

일정진폭하중을 받는 유한 길이 봉의 유한요소해석

Finite Element Analysis in Finite Length Bar under Constant Amplitude Loading

황 은 하†

Hwang, Eun-Ha

요 지

Newmark방법과 같은 직접시간적분법은 시간증분 구간 사이에서 하중이 변하더라도 하중값을 그 시간 구간에서 일정한 하중으로 사용하기 때문에 일정진폭하중과 같은 연속적인 하중함수를 불연속적인 하중함수로 가정하고 수치계산을 수행한다. 따라서 이러한 하중함수의 근사에 따른 오차로 인하여 정확한 수치결과를 계산할 수 없다. 이에 반해, Gurtin의 변분식에 기초한 유한요소방정식은 하중함수를 시간이력에 대하여 합성적분하여 계산한다. 따라서 시간증분 구간에서 하중이 변하더라도 연속적인 하중함수의 곡선을 따라 가면서 계산하기 때문에 신뢰할 수 있는 수치결과를 구할 수 있다. 본 논문에서는 1차원 막대의 자유단에서 일정진폭하중을 받는 문제를 수치해석하여 Gurtin방법이 Newmark방법 보다 일정진폭하중을 받는 문제에 더 적합한 방법임을 보인다. 또한, Gurtin방법이 일정한 하중을 받는 문제보다 일정진폭하중을 받는 문제에 더 효과적인 방법임을 보인다. Gurtin방법을 FORTRAN으로 프로그래밍하여 해석한 수치결과와 해석용 소프트웨어인 ADINA의 Newmark방법에 의한 수치결과를 비교하여 제시된 수치해의 정확성과 타당성을 검증한다.

핵심용어 : 일정진폭하중, 유한요소법, 합성적분

Abstract

Direct time integration method such as Newmark method is numerically performed under the assumption that continuous load function such as constant amplitude load can be treated as a discontinuous load function. It is due that the load can be treated as a constant value at the given time period regardless of variation of load at the time increment interval. It means the numerical results should be accompanied by the error due to approximation of load function. In contrast, the load function is calculated by convolution integral for the given time interval at finite element equation based on Gurtin's variation equation. Therefore, precise numerical results can be obtained by Gurtin's method because of convolution integral for the continuous load function curve even at the variation of load function in the given time interval. In this study, we prove that Gurtin's method can be more suitable than Newmark method in the problem of constant amplitude loading, using the numerical results for the free end of the one-dimensional rod. This study also shows that Gurtin's method is more effective in constant amplitude loading than in constant loading. The accuracy and the validity are verified by comparison between the results of in-house FORTRAN code and ADINA, a commercial software supporting Newmark method.

Keywords : constant amplitude loading, finite element method, convolution integral

1. 서 론

기계의 고속화 및 구조물의 대형화가 진행됨에 따라 이들 기계 구조물들에 작용하는 하중형태도 더욱 복잡하고 다양해지고 있다. 이들 기계 구조물들을 구성하고 있는 각종 재료나 부재가 충격을 받을 때 생기는 변형해석의 문제, 응력해석의 문제해결이 중요시 되고 있다(최정훈 등, 2005). 이러

한 동적 탄성문제를 해석하기 위한 방법으로써 지금까지는 실험을 통한 해법에 많이 의존했다. 최근 컴퓨터의 성능이 향상됨으로 인하여 경제적, 인적, 물리적인 장점이 부각되면서 많은 산업체에서 컴퓨터를 활용한 문제해결을 선호하고 있다.

컴퓨터를 이용한 선형 동탄성 재료의 해를 구하기 위한 수치해법으로는 유한요소법(FEM), 경계요소법(BEM) 등이 있고,

† 책임저자, 종신회원 · 금오공과대학교 기계공학부 교수
Tel: 054-478-7373 ; Fax: 054-478-7319
E-mail: ehhwang@kumoh.ac.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2010년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2011년 2월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

유한요소법을 이용한 범용 해석용 소프트웨어들(ADINA, ABAQUS 등)이 기본적으로 채택하고 있는 Newmark방법(Bathe, 1996; Zienkiewicz 등, 1991)이 동적 구조물의 수치해를 얻기 위한 방법으로 폭넓게 이용되고 있다.

그러나 일정진폭하중을 받는 문제에서 Newmark방법과 같은 직접시간적분법들은 시간증분 사이에서 변하는 외력함수를 일정한 하중으로 가정한다. 따라서 일정한 진폭을 가지는 하중함수에 대해서 기존의 동탄성 유한요소방정식은 불연속적인 하중함수로 가정하고 수치계산을 수행한다. 이러한 문제로 인하여 신뢰할 만한 해를 얻기 위해서는 공간상에서 충분히 많은 유한요소로 분할해야만 한다. 또한 유한요소의 크기에 따라 시간증분의 크기도 상대적으로 작아져야만 하므로 해석시간까지 시간 증분의 반복횟수는 증가할 수밖에 없다.

이에 반해, 합성적분으로 표현되는 Gurtin의 변분식(Gurtin, 1964; Oden 등, 1976)에 기초한 유한요소방정식(심우진 등, 2001)은 직접시간적분법과는 달리 일정 진폭하중을 받는 문제에 대해서도 시간구간 내에서 하중함수를 합성적분하여 구하므로 정확한 힘벡터를 계산할 수 있다. 그러나 심우진 등(2001)의 논문에서는 하중함수의 합성적분에 관한 수식이 있으나 일정하중함수가 주어진 문제에 대해서만 적용하였으며 이를 변하는 하중이 작용하는 문제에 적용하지는 못했다.

본 논문에서는 Gurtin의 변분식에 기초한 유한요소방정식(심우진 등, 2001)의 하중벡터가 시간 증분구간에서 일정진폭하중함수의 곡선을 정확하게 따라가면서 계산할 수 있다는 사실에 기초하여 유한 길이의 막대의 자유단에 축방향의 일정진폭하중함수가 작용되는 문제에서 검증된 상용프로그램인 ADINA와 Gurtin방법의 FORTRAN을 기반으로 한 유한요소해석 결과들을 비교하여 Gurtin방법의 유리한 점을 제시하고자 한다. 또한 일정하중이 작용되는 문제보다 일정진폭하중이 작용하는 문제해석에 Gurtin방법이 더 효과적임을 제시하고자 한다. 이를 검증하기 위한 예제로서 막대의 자유단에서 삼각형 하중함수, 일정한 하중인 계단함수, 일정진폭하중함수으로써 사인하중함수가 주어지는 문제들에 대하여 수치해석을 수행하였다.

