

영역 분할기법을 이용한 포화 다공질매체의 혼합유한요소해석

The Mixed Finite Element Analysis for Porous Media using Domain Decomposition Method

이 경 재* 탁 문 호** 강 윤 식** 박 대 효†
Lee, Kyungjae Tak, Moonho Kang, Yoon-Sik Park, Taehyo

요 지

포화된 다공질매체의 수치해석에서는 일반적으로 고체영역과 유체영역을 동시에 고려한 혼합유한요소해석(Mixed Finite Element Analysis)이 쓰인다. 여기서 고체영역과 유체영역에서의 변수를 계산하기 위해서는 직접법(Direct Method) 또는 반복법(Iterative method)을 사용할 수 있으나, 각 구성물질의 상이한 물리적 특성 때문에 수치안정성을 확보하기 위해서는 대부분 스테거드 방법(Staggered method)이 제안된다. 본 논문에서는 수치안정성을 높인 스테거드 방법에서 영역 분할기법 중 하나인 FETI(Finite Element Tearing and Interconnecting)기법을 고체영역에 접목시켜 수치효율성을 증대시키는 방법이 제안되었다. 고체영역에서 라그랑지 승수와 Conjugated Gradient Method를 이용해 영역 분할이 진행되고 MPI(Message Passing Interface) 라이브러리를 사용하여 수치 효율성을 검증하였다.

핵심용어 : 다공질매체, 스테거드 방법, 영역 분할기법, 혼합유한요소

Abstract

The mixed finite element analysis is the most widely used method for saturated porous media. Generally, in this method, direct method and iterative method are proposed to obtain unknown variable, however, the iterative method is recommended because the method provide numerical stability and accuracy under the material properties for solid and fluid are different. In this paper, we introduce staggered method which has strong numerical stability, and FETI(Finite Element Tearing and Interconnecting) which is one of decomposition methods are applied into the method in order to obtain numerical efficiency. In which, Lagrange Multipliers and conjugated gradient method to solve decomposed domain are proposed, and then, the proposed method is verified numerical efficiency by point to point MPI(Message Passing Interface) library.

Keywords : porous media, staggered method, decomposition method, mixed finite element method

1. 서 론

다공질매체는 고체, 액체, 기체등과 같은 구성 물질로 이루어져 있는 다상의 재료이다. 그래서 그 구성 물질들은 서로 다른 물리적 특성을 가지고 있어 일반적인 고체이론으로 해석하기에는 많은 어려움이 따른다. 다공질매체의 이론식은 1941년 Biot에 의해 처음 소개되었다. 그는 앞서 연구된 Terzaghi(1925)의 지반압밀이론을 연속체 역학적 개념을 도입한 Poroelasticity 이론을 통하여 3차원 지배방정식을

제안하였다. Biot이 제안한 이론은 현재까지 포화된 다공질 매체 해석에 대부분 사용되고 있으며, 1차원 해석에서는 Terzaghi가 제안한 압밀이론 정해와 거의 일치한다.

지배방정식을 이용한 Biot의 수치해석 모델은 고체와 유체의 거동을 동시에 고려해야 하기 때문에 하이브리드 요소를 사용한 유한요소방법이 많이 연구되어 왔다. Zienkiewicz 등(1980)은 변위, 간극수압의 거동을 위한 지배방정식을 정식화 하고 혼합유한요소법을 이용하여 압밀해석에 적용하여 왔다. 그 후, Borja(1986), Voyiadjis와 Abu-Farsakh(1997)

† 책임저자, 중신회원 · 한양대학교 건설환경공학과 교수
Tel: 02-2220-0321 ; Fax: 02-2220-4322
E-mail: cepark@hanyang.ac.kr

* 한양대학교 건설환경공학과 석사과정

** 한양대학교 건설환경공학과 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2010년 10월 30일까지 본 학회에 보내주 시면 2010년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

Park 등(2005a; 2005b; 2005c)에 의해 혼합유한요소해석은 그 범위가 지반역학 분야에서 고체역학 분야로 확장되어 왔다.

