠하여 큰 성능저하가 발생한다.  $\gamma_2$ 가 증가하여  $p_2$ 가 잡음전력에 비해 무시할 수 없는 정도의 값을 가지면 이 간섭신호도 제거하려고 가중벡터가 조정되며, 이에 따라 원하는 신호의 감쇠가 감소하여 SINR이 증가하기 시작한다.  $\gamma_2$ 가  $\gamma_1$ 에 비해 크면 이 간섭신호를 제거하도록 고유치 어레이의 가중벡터가 조정되어 어레이 출력단에서 간섭전력은 잡음전력에 비해 매우 작게되며 SINR은 (47)과 같이 주어져서  $\gamma_2$ 가 증가하여도 일정한 값을 가진다. 앞에서 언급한 바와 같이, 최적 성능, DMI 어레이 성능은 간섭전력 세기에 관계없이 거의 일정함을 보인다.

그림 3, 4는 샘플 수  $N$ 에 따라 정상상태로의 수렴특성을 보여주며,  $\gamma_2 = \gamma_3 = 20$  dB 이다. 100번의 독립적인 시뮬레이션을 통하여 SINR의 평균값을 구하였다. 그림에서는  $\mathbf{R}_{x1}(N)$ 을 직접 고유분해 하는 방식, 표 1의 OPASTd를 이용하는 방식, 기존의 PASTd를 이용하는 방식, DMI 방식에 대한 성능을 비교한다. 식 (16)에서  $\delta = 10^{-5} \text{tr}(\mathbf{R}_x)$ , (17)에서  $\beta = 0.999$ 를 사용하

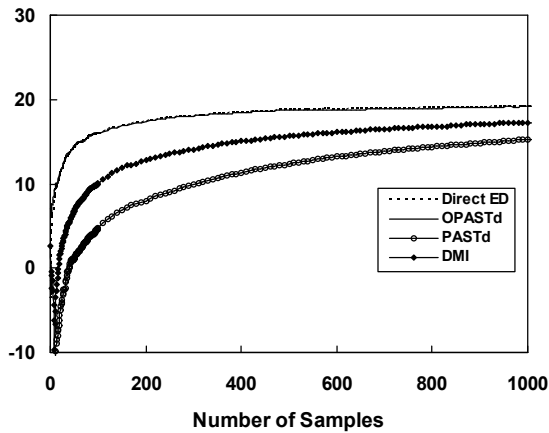


그림 3. 포인팅에러가 없을 때 ( $\hat{\theta}_1 = \theta_1$ ), 샘플 수  $N$ 에 따른 성능

Fig. 3. SINR versus  $N$  when  $\hat{\theta}_1 = \theta_1$ .

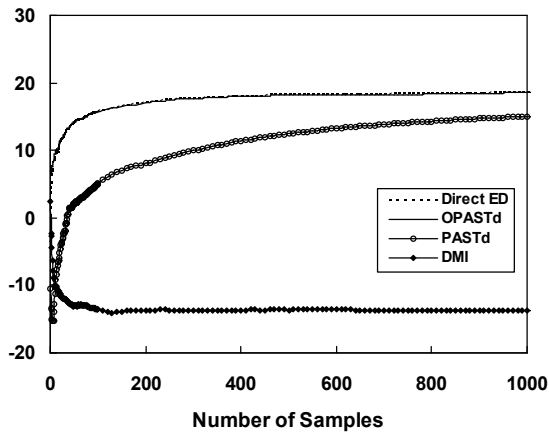


그림 4. 포인팅에러가 있을 때( $\hat{\theta}_1 = \theta_1 + 3$ ), 샘플 수  $N$ 에 따른 성능

Fig. 4. SINR versus  $N$  when  $\hat{\theta}_1 = \theta_1 + 3$ .