2. 유한요소방정식

2.1 Gurtin의 변분식에 기초한 유한요소방정식

선형 탄성 재료에 대한 Gurtin의 변분식에 기초한 동적 유한요소방정식은 다음처럼 표현된다(심우진 등, 2001).

$$[\widehat{K}] \{u(\mathbf{x})\}^{n+1} = \{\widehat{R}(\mathbf{x})\}^{n+1} \quad (1)$$

한편, 본 논문에서는 2절점 Truss요소를 사용하여 1차원 막대의 자유단에서 일정하중이 가해지는 문제에 대하여 해석을 수행하였는데, 변위함수를 시간축에 대하여 1차함수로 근사화하였다. 여기서, 유효강성계수행렬 $[\widehat{K}]$ 는 시간에 무관하게 항상 일정하고, $\{\widehat{R}(\mathbf{x})\}^{n+1}$ 은 시간 t_{n+1} 에서의 유효절점력벡터이다.

$$[\widehat{K}] = \left[\frac{\Delta t^2}{6} [K] + [M] \right] \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \{\widehat{R}(\mathbf{x})\}^{n+1} &= \int_{t_0}^{t_{n+1}} \{F(\mathbf{x}, \tau)\} (t_{n+1} - \tau) d\tau \\ &- \Delta t^2 [K] \sum_{k=0}^n (n-k+1) \{u(\mathbf{x})\}^k \end{aligned} \quad (3)$$

각 요소의 강성행렬과 질량행렬은 공간의 함수로 주어지며, 힘벡터는 시간과 공간의 함수로 다음과 같다.

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (4)$$

$$[M] = \int_{\Omega} \rho [M]^T [M] d\Omega \quad (5)$$

$$\{F(\mathbf{x}, t)\} = \int_{\Gamma} [M]^T \{\hat{t}(\mathbf{x}, t)\} d\Gamma \quad (6)$$

여기서, $[B]$ 는 변형률-변위 행렬, $[D]$ 는 탄성계수 행렬, $[M]$ 는 형상함수 행렬, $\{\hat{t}(\mathbf{x}, t)\}$ 는 표면력벡터이다. 참고로, 식(3)에서와 같이 물체에 가해진 외력에 의한 힘벡터는 시간축에 대하여 적분형태의 계산이 이루어진다. 따라서 시간이력에 따라 이전 시간절점과 다음 시간절점 사이에서 급격하게 변하는 하중함수의 힘벡터를 정확하게 계산할 수 있다.

2.2 Newmark방법에 의한 유한요소방정식

동적문제를 해석하기 위한 직접시간적분법들 중에서 일반적으로 가장 많이 사용하고 있는 기본적인 Newmark방법인 사다리꼴 법칙에 대한 유한요소방정식은 다음과 같다(Bathe, 1996; ADINA R&D Inc, 2009).

$$[\overline{K}] \{u(\mathbf{x})\}^{n+1} = \{\overline{R}(\mathbf{x})\}^{n+1} \quad (7)$$

여기서, 유효강성계수행렬 $[\overline{K}]$ 는 시간에 무관하게 항상 일정하고, $\{\overline{R}(\mathbf{x})\}^{n+1}$ 은 시간 t_{n+1} 에서의 유효절점력벡터이다.

$$[\overline{K}] = \left[[K] + \frac{4}{\Delta t^2} [M] \right] \quad (8)$$

$$\{\bar{R}(\mathbf{x})\}^{n+1} = \{F(\mathbf{x})\}^{n+1} + [M] \left[\frac{4}{\Delta t^2} \{u(\mathbf{x})\}^n + \frac{4}{\Delta t} \{\dot{u}(\mathbf{x})\}^n + \{\ddot{u}(\mathbf{x})\}^n \right] \quad (9)$$

여기서, $\{u(\mathbf{x})\}^n$, $\{\dot{u}(\mathbf{x})\}^n$, $\{\ddot{u}(\mathbf{x})\}^n$ 은 각각 변위벡터, 속도 벡터, 가속도벡터이다. 참고로, 식 (9)에서와 같이 유효절점력벡터는 물체에 가해진 외력에 의한 힘벡터와 변위벡터, 속도벡터, 가속도 벡터에 의한 함으로 표현된다. 따라서 순수 외력에 의한 힘벡터($\{F(\mathbf{x},t)\}^{n+1}$)는 시간 t_{n+1} 에서의 하중만 계산하게 되므로 시간증분구간의 하중은 묘사할 수 없다.

2.3 오차 분석

서로 다른 크기를 가지는 일정 진폭하중함수를 비교하여 평가하기 위하여 다음과 같은 평가 기준을 사용한다.

(1) 무차원화된 절대오차(Normalized Absolute Error)

$$NAE = \frac{\sum_{i=1}^N |\epsilon_i|}{\sum_{i=1}^N |X_i|} \quad (10)$$

여기서, 자료점의 오차 $\epsilon_i = x_i - X_i$ 이고, N 은 자료점의 개수, X_i 는 엄밀해, x_i 는 자료점의 수치값이다.

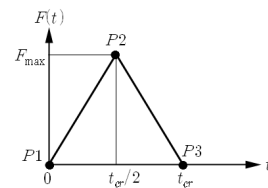
(2) 무차원화된 오차의 표준편차(Normalized Standard Deviation)

$$NSD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\epsilon_i - \epsilon_m)^2}{\sum_{i=1}^N |X_i|}} \quad (11)$$

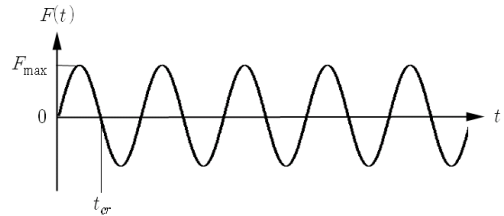
3. 수치해석 예

일정진폭하중함수에 의한 유한요소방정식의 외력이 수치결과에 미치는 영향을 보기 위하여 그림 1에서와 같은 2가지 형태의 하중함수들, 그림 2에서와 같은 계단함수, 그림 3에서와 같은 1차원 막대의 자유단에서 작용하는 문제에 대하여 Newmark방법과 Gurtin방법에 의한 수치결과와 1차원 막대 문제에 대한 Timoshenko의 이론해(Timoshenko 등, 1974; Tanaka 등, 2001)를 함께 비교하여 도시하였다.