그러나 이러한 혼합유한요소 해석방법에는 선형방정식을 해석함에 있어서 직접법(Direct Method 또는 Monolithic)의 사용은 다공질매체 내에서의 고체영역과 액체영역의 형상함수 차수가 다르기 때문에 고체와 액체영역에서의 연속성 문제가 생겨나게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해 혼합유한요소해석에서는 방정식에서 요구되는 차수에 맞는 하이브리드 요소를 사용하였다. 그러나 다공질매체 내에서 고체가 비 압축이고 유체의 흐름이 매우 느리다고 가정(비 투과성)한다면 해석진행에 있어서 요소 잠금(Element Locking)현상이 발생하며 하이브리드 요소 차수의 선택폭이 좁아지는 단점을 갖고 있다. 이러한 문제점의 해결을 위해서는 요소가 Patch Test를 통과하거나 Baduska-Brezzi Condition(Baduska 1978; Zienkiewicz 등, 2000) 이 만족되어야 한다. 직접법에서 나타나는 이러한 문제점들을 해결하기 위해 스테저드 방법이 제안되었다. 최근 Park and Tak(2010)은 동차수 요소와 스테저드 방법을 사용한 비 압축, 비 투과성 포화 다공질매체를 해석하였는데, 1차원 압밀이론과 2차원 압밀이론에 의한 결과에 매우 근접한 결과를 얻었다. 그러나 그들의 방법에서는 스테저드 방법에 하나이상의 반복계산을 거쳐야 하기 때문에 수치효율성 저하가 발생하게 된다. 유한요소해석에서의 수치적 효율성을 위하여 이준성 등(2009)은 영역 분할기법을 도입하여 해석한 바 있다. 본 논문에서는 Park and Tak(2010)이 제안한 비 압축, 비 투과성 포화 다공질매체 해석 기법에 수치적 효율성을 위한 영역 분할기법 중 하나인 FETI 기법 접목방법이 제안된다.

Farhat(1991)에 의해 처음 소개된 FETI 기법은 병렬 해석을 하기 위한 효과적인 영역 분할기법이다. 주어지는 공간상의 도메인은 겹쳐지지 않는 여러 개의 하위 도메인으로 나누어지고 기본적인 하위 도메인의 해석은 직접법 또는 반복법을 통해 이루어진다. 하위 도메인끼리의 연속성은 하위 도메인 사이에 라그랑지 승수(Lagrange Multipliers)를 통하여 해석된다. 여기서, 라그랑지 승수를 얻을 수 있는 가장 효과적인 방법은 PCPG(Preconditioned Conjugate Projected Gradient) 알고리즘이다.

지금까지의 다공질매체 해석 연구에서는 영역 분할기법의 접목이 미비하였다. 본 논문에서는 스테저드 방법과 FETI 기법의 접목을 통하여 포화된 다공질매체 해석이 진행되며 리눅스 클러스터 시스템에서 MPI 점대점 통신을 통한 제안된 방법의 수치효율성이 검증된다.

2. 지배방정식

다공질매체의 지배 방정식은 Biot(1941)에 의해 처음 유도되었다. 본 논문에서는 유체의 흐름을 위한 질량평형방정식(Mass Balance Equation)과 변형을 위한 운동량평형방정식(Momentum Balance Equation)으로 나타내며 유체의 흐름과 고체영역은 거시적 관점에서 선형거동을 한다고 가정한다.

2.1 질량평형방정식

포화된 다공질매체 내에서 액체영역의 질량평형방정식을 유도할 경우 고체영역을 기준으로 액체입자의 움직임을 상대속도개념으로 표현한다. 포화된 다공질매체 내에서의 유체입자 움직임만을 고려하고 유체의 연속방정식을 적용하여 나타내면 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{D^s n \rho^f(x,t)}{Dt} + \nabla \cdot (n \rho^f(x,t) \mathbf{v}^{fs}(x,t)) + n \rho^f(x,t) \nabla \cdot \mathbf{v}^s(x,t) = 0 \quad (1)$$