였고, tr은 ‘trace’를 의미한다. 그림 4에서는 포인팅 에러 없이  $\theta_1 = \hat{\theta}_1 = 0^\circ$  이다. 직접분해방식과 OPASTd 방식에서의 성능은 매우 유사하여 중첩되어 있는 것처럼 보인다. 신호 부공간에서 가중벡터를 조정하는 이들 방식은  $M$ 차원 공간 조정방식의 DMI 보다 빠르게 수렴하고 있다. 반면에 PASTd 방식은 신호 부공간을 이용하지만 고유벡터 간 직교성의 결여로 수렴속도가 오히려 DMI 보다 느림을 나타낸다.

그림 4는 포인팅 에러가 있는 경우로  $\theta_1 = -3^\circ$  이다. 그림 4에서와 마찬가지로, 직접 분해 방식, OPASTd 방식에 대한 성능은 거의 동일하여 겹쳐져 있는 것처럼 보이며, PASTd 방식보다 빠른 수렴특성을

나타낸다. 두 간섭신호 모두 원하는 신호보다 강하여 원하는 신호의 감쇠 없이 잘 동작하고 있다. 반면에 DMI 어레이는 원하는 신호도 감쇠함에 따라 심한 성능 저하를 보여준다.

#### IV. 결 론

신호 부공간을 이용하는 고유치 적응어레이에서 간단히 가중벡터를 계산하는 방법을 제시하였다. 제시된 방식은 PASTd를 변형하여 고유벡터 간에 직교성을 유지하도록 하였으며, 가중벡터를 구하는 데 소요되는 계산량이  $O(Md^2)$ 으로 직접 고유분해하는 방식보다 크게 계산량을 줄일 수 있다. 시뮬레이션 결과에 따르면 OPASTd 방식은 직접분해 방식과 거의 동일한 성능을 가진다. 고유치 적응어레이의 이론적인 성능분석에 따르면, 조향벡터를 신호 부공간에 투사한 벡터의 좌표, 도래신호의 전력에 의해 성능이 크게 좌우됨을 보여주며, 신호 부공간에서 투사된 조향벡터의 간섭좌표축에 대한 좌표크기가 0에 가까운 작은 값을 갖거나 간섭신호 모두가 원하는 신호보다 매우 강하면 원하는 신호는 거의 감쇠되지 않고 고유치 어레이는 잘 동작한다. 시뮬레이션에서도 이와 일치하는 결과를 보여주었다.

#### 참 고 문 헌

- [1] L. C. Godara, “Application of antenna arrays to mobile communications-Part II: Beamforming and DOA considerations,” *Proc. IEEE*, vol. 85, No. 8, pp. 1195-1247, Aug. 1997.
- [2] L. Chang and C.-C. Yeh, “Performance of DMI and eigenspace-based beamformers,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-40, pp. 1336-1347, Nov. 1992.
- [3] W. D. D. Feldman and L. J. Griffith, “A projection approach for robust adaptive beamforming,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. SP-42, pp. 867-876, Apr. 1994.
- [4] S.-J. Yu and J.-H. Lee, “Statistical performance of eigenspace-based adaptive array beamformers,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 44, no. 5, pp. 665-671, May 1996.
- [5] Y.-H. Choi, “Eigenstructure-based adaptive beamforming for coherent and incoherent interference cancellation,” *IEICE Trans. Commun.*, vol. E85-B, no. 3, pp. 633-640, Mar.



2002.

- [6] B. Yang, "Projection approximation subspace tracking," *IEEE Trans Signal Processing*, vol. 44, no. 1, pp. 95 - 107, Jan. 1995.
- [7] B. Noble and J. Daniel, *Applied Linear Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall, 1988.
- [8] M. Wax and T. Kailath, "Detection of signals by information theoretic criteria," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 33, no. 2, pp. 387-392, Apr. 1985.

---

— 저 자 소 개 —



최 양 호(정회원)

1982년 연세대학교 전자공학과  
학사 졸업.

1984년 KAIST 전기 및 전자  
공학과 석사 졸업.

1989년 KAIST 전기 및 전자  
공학과 박사 졸업.

1989년 ~ 1997년 한국통신 연구개발본부 팀장

1997년 ~ 2002년 동양대학교 정보통신공학부 교수

2002년 ~ 현재 강원대학교 전기전자공학부 교수

<주관심분야 : 무선신호처리, 무선접속기술, 이동  
통신>