수치해석에 사용된 모델은 그림 3에서와 같이 한쪽 끝단이 완전 고정되어 있고, 다른 쪽 끝단에서는 막대의 길이방향으로 압축하중이 작용하는 1차원 막대를 선정하였으며, 자유단(A점)에서는 변위를, 중앙단(B점)에서는 응력을 계산하였다. 해석에 사용된 재료의 탄성계수 $E=0.11 \times 10^6 \text{kg/ms}^2$, 밀도 $\rho=2.0 \text{kg/m}^3$, 막대의 길이 $L=9\text{m}$, 자유단에서 가해진 하중



(a) 삼각형 하중함수



(b) 사인 하중함수

그림 1 막대의 자유단에서 작용하는 하중함수들

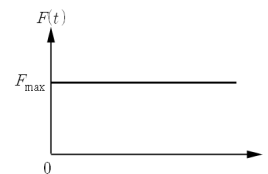


그림 2 막대의 자유단에서 작용하는 계단함수

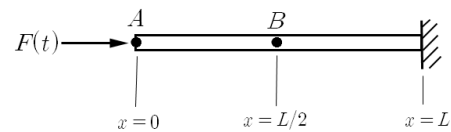


그림 3 하중을 받는 막대의 기하학적 형상

은 $F(t)=1\text{kN}$ 이다.

유한요소법으로 수치해석을 수행함에 있어 시간증분의 크기는 수치결과에 지대한 영향을 미치므로 적절한 시간증분의 선정이 중요하다(최정훈 등, 2005). 시간증분 Δt 동안 일정 진폭하중이 유한요소를 지나는 거리와 유한요소의 길이 $l^{(e)}$ 와의 상대적인 관계를 나타내는 무차원 변수 λ 에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$\lambda = c\Delta t/l^{(e)} \quad (12)$$

여기서, 1차원 막대의 전파속도 $c = \sqrt{E/\rho}$ 이다. 수치해석시 동특성 시간변수 $\lambda=1$ 로 하였다.

수치해석에 사용된 유한요소는 2절점 Truss요소를 사용하였다. 막대를 9개의 균등한 유한요소로 분할하고, 이때의 유한요소를 기준유한요소로 정의한다. 막대의 자유단에 가해진 일정진폭하중이 1개의 기준유한요소를 지나는 시간을 기준시간으로 정의하면 다음과 같다.

$$t_{cr} = l^{(e)}/c \quad (13)$$

시간증분의 크기에 따른 수치결과의 오차를 비교하기 위해 여 기준유한요소를 중심으로 2^N 개로 분할하였다. 즉, 수치해석에 사용된 전체 유한요소의 개수는 1개의 기준유한요소 (2^N , $N=0$, 전체 유한요소는 9개)로부터 유한요소의 개수를 128개(2^N , $N=7$, 전체 유한요소는 1152개)까지 분할하여 수치해석을 수행하였다.

3.1 삼각형 하중함수

그림 4~그림 7은 1차원 막대의 자유단에서 그림 1(a)에 서와 같은 삼각형 하중함수에 의한 자유단(A점)에서의 변위 와 중앙단(B점)에서의 응력을 Newmark방법과 Gurtin방법 에 의한 수치결과를 이론해와 비교하여 도시하였다. 이때 해 석에 사용된 하중함수는 다음과 같다.

$$\{F(\mathbf{x};t)\} = \begin{cases} \frac{2}{t_{cr}}t\{F_{\max}\} & (0 \leq t \leq t_{cr}/2) \\ 2\left(1 - \frac{1}{t_{cr}}t\right)\{F_{\max}\} & (t_{cr}/2 < t \leq t_{cr}) \\ 0 & (t > t_{cr}) \end{cases} \quad (14)$$

여기서, $\{F_{\max}\}$ 은 삼각형 하중함수의 시간 $t=t_{cr}/2$ 에서 최 대 힘벡터이다.

식 (14)을 식 (3)의 우변 첫째항에 대입하고 시간에 대해 적분하면 다음과 같이 정리된다.

$$\int_0^{t_{n+1}} \{F(\mathbf{x},\tau)\} (t_{n+1} - \tau) d\tau \quad (15)$$

$$= \begin{cases} \frac{t^3}{6t_{cr}}\{F_{\max}\} & (0 \leq t \leq t_{cr}/2) \\ \left(\frac{t_{cr}^2}{3} - t_{cr}t + t^2 - \frac{t^3}{6t_{cr}}\right)\{F_{\max}\} & (t_{cr}/2 < t \leq t_{cr}) \\ (t_{cr}t - t_{cr}^2)\{F_{\max}\} & (t > t_{cr}) \end{cases}$$

그림 4와 그림 5는 막대를 9개의 유한요소(2^N , $N=0$)로 분할하였고, 시간증분의 크기를 $\Delta t=t_{cr}$ 로 하여 수치해석을 수행한 변위해와 응력해이다. Newmark방법과 같은 직접 시간적분법의 유효절점력벡터식 (9)는 초기조건(시간 $t=0$ 일 때의 변위, 속도, 가속도)이 모두 0이고, 시간 $t=\Delta t$ 에 대 한 힘 또한 0이 되므로 다음 시간 절점에서의 변위와 응력은 당연히 0이 될 수밖에 없는 자명한 결과를 나타낸다. 하지만

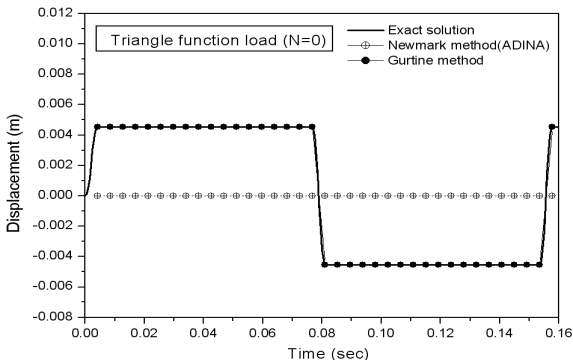


그림 4 막대의 자유단(A점)에서 시간의 경과에 따른 변위분포 (삼각형 하중함수, 전체 유한요소 개수: 9개, $\Delta t=t_{cr}=0.004264\text{sec}$)

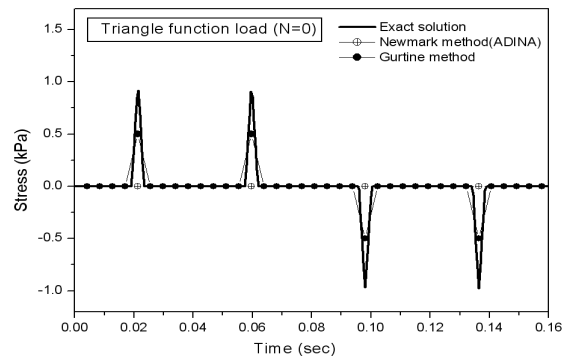


그림 5 막대의 중앙단(B점)에서 시간의 경과에 따른 응력분포 (삼각형 하중함수, 전체 유한요소 개수: 9개, $\Delta t=t_{cr}=0.004264\text{sec}$)