여기서, 위첨자 s 와 f 는 각각 고체와 유체를 나타내고 x 는 현재좌표, t 는 시간, n 은 간극률, 그리고 $\rho^f(x,t)$ 는 유체입자의 밀도, $\mathbf{v}^{fs}(x,t)$ 는 고체영역에 대한 액체입자의 상대속도, $\mathbf{v}^s(x,t)$ 는 고체입자의 속도를 나타낸다. 위의 식 (1)은 유체영역만 고려된 포화 다공질매체의 질량평형방정식이다. 한편 고체영역의 연속방정식은 식 (2)와 같이 결정 되어진다.

$$\frac{D^s(1-n)\rho^s(x,t)}{Dt} + (1-n)\rho^s(x,t) \nabla \cdot \mathbf{v}^s(x,t) = 0 \quad (2)$$

여기서, 위첨자 s 는 고체영역, D 는 물질시간도함수, 그리고 $\rho^s(x,t)$ 는 고체영역의 밀도이다.

식 (1)에 식 (2)를 대입하면 포화 다공질매체 전체영역의 지배방정식을 얻을 수 있고, 이 지배방정식에서 고체와 유체 밀도의 물질시간도함수(material time derivative), 구성방정식을 대입하여 나타내면 식 (3), 식 (4)와 같다.

$$\frac{D^s(1-n)\rho^s(x,t)}{Dt} = \frac{\rho^s(x,t)}{1-n} - [(\alpha-n) \frac{1}{K^s} \frac{D^s p^s(x,t)}{Dt} - \beta^s (\alpha-n) \frac{D^s T(x,t)}{Dt} - (1-\alpha) \nabla \cdot \mathbf{v}^s(x,t)] \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho^f(x,t)} \frac{D^s \rho^f(x,t)}{Dt} = \frac{1}{K^f} \frac{D^s \rho^f(x,t)}{Dt} \quad (4)$$

여기서, α 는 Biot 상수(1957)이고, $p^s(x,t)$ 는 고체영역의 압력, β^s 는 온도확장계수, K^s 는 고체입자의 체적 탄성률, $T(x,t)$ 는 온도, K^f 는 유체입자의 체적 탄성률이다.

그리고 완전히 포화된 다공질매체의 경우, 고체와 유체입자의 상대속도를 Darcy 법칙에 적용하여 나타내면 식 (5)와 같다.

$$\left(\frac{\alpha - n}{K^s} + \frac{n}{K^f} \right) \frac{\partial p^f(x,t)}{\partial t} + \alpha \nabla \cdot \mathbf{v}^s(x,t) + \frac{1}{\rho^f(x,t)} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{k}(x,t)}{\mu^f} (-\nabla p^f(x,t) + \rho^f(x,t) \mathbf{g}(t)) \right) = 0 \quad (5)$$

여기서, $\mathbf{k}(x,t)$ 는 투수텐서이고, μ^f 는 동점성계수, $\mathbf{g}(t)$ 는 중력 벡터이다.

2.2 운동량평형방정식

다공질매체에 대한 운동량평형방정식은 고체, 액체 영역을 포함하는 전 영역에 대하여 표현된다. 포화 다공질매체가 연속체로 가정 될 경우, 연속체의 평형방정식은 아래의 식 (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(x,t) + \rho(x,t) \mathbf{b}(x,t) = 0 \quad (6)$$

여기서, $\boldsymbol{\sigma}(x,t)$ 는 전 응력 텐서, $\rho(x,y)$ 는 전 영역 밀도, 그리고 $\mathbf{b}(x,t)$ 는 체적력 벡터이다. 전 응력 텐서를 Cauchy 응력 텐서 $\boldsymbol{\sigma}''(x,t)$ 와 간극 수압 $p^f(x,t)$ 와의 관계로 나타내어 주면 식 (6)은 포화 다공질매체의 운동량평형방정식으로 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}''(x,t) + \mathbf{I} p^f(x,t)) + \rho(x,t) \mathbf{b}(x,t) = 0 \quad (7)$$

2.3 초기조건, 경계조건

고체와 액체의 전체 영역에 대한 초기조건은 식 (8)과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^s(x,0) &= \mathbf{u}_0^s(X) \\ p^f(x,0) &= p_0^f(X) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $\mathbf{u}^s(x,0)$ 는 변위벡터이고, \mathbf{u}_0^s 와 p_0^f 는 초기변위벡

터와 초기간극수압이다. X 는 초기좌표를 나타낸다.