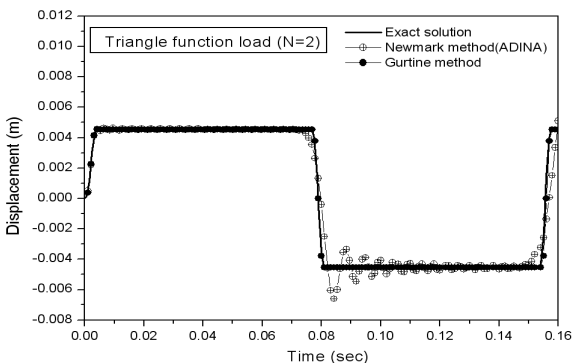


그림 6 막대의 자유단(A점)에서 시간의 경과에 따른 변위분포 (삼각형 하중함수, 전체 유한요소 개수: 36개, $\Delta t=t_{cr}/4=0.001066\text{sec}$)

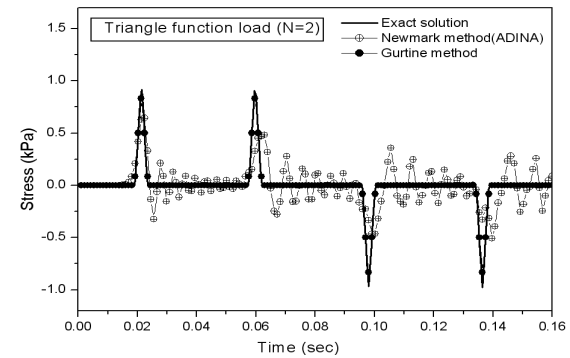


그림 7 막대의 중앙단(B점)에서 시간의 경과에 따른 응력분포 (삼각형 하중함수, 전체 유한요소 개수: 36개, $\Delta t=t_{cr}/4=0.001066\text{sec}$)

Gurtin방법에서는 유효질점력벡터를 구성하고 있는 힘벡터의 합성적분식 (3)이 시간증분 구간 사이에서 하중함수를 정확하게 적분하여 계산하므로 다음 시간절점에서의 변위는 오차가 거의 없는 정확한 수치해를 구할 수 있으나 응력은 변위보다는 오차가 크나 이론해를 잘 따라가고 있음을 볼 수 있다.

그림 6과 그림 7은 막대를 36개의 유한요소(2^N , $N=2$)를 분할하였고, 시간증분의 크기를 $\Delta t = t_{cr}/4$ 로 하여 수치해석을 수행한 변위해와 응력해이다. Gurtin방법에 의한 변위해와 응력해의 분포는 시간 증분 구간에서의 하중함수를 정확하게 구할 수 있으므로 이론해와 거의 일치하는 수치해를 구할 수 있다. 하지만, Newmark방법에 의한 변위해는 시간 이력의 처음부분에서는 이론해를 따라가고 있지만, 변위해가 급격하게 변하는 시간 $t = 0.077\text{sec}$ 에서부터 수치결과의 떨림현상을 보이고 있고 응력해는 극값의 크기 뿐만 아니라 시간절점의 위치에서도 큰 차이를 보이며 수치적인 오차의 떨리는 현상을 보이고 있다.

그림 8~그림 11은 막대의 자유단에서 가해진 삼각형 일정진폭하중이 지나는 기준시간(t_{cr})에 대하여 기준유한요소를 2^N 개로 분할하여 수치해석을 수행하였다. 자유단(A점)에서

의 변위해는 시간 $t=0$ 에서 변위가 발생하여 $36t_{cr}$ 의 시간 간격으로 주기적인 변위해의 분포를 보였고, 중앙단(B점)에서의 응력해는 시간 $t=4.5t_{cr}$ 에서 응력해가 발생하여 시간 $t=40.5t_{cr}$ 까지 $36t_{cr}$ 의 시간 간격으로 주기적인 응력해의 분포를 보였다. 그래서 첫 시간주기에 대하여 Newmark방법과 Gurtin방법에 의한 수치결과의 절대오차와 표준편차를 도시하였다.

그림 8은 막대의 자유단(A점)에서 변위해의 절대오차를 이론해의 합으로 무차원시켜 도시한 것이다. Newmark방법에 의한 변위해의 절대오차는 $N=0$ (유한요소가 9개)일때 100%의 최대오차를 보이고 있으며, $N=4$ (유한요소가 144개)부터 오차가 거의 없는 안정적인 수치해를 보이고 있다. 다시 말해, 삼각형 일정진폭하중함수의 전체 시간크기에 대하여 시간증분의 크기를 적어도 $\Delta t \leq t_{cr}/8$ 까지는 설정해주어야만 신뢰할 수 있는 변위해를 구할 수 있다. 이에 반해, Gurtin방법에 의한 변위해는 이론해와 거의 일치하는 수치 결과를 보여주고 있다. 즉, 일정 진폭하중함수의 전체 시간크기에 대하여 시간증분의 크기가 변화하더라도 무조건적인 안정성이 보장된다고 할 수 있다.

그림 9는 막대의 자유단에서 변위해의 표준편차를 이론해

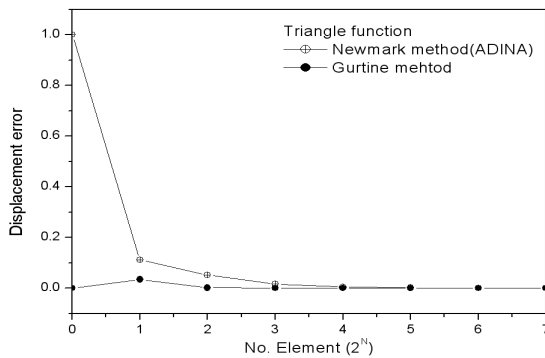


그림 8 기준유한요소의 개수에 따른 변위의 무차원화된 절대오차 (삼각형 하중함수)

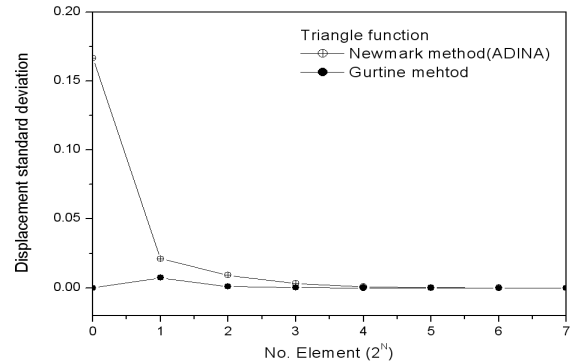


그림 9 기준유한요소의 개수에 따른 변위의 무차원화된 오차에 대한 표준편차(삼각형 하중함수)