포화 다공질매체에서 고체와 액체영역의 경계조건은 Dirichlet 조건과 Neumann 조건으로 아래와 같이 구분할 수 있다.

Dirichlet 조건

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^s(x,0) &= \overline{\mathbf{u}}^s(x,0) \\ p^f(x,0) &= \overline{p}^f(x,0) \end{aligned} \quad (9)$$

Neumann 조건

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(x,t) \cdot \mathbf{n} &= \overline{\mathbf{t}}(x,t) \\ \left(\frac{\mathbf{k}(x,t)}{\mu^f} (-\nabla p^f(x,t) + \rho^f(x,t) \mathbf{g}(t)) \right) \cdot \mathbf{n} &= \frac{\overline{q}(x,t)}{\rho^f(x,t)} \end{aligned} \quad (10)$$

위의 식에서 \mathbf{n} 은 노멀(normal)벡터, $\overline{\mathbf{t}}(x,t)$ 는 경계(traction)벡터, $\overline{q}(x,t)$ 는 유체에 대한 mass flux를 나타낸다.

위에서 소개된 초기조건과 경계조건을 사용하여 weak form 형태로 변환하고 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{C}_2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^s}{\partial t} + \mathbf{S} \frac{\partial \tilde{p}^f}{\partial t} + \mathbf{D} \tilde{p}^f = \mathbf{f}^f \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_s \tilde{\mathbf{u}}^s - \mathbf{C}_1 \tilde{p}^f = \mathbf{f}^s \quad (12)$$

여기서, 델트(\sim)는 근사치 변수이고, \mathbf{K}_s 는 강성행렬, \mathbf{D} 는 투과행렬, \mathbf{S} 는 압축행렬, \mathbf{C} 는 커플행렬을 나타낸다.

2.4 스테저드 방법(Staggered Method)

포화 다공질매체 해석에 있어서 가장 중요하게 고려할 부분은 수치적 안정성이다. 본 논문에서 포화 다공질매체의 수치해석은 거시적 관점에서의 고체와 액체의 이동을 동시에 고려한 혼합유한요소방법(Mixed Finite Element Method)이 사용되고 동차선형요소가 적용된다.

그러나 비압축, 비투과성 다공질매체의 경우 동차선형요소 형상함수들이 같다면 식 (11)과 식 (12)가 조합된 식은 연속조건이 만족되지 않는다. 고체의 형상함수는 C_0 연속이지만 유체의 형상함수는 C_{-1} 연속이기 때문에 수치 해석적 불안정성을 내포한다.

Park and Tak(2010)은 이러한 문제점을 해결하기위해 새로운 스테저드 방법을 제안하였다. 제안된 스테저드 방법은 다중시간단계, 요소재배열단계를 반복단계를 통해 수치적 불안정성을 해결하였다.

식 (12)와 식 (11)을 스테저드 방법으로 나타내기 위해 변위와 간극수압으로 재배열하고 시간해석을 위해 Belytschko

등(1979)이 개발한 다중시간단계를 접목하면 식 (13)과 식 (14)로 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^s(t_1) = \mathbf{K}_{\mathbf{T},n+1}^{-1} \{ \mathbf{f}_{n+1}^s + \mathbf{C}_{1,n+1} \tilde{\mathbf{p}}_{n+1}^s(t_2) \} \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{p}}_{n+1}^f(t_2) = \left[\mathbf{D}_{n+1} + \frac{1}{\Delta t_{2,n+1}} \mathbf{S}_{n+1} \right]^{-1} \left[\mathbf{f}_{n+1}^f + \frac{1}{\Delta t_{2,n+1}} \mathbf{S}_{n+1} \tilde{\mathbf{p}}_{n+1}^f(t_2) + \frac{1}{\Delta t_{1,n+1}} (\mathbf{C}_{2,n+1} (\tilde{\mathbf{u}}_n^s(t_1) - \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^s(t_1))) \right] \quad (14)$$

여기서, \mathbf{u}_s 는 변위, \mathbf{p}^f 는 간극수압, $\Delta t_1, \Delta t_2$ 는 각각 변위와 간극수압의 시간 증가량을 나타낸다.

식 (13)과 식 (14)는 수치적 안정성을 만족하지만 영역마다 다른 시간간격이 적용되기 때문에 부정확한 결과 값을 얻는다. 즉 시간에 따른 변위와 시간에 따른 간극수압의 차이는 동시간 간격 해석과 다른 결과 값을 나타낸다. 그러므로 요소재배열과 반복단계를 통하여 결과 값의 정확성을 높여야 한다. 임의의 mesh 좌표를 χ 라고 가정하면 재배열된 요소의 변위는 형상함수를 이용하여 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^s(x, t_1) = \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^s(x, t_1) + \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^r(\chi, t_1) \quad (15)$$

여기서, 아래첨자 i 는 반복계산 횟수로 정의 된다.

가정한 임의의 좌표 χ 는 공간좌표 x 와 같은 평형조건을 만족하기위해 반복계산 단계를 표현하면 식 (14)는 최종적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{p}}_{n+(i+2)}^f(t_2) = \left[\mathbf{D}_{n+(i+2)} + \frac{1}{\Delta t_{2,n+(i+2)}} \mathbf{S}_{n+(i+2)} \right]^{-1} \left[\mathbf{f}_{n+(i+2)}^f + \frac{1}{\Delta t_{1,n+(i+2)}} (\mathbf{C}_{2,n+(i+2)} (\tilde{\mathbf{u}}_n^s(t_1) - \tilde{\mathbf{u}}_{n+(i+1)}^s(t_1) + \tilde{\mathbf{u}}_n^s(t_1) - \tilde{\mathbf{u}}_{n+(i+2)}^s(t_1))) + \frac{1}{\Delta t_{2,n+(i+2)}} \mathbf{S}_{n+(i+2)} \tilde{\mathbf{p}}_{n+(i+1)}^f(t_2) \right] \quad (16)$$

3. FETI 기법

FETI 기법은 Farhat(1991)의해 제안된 영역 분할기법으로 이산화된 미분방정식을 풀기위해 개발되었다. 기존의 영역 분할기법에서는 영역의 경계에서의 연속성을 직접적으로 구현하였지만 FETI 기법에서는 라그랑지 승수(Lagrange Multiplier)

를 적용하여 간접적으로 풀고 있다. 다음은 고체에 대한 FETI 기법을 설명하고자 한다.

3.1 FETI 기법

영역 Ω 에서 힘의 평형방정식은 식 (17)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (17)$$

여기서, \mathbf{K} 는 강성행렬, \mathbf{u} 는 변위 벡터 그리고 \mathbf{f} 는 외력 벡터이다.

전체 영역 Ω 의 평형방정식 (17)은 분할된 각각의 하위도메인으로 나타낼 수 있다. 하위도메인 평형방정식의 합은 경계면에서 변위는 같아야 한다는 조건과 함께 라그랑지 승수를 사용한 평형방정식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K}^s \mathbf{u}^s = \mathbf{f}^s - \mathbf{B}^{sT} \lambda, \quad (s = 1, \dots, n) \quad (18)$$

$$\sum_{s=1}^n \mathbf{B}^s \mathbf{u}^s = 0$$

여기서, 위첨자 T 는 전치행렬, λ 는 라그랑지 승수 그리고 \mathbf{B} 는 Boolean 행렬로 영역사이의 적합조건을 나타낸다.

일반적으로 전체의 도메인을 여러 개의 하위도메인으로 나누고 그 중 경계조건이 없는 경우 floating 도메인이 발생하게 되는데 특이강성행렬(singular stiffness matrix) 성질을 갖는다. 그러므로 경계조건이 있는 영역과 경계조건이 없는 영역을 변위에 대해 나누어 정리하면 각각 식 (19), 식 (20)과 같다.

$$\mathbf{u}^s = \mathbf{K}^{s-1} (\mathbf{f}^s - \mathbf{B}^{sT} \lambda) \quad (19)$$

$$\mathbf{u}^s = \mathbf{K}^{s+} (\mathbf{f}^s - \mathbf{B}^{sT} \lambda) + \mathbf{R}^s \alpha^s \quad (20)$$

여기서, \mathbf{K}^{s+} 는 pseudo-inverse 행렬, \mathbf{R} 은 \mathbf{K} 행렬의 null space 기저를 나타낸다.