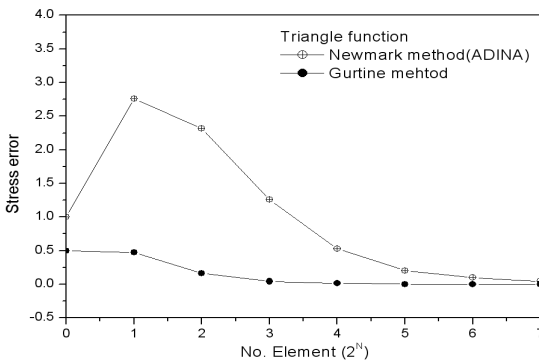


그림 10 기준유한요소의 개수에 따른 응력의 무차원화된 절대오차 (삼각형 하중함수)

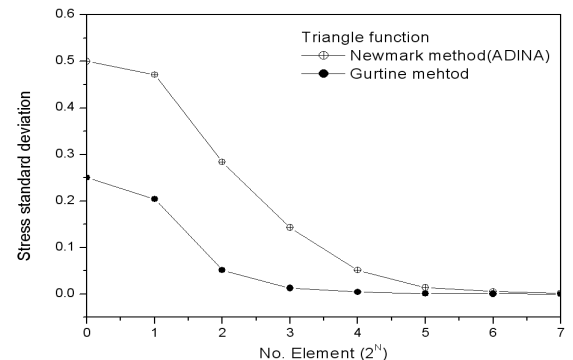


그림 11 기준유한요소의 개수에 따른 응력의 무차원화된 오차에 대한 표준편차(삼각형 하중함수)

의 함으로 무차원시켜 도시한 것이다. Newmark방법에 의한 변위해의 오차에 대한 표준편차는 $N=0$ 에서 16.67%의 최대 표준편차를 보이고 있으며, $N=5$ (유한요소가 288개) 부터는 안정적인 편차의 크기를 보이고 있다. 이에 반해, Gurtin방법에 의한 변위해의 표준편차는 전반적으로 요소의 개수에 대하여 안정적인 표준편차를 보이고 있다.

그림 10은 막대의 중앙단(B점)에서 응력해의 절대오차를 이론해의 함으로 무차원시켜 도시한 것이다. Newmark방법에 의한 응력의 절대오차는 $N=0$ 일때는 100%의 오차를 보이고 있으며, $N=1$ 에서 276%로 최대오차를 보이다가 $N=7$ 에서 약 4%의 오차로 거의 신뢰할 수 있는 해를 보이고 있다. 다시 말해, 시간증분의 크기를 적어도 $\Delta t \leq t_{cr}/128$ 까지는 설정해 주어야만 신뢰할 수 있는 응력해를 구할 수 있다. 이에 반해, Gurtin방법에 의한 응력해는 $N=0$ 인 경우는 약 50%의 오차를 보이다가 점차 감소하여 $N=3$ 부터는 오차가 약 4%로 거의 신뢰할 수 있는 해를 보이고 있다. 시간증분의 크기가 $\Delta t \leq t_{cr}/8$ 에서 신뢰할 수 있는 응력해를 구할 수 있다. 따라서, 신뢰성있는 응력해를 얻기 위한 유한요소의 크기는 상대적으로 Newmark방법에 의한 유한요소의 크기의 약 16배정도 크게할 수 있음을 알 수 있다.

그림 11은 막대의 중앙단에서의 응력해의 표준편차를 이

론해의 함으로 무차원시켜 도시한 것이다. 응력해의 최대 표준편차는 Gurtin방법은 $N=0$ 에서 23.57%, Newmark방법은 47.14%의 최대 편차를 보이고 있으며, 그 크기는 약 2배의 차이를 보이고 있다.

3.2 사인 하중함수와 계단함수

그림 12~그림 15는 1차원 막대의 자유단에서 그림 2와 같은 계단함수가 작용할 때, 막대의 자유단에서의 변위해와 중앙단에서의 응력해를 Newmark방법과 Gurtin방법에 의한 수치결과를 이론해와 함께 비교하였다. 이때 해석에 사용된 하중함수는 다음과 같다.

$$\{F(\mathbf{x}, t)\} = \{F_0(\mathbf{x})\} \tag{16}$$

여기서, $\{F_0(\mathbf{x})\}$ 은 초기 힘벡터이다.

식 (16)을 식 (3)에 대입하고 시간에 대해 적분항을 계산하면 다음과 같이 정리된다.

$$\int_0^{t_{n+1}} \{F(\mathbf{x}, \tau)\} (t_{n+1} - \tau) d\tau = \frac{t^2}{2} \{F_0(\mathbf{x})\} \tag{17}$$

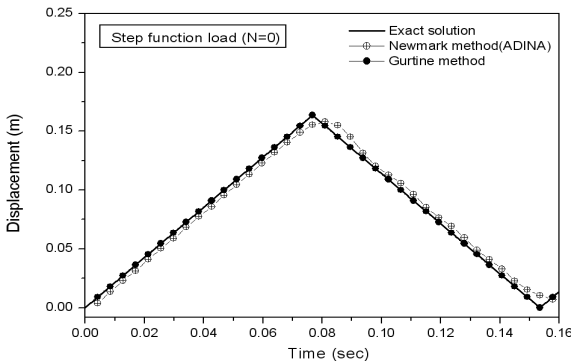


그림 12 막대의 자유단(A점)에서 시간의 경과에 따른 변위분포 (계단함수, 전체 유한요소 개수: 9개, $\Delta t = t_{cr} = 0.004264\text{sec}$)

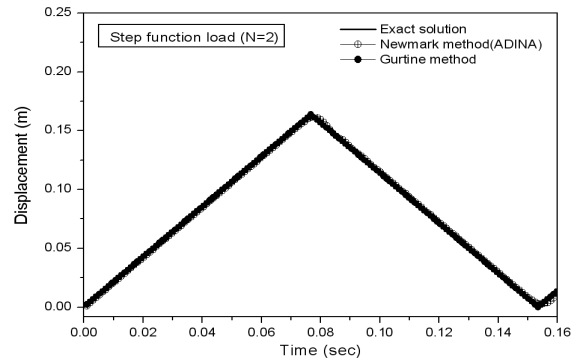


그림 13 막대의 자유단(A점)에서 시간의 경과에 따른 변위분포 (계단함수, 전체 유한요소 개수: 36개, $\Delta t = t_{cr}/4 = 0.001066\text{sec}$)

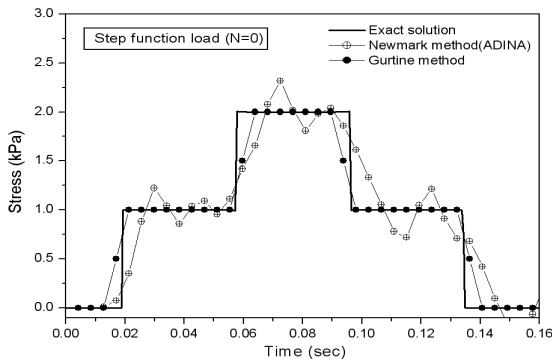


그림 14 막대의 중앙단(B점)에서 시간의 경과에 따른 응력분포 (계단함수, 전체 유한요소 개수: 9개, $\Delta t = t_{cr} = 0.004264\text{sec}$)

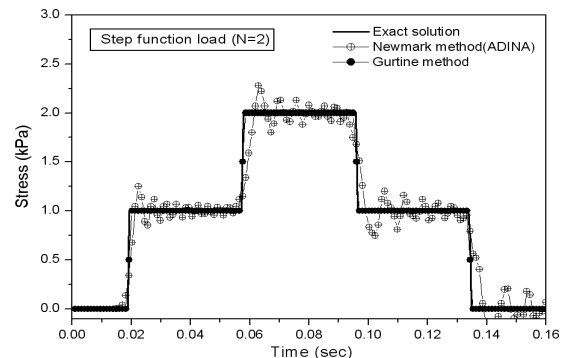


그림 15 막대의 중앙단(B점)에서 시간의 경과에 따른 응력분포 (계단함수, 전체 유한요소 개수: 36개, $\Delta t = t_{cr}/4 = 0.001066\text{sec}$)

그림 12와 그림 13은 막대를 각각 9개($N=0$)와 36개($N=2$)의 유한요소로 분할하고, 막대의 자유단에 계단함수가 작용하는 경우에 대한 변위해의 분포를 도시한 것이다. Gurtine방법은 모두 이론해와 일치하는 결과를 보여주고 있지만, Newmark방법은 일정 크기의 오차간격으로 변위해의 분포를 보이고 있다.

그림 14와 그림 15는 막대를 각각 9개($N=0$)와 36개로 유한요소로 분할하고, 막대의 자유단에서 계단함수가 작용하는 경우에 대한 응력해의 분포를 도시한 것이다. Gurtine방법은 요소의 분할 개수와 관계없이 모두 이론해와 일치하는 결과를 보여주고 있지만, Newmark방법은 이론해를 따라가고 있으나 심한 수치오차의 떨림현상을 보이고 있다. 요소의 개수가 많을수록 떨림현상은 작았으나 응력이 급변하는 곳에서 오차의 진폭이 가장 크게 발생하였다.

그림 16~그림 19는 1차원 막대의 자유단에서 그림 1(b)에서와 같은 사인하중이 일정진폭하중으로 작용할 때, 막대의 자유단에서의 변위와 중앙단에서의 응력을 Newmark방법과 Gurtin방법에 의한 수치결과를 이론해와 비교하였다. 이때 해석에 사용된 하중함수는 다음과 같다.

$$\{F(\mathbf{x},t)\} = \sin at \{F_{\max}\} \quad (18)$$

여기서, $a = \pi/t_{cr}$ 이고, $\{F_{\max}\}$ 은 사인 하중함수의 최대 힘 벡터이다.

식 (18)를 식 (3)에 대입하고 시간에 대해 적분항을 계산하면 다음과 같이 정리된다.

$$\int_0^{t_{n+1}} \{F(\mathbf{x},\tau)\} (t_{n+1} - \tau) d\tau = \frac{1}{a^2} (at - \sin at) \{F_{\max}\} \quad (19)$$

그림 16과 그림 17은 막대를 각각 9개($N=0$)와 36개($N=2$)의 유한요소로 분할하고, 막대의 자유단에 사인하중이 일정진폭하중으로 작용하는 경우에 대한 변위해의 분포를 도시한 것이다. Newmark방법은 $N=0$ 인 경우는 다음 시간 절점에서의 변위와 응력을 계산할 수 없으므로 변위와 응력은 당연히 0이 될 수밖에 없는 자명한 결과를 나타내고 있으며, $N=2$ 인 경우는 시간이력의 초기에는 이론해를 따라가고 있지만 시간 $t=18t_{cr}$ 에서부터 매우 심한 수치오차의 떨림현상을 볼 수 있다. 하지만, Gurtine방법에 의한 수치결과는

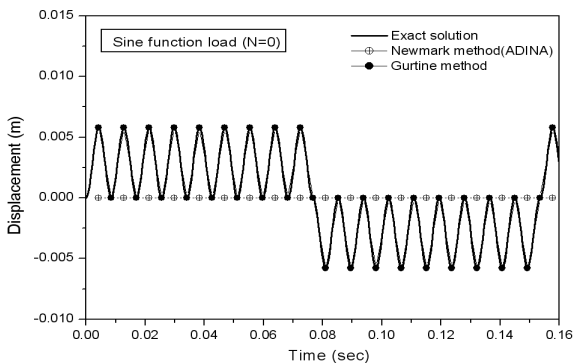


그림 16 막대의 자유단(A점)에서 시간의 경과에 따른 변위분포 (사인 하중함수, 전체 유한요소 개수: 9개, $\Delta t = t_{cr} = 0.004264\text{sec}$)

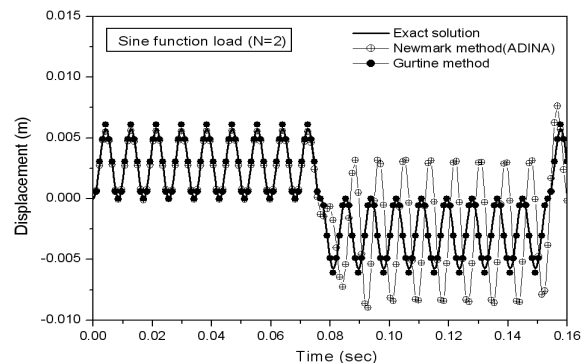


그림 17 막대의 자유단(A점)에서 시간의 경과에 따른 변위분포 (사인 하중함수, 전체 유한요소 개수: 36개, $\Delta t = t_{cr}/4 = 0.001066\text{sec}$)