위의 식 (18), (19), (20)을 조합하여 전체의 system equation으로 나타내어 주면 아래의 식 (21)과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ -\mathbf{G}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ -\mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (21)$$

여기서,

$$\mathbf{F} = \sum_{s=1}^{n_s} \mathbf{B}^s \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}^{sT}$$

표 1 PCPG 알고리즘

<p>Initialization</p> $\lambda_0 = G(G^T G)^{-1} e$ $r_0 = d - F_I \lambda_0$ <p>Iterations $n=1, 2, \dots$ until convergence</p> $w_{n-1} = P r_{n-1} \quad (\text{projected})$ $z_{n-1} = \overline{F}_I^{-1} w_{n-1} \quad (\text{pre condition})$ $y_{n-1} = P z_{n-1} \quad (\text{re-projected})$ $\beta_n = \frac{y_{n-1}^T w_{n-1}}{y_{n-1}^T w_{n-2}} \quad (\beta_1 = 0)$ $p_n = y_{n-1} + \beta_n p_{n-1} \quad (p_1 = y_0)$ $\alpha_n = \frac{y_{n-1}^T w_{n-1}}{p_n^T F_I p_n}$ $\lambda_n = \lambda_{n-1} + \alpha_n p_n$ $r_n = r_{n-1} - \alpha_n F_I p_n$

$$G = [B^1 R^1 \dots B^{n_f} R^{n_f}]$$

$$a = [a^1 \dots a^{n_f}]^T$$

$$d = \sum_{s=1}^{n_s} B^s K^{s-1} f^s$$

$$e = [f^1 R^1 \dots f^{n_f} R^{n_f}]^T$$

위의 system equation을 풀기 위한 적합한 방법으로는 PCPG(Preconditioned Conjugate Projected Gradient) 알고리즘이 사용 되어진다. PCPG 알고리즘은 CG(Conjugate Gradient) 알고리즘에서 확장된 반복계산법을 통하여 최적화된 값에 수렴해가는 알고리즘인데, PCPG 알고리즘은 CG 알고리즘에 선조건(Precondition)과 프로젝터(Projector) 값을 적용함으로써 기존의 알고리즘보다 빠르게 수렴하는 반복계산법이다. PCPG 알고리즘은 orthogonal projector P 가 적용되어 반복계산이 이루어진다. orthogonal projector P 는 식 (22)와 같다.

$$P = I - G(G^T G)^{-1} G^T \tag{22}$$

여기서, 위첨자 T 는 전치행렬을 나타낸다.

식 (21)을 풀기 위한 PCPG 알고리즘은 표 1과 같은 순서로 진행 되어진다.

4. 스테거드 방법과 FETI 기법의 적용

앞에서 소개되었던 Park and Tak(2010)이 제안한 스테거드 방법에서는 수치적 효율성이 높지 않으므로 수치적 효율성의 향상을 위해 FETI 기법을 적용하였다.