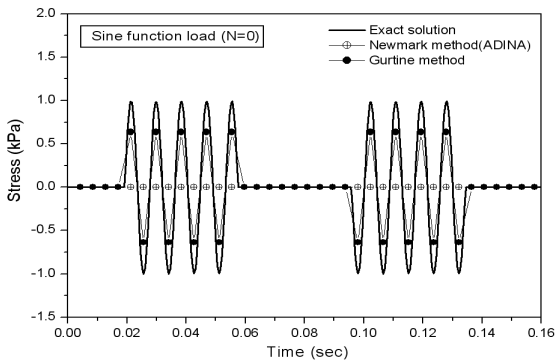


그림 18 막대의 중앙단(B점)에서 시간의 경과에 따른 응력분포 (사인 하중함수, 전체 유한요소 개수: 9개, $\Delta t = t_{cr} = 0.004264\text{sec}$)

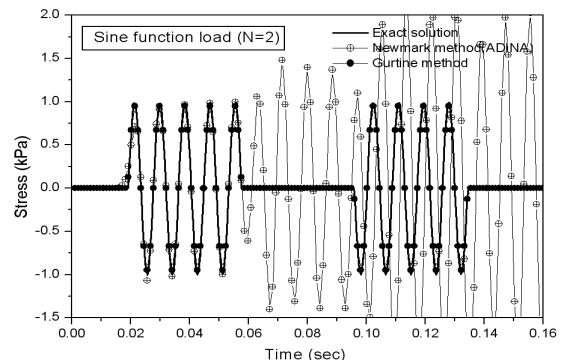


그림 19 막대의 중앙단(B점)에서 시간의 경과에 따른 응력분포 (사인 하중함수, 전체 유한요소 개수: 36개, $\Delta t = t_{cr}/4 = 0.001066\text{sec}$)

자유단에 사인함수가 일정진폭하중으로 주어진 경우에도 오차가 거의 없는 정확한 변위해를 구할 수 있다.

그림 18과 그림 19는 막대를 각각 9개($N=0$)와 36개($N=2$)의 유한요소로 분할하고, 막대의 자유단에서 사인하중이 일정진폭하중으로 작용하는 경우에 대한 응력해의 분포를 도시한 것이다. Gurtin방법에 의한 응력해는 $N=0$ 일 때 전 시간구간에 있어서 응력의 극값이 0.64kPa로 약간의 오차를 보이나 $N=2$ 에서는 전 시간구간에 있어서 이론해와 일치하는 안정적이고 신뢰할 수 있는 수치결과를 보이고 있다. Newmark방법에 의한 응력해는 $N=0$ 일 때 모든 응력값이 0kPa인 자명한 결과를 보여주고 있으며, $N=2$ 에서는 시간 이력의 초기에는 이론해를 따라가고 있지만 시간 $t=13.5t_{cr}$ 에서부터 매우 심한 수치오차의 떨림현상을 보이고 있다.

그림 20은 막대의 자유단에서 사인함수와 계단함수가 작용할 때, 막대의 자유단(A점)에서 변위해의 절대오차를 이론해의 합으로 무차원시켜 도시한 것이다. Newmark방법에 의한 변위해의 절대오차는 사인함수인 경우는 $N=0$ 일 때 100%의 절대오차를 보이다가 $N=5$ 부터 1.68%의 오차로 안정적인 변위해의 분포를 보이고 있다. 즉, 사인 일정진폭하중의 전체 시간크기에 대하여 시간증분의 크기를 적어도 $\Delta t \leq t_{cr}/32$ 까지는 설정해 주어야만 신뢰할 수 있는 변위해

를 구할 수 있다. 이에 반해, Gurtin에 의한 변위해는 $N=1$ 인 경우는 약 27%의 오차를 보이지만, 그 이외의 모든 유한요소의 개수에 대해서는 신뢰할 수 있는 결과를 보여 준다. Newmark방법에 의한 변위해의 절대오차는 계단함수인 경우는 $N=0$ 에서 6.2%로 상대적으로 작은 절대오차를 보여주고 있다. 이에 반해, Gurtin에 의한 변위해는 모든 유한요소의 개수에 대해 신뢰할 수 있는 결과를 보여 준다. 다시 말해, 일정 진폭하중함수의 전체 시간크기에 대하여 시간증분의 크기가 변화하더라도 무조건적인 안정성이 보장된다고 할 수 있다.

그림 21은 막대의 자유단에서 사인함수와 계단함수가 작용할 때, 막대의 자유단에서의 변위해의 표준편차를 이론해의 합으로 무차원시켜 도시한 것이다. Newmark방법에 의한 변위해의 편차는 사인함수인 경우는 $N=0$ 에서 23.57%로 최대 표준편차를 보이다가 $N=4$ 부터 안정적인 변위해의 표준편차를 보이고 있다. 이에 반해, Gurtin에 의한 변위해의 표준편차는 $N=1$ 에서 3.9%로 약간의 편차를 보이고 있지만 전반적으로는 모든 요소분할 개수에 대하여 안정적인 표준편차를 보이고 있다. Newmark방법에 의한 변위해의 표준편차는 계단함수인 경우는 $N=0$ 에서 1.57%이나 Gurtin방법에 의한 변위의 표준편차는 모든 유한요소의 개수에 대해 신뢰할 수

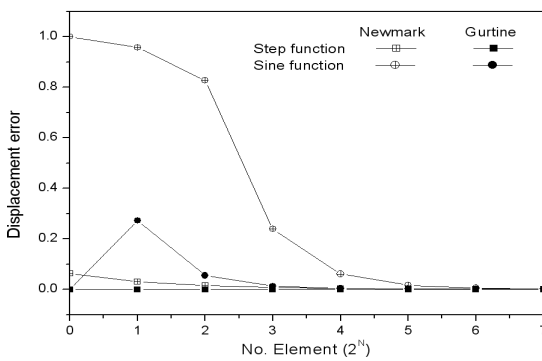


그림 20 기준유한요소의 개수에 따른 변위의 무차원화된 절대오차 (사인 하중함수, 계단함수)

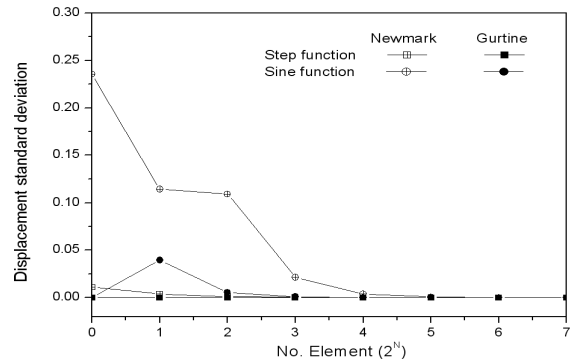


그림 21 기준유한요소의 개수에 따른 변위의 무차원화된 표준편차 (사인 하중함수, 계단함수)

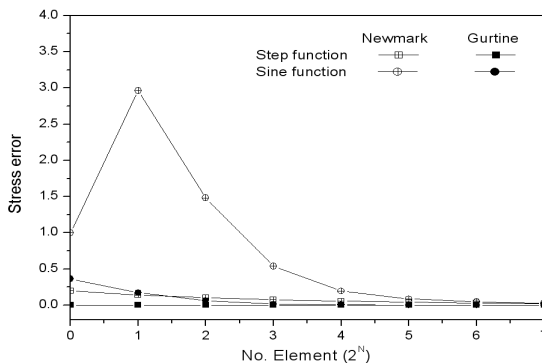


그림 22 기준유한요소의 개수에 따른 응력의 무차원화된 절대오차 (사인 하중함수, 계단함수)

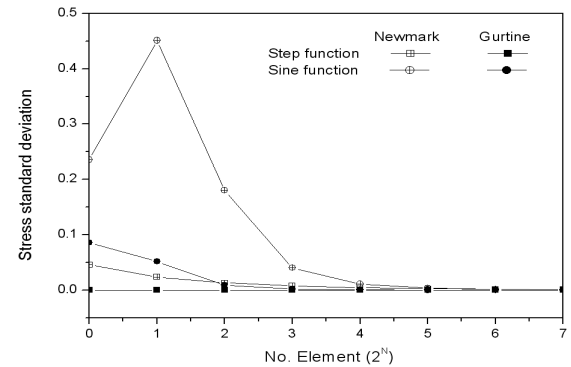


그림 23 기준유한요소의 개수에 따른 응력의 무차원화된 표준편차 (사인 하중함수, 계단함수)

있는 결과를 보여 준다.

그림 22는 막대의 자유단에서 사인함수와 계단함수가 작용할 때, 막대의 중앙단(B점)에서 응력해의 절대오차를 이론해의 함으로 무차원시켜 도시한 것이다. Newmark방법에 의한 응력의 절대오차는 사인함수인 경우는 $N=0$ 일때는 100%, $N=1$ 에서 296.56%의 최대 절대오차를 보이다가 $N=7$ 부터 2.46% 미만의 오차로 거의 신뢰할 수 있는 해를 보이고 있다. 응력해는 전체 시간크기에 대하여 시간증분의 크기를 적어도 $\Delta t \leq t_{cr}/128$ 까지는 설정해 주어야만 신뢰할 수 있는 응력해를 구할 수 있다. 이에 반해, Gurtin방법에 의한 응력의 절대오차는 $N=0$ 에서 경우는 약 36.3%의 오차를 보이다가 점차 감소하여 $N=3$ 부터는 오차가 약 1.58%로 거의 신뢰할 수 있는 해를 보이고 있다. 일정 진폭하중함수의 전체 시간크기에 대하여 시간증분의 크기를 $\Delta t \leq t_{cr}/8$ 정도라도 신뢰할 수 있는 응력해를 구할 수 있다. 신뢰성 있는 응력해를 얻기 위한 유한요소의 크기는 Newmark방법에 의한 유한요소의 크기의 약 16배만큼 크게할 수 있다. Newmark방법에 의한 응력해의 절대오차는 계단함수인 경우는 $N=0$ 에서 19.85%로 최대 절대오차를 보이고 있다. 이에 반해, Gurtin방법에 의한 응력의 절대오차는 모든 유한요소의 개수에 대해 신뢰할 수 있는 결과를 보여 준다.

그림 23은 막대의 자유단에서 사인함수와 계단함수가 작용할 때, 막대의 중앙단(B점)에서 응력해의 표준편차를 이론해의 함으로 무차원시켜 도시한 것이다. Newmark방법에 의한 응력의 표준편차는 사인함수인 경우는 $N=0$ 일때는 23.57%, $N=1$ 에서 45.11%로 최대 표준편차를 보이다가 감소하여 $N=4$ 부터 1.1%미만의 표준편차로 거의 신뢰할 수 있는 응력해를 보이고 있다. Gurtin방법에 의한 응력의 절대오차는 $N=0$ 에서 경우는 약 8.56%의 표준편차를 보이다가 점차 감소하여 $N=2$ 부터는 오차가 약 0.91%로 거의 신뢰할 수 있는 해를 분포를 보이고 있다. Newmark방법에 의한 응력의 표준편차는 계단함수인 경우는 $N=0$ 에서 4.58%이나 Gurtin방법에 의한 응력의 표준편차는 모든 유한요소의 개수에 대해 신뢰할 수 있는 결과를 보여 준다.

4. 결 론

1차원 막대의 자유단에서 여러 가지 축방향 하중을 받는 문제에 대하여 Newmark방법과 Gurtin방법에 의한 동적 유한요소방정식을 이용하여 정밀하게 수치해석을 수행, 분석하여 다음과 같은 결과들을 얻었다: (1) Gurtin방법이 Newmark방법 보다 일정진폭하중을 받는 문제에 적합한 방법이다. (2) Gurtin방법이 일정한 하중 받는 문제보다 일정

진폭하중을 받는 문제에 더 효율적인 수치방법이다.

후 기

본 연구는 금오공과대학교 학술연구비에 의하여 연구된 논문임.

참 고 문 헌

심우진, 이성희 (2001) 과도 선형 동탄성 문제의 시간영역 유한요소해석, 대한기계학회 논문집 A권, 25(4), pp.574~581.

최정훈, 김형익, 허용, 석창성, 장필수, 이창희 (2005) 반복 충격에 의한 섬유강화 복합재료의 피로수명 특성 평가, 한국정밀공학회 추계학술대회 논문집, pp.1030~1033.

ADINA R&D Inc. (2008) *ADINA Theory and Modeling Guide, Volume 1 : ADINA Solids & Structures, Version 8.5*, ADINA R&D, Inc., Watertown, MA, p.866.

Bathe, K.J. (1996) *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, p.1037.

Gurtin, M.E. (1964) Variational Principles for linear Elastodynamics, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16(1), pp.34~50.

Oden, J.T., Reddy, J.N. (1976) *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, p.309.

Tanaka, M., Chen, W. (2001) Dual Reciprocity BEM Applied to Transient Elastodynamic Problems with Differential Quadrature Method in Time, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(18-19), pp.2331~2347.

Timoshenko, S., Young, D.H., Weaver, W.JR. (1974) *Vibration Problems in Engineering(4th edn)*, John Wiley & Sons Inc, New York, p.521.

Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (1991) *Finite Element Method(4th edn)*, 2, Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity, McGraw-Hill, London, p.807.

- 논문접수일 2010년 4월 23일
- 논문심사일
 - 1차 2010년 4월 28일
 - 2차 2010년 7월 13일
- 게재확정일 2010년 7월 14일