다공질매체에 대한 스테거드 방법에서는 식 (13)에서 변

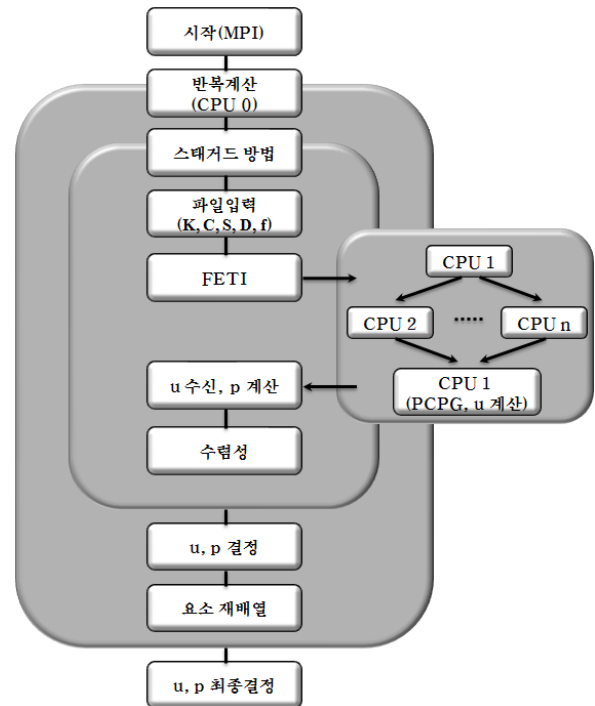


그림 1 스테거드 방법의 병렬 해석 절차

위가 계산된 후 식 (16)을 통해 간극수압이 계산된다. 그러나 하중을 통하여 다공질매체의 변형이 발생할 때 변위의 계산시간이 간극수압의 계산시간보다 상대적으로 길다. 특히 고체영역이 재료비선형이나 기하학적 비선형으로 계산될 시에는 시간 차이는 크게 발생한다. 그러므로 본 연구에서는 고체영역에서만 FETI 기법을 적용하였으며, 그 효율성에 대해 검증된다. 고체영역에 관한 영역분할을 수행하면 식 (21)에서 d 벡터와 e 벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d = \sum_{s=1}^{n_s} (B^s K^{s-1} (f^s + C^s p^s))$$

$$e = [(f^1 R^1 + C^1 p^1), \dots, (f^{n_f} R^{n_f} + C^{n_f} p^{n_f})]^T \tag{23}$$

식 (23)과 스테거드 방법, MPI 라이브러리를 이용한 병렬 해석 절차는 그림 1과 같이 나타낼 수 있다.

4.1 MPI 통신

그림 1에서 보는 바와 같이 스테거드 방법과 FETI 기법은 MPI 통신규약에 의해 진행된다. 프로그램에서는 시작과 더불어 MPI 라이브러리가 호출되고 병렬 해석을 위한 CPU가 할당된다. 여기서 제안한 스테거드 방법의 필요 CPU 개수는 영역분할 개수에 대한 CPU + 스테거드 방법 1 CPU

+ PCPG 알고리즘, 집합 및 전송 1 CPU이다. 일반적인 MPI 라이브러리에서는 효율적이고 통신간 교차를 없애기 위해 논블록킹통신(MPI_Isend, MPI_Irecv 등)과 집합통신(MPI_Scatter, MPI_Reduce 등)을 사용하지만 본 스테거드 방법에서는 변위계산 후 간극수압 계산이 순차적으로 이루어지는 구조로 되어 있으므로 MPI 라이브러리 중 가장 기본인 MPI_Send와 MPI_Recv(블록킹통신)를 통한 점대점 통신 규약을 사용한다.

4.2 스테거드 방법(CPU 0)

스테거드 방법에서는 CPU 0가 파일 입력과 FETI 기법의 모듈로의 데이터 송수신, 간극수압 계산, 요소재배열을 통한 결과 정확성 검증을 담당한다. FETI 기법의 모듈로의 데이터는 입력된 노드 좌표, K, C, S, D 행렬과 f 벡터가 송신되며 FETI 기법으로부터 계산되어진 변위를 수신 받는다. 그리고 수신된 변위를 이용하여 간극수압이 계산되는 절차를 거친다. 마지막으로 수렴성 검증을 통하여 스테거드 절차에서의 반복계산 여부를 판단하고 변위와 간극수압을 결정한다. 그러나 본 스테거드 방법에서 계산된 변위와 간극수압은 다중시간간격이 적용된 평형상태에서의 결과 값으로 정확성 판단 여부는 요소재배열과 반복계산을 거쳐 평가된다.

4.3 FETI 기법(CPU 1~CPU n)

FETI 기법에서는 식 (21)을 계산하고 변위를 계산하기 위해 병렬 해석이 도입된다. 병렬 해석은 식 (21)과 식 (23)에서 영역합계들로 표현된 F 와 d 가 계산된다. 여기서 각 CPU 별 역행렬과 의사역행렬(pseudo-inverse)이 얻어진다. 이 때 의사역행렬은 SVD(Singular Value Decomposition)를 통해 얻어지며 식 (21)에서의 nullspace 기저 R 또한 계산되어진다. 그리고 CPU1에서는 표 1에서 소개되어진 PCPG 알고리즘을 통하여 라그랑지 승수 λ 가 계산되고, 식 (21)을 이용하여 α 값이 계산된다. 최종적으로 식 (19)와 식 (20)을 통한 각 영역에서의 변위를 계산하고 스테거드 방법으로 변위벡터를 MPI_Send 통신을 이용해 전송한다.

5. 수치검증

위에서 소개되어진 FETI 기법을 적용한 스테거드 방법의 수치적 효율성을 검증하기 위해 다공질매체에 대한 유한요소 해석 프로그램과 영역 분할된 2차원 모델이 사용되어졌다(그림 2 참조).

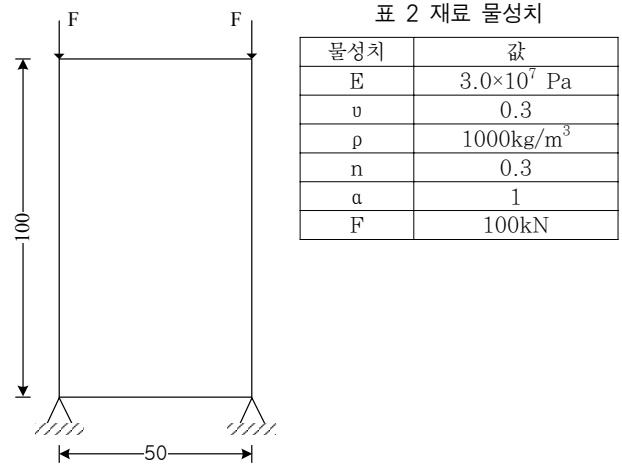


그림 2 수치해석 모델

5.1 시스템 구성

다공질매체에 대한 병렬해석을 하기 위해 본 연구에서는 10 노드의 Neahlem CPU(2.4GHz, 8Core)와 QDR급 전송속도의 네트워크 장비를 구성하고 있는 리눅스 클러스터 시스템을 사용하였고 MPI 통신을 위하여 MPICH2(2010)에서 제공하는 라이브러리와 GCC 컴파일러(2010)가 사용되었다.

5.2 2차원의 포화된 다공질매체 모델

본 수치 실험에서는 가로 50cm, 세로 100cm크기의 다공질매체 모델이 사용된다. 수치 해석에 사용된 다공질매체는 완전 포화되었다고 가정하고 4절점 요소라는 가정아래 해석이 진행되었다.

먼저, 스테거드 방법과 여러 개의 하위도메인으로 분할하였을 때의 수치 정확성을 위해 간극수압을 비교하였다. 기존

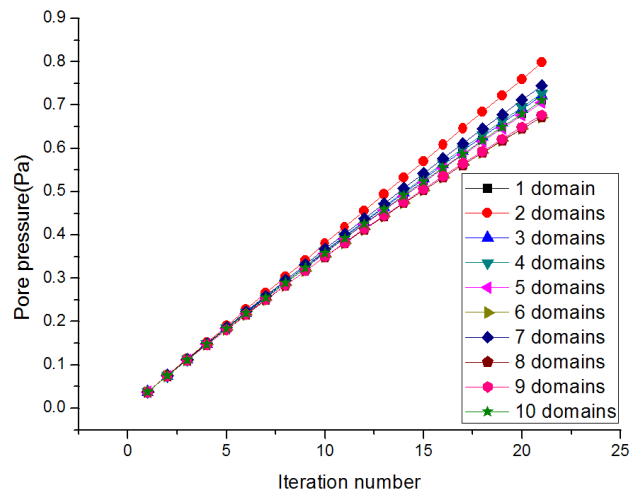


그림 3 스테거드 방법과 영역 분할기법이 적용된 스테거드 방법의 간극수압 비교

의 스테거드 방법의 간극수압을 1개의 도메인에서 해석하였을 때부터 10개까지의 도메인을 나누어 해석한 간극수압의 결과 값은 0.1 내외로 오차범위에 만족하는 값이다(그림 3). 따라서 본 연구에서는 수치적 정확성에 대하여 만족하는 다공질매체의 모델에 대하여 수치적 효율성만을 고려하는 해석을 수행하였다.

5.3 병렬해석검증

해석은 2차원 동차선형 다공질 매체의 요소개수를 100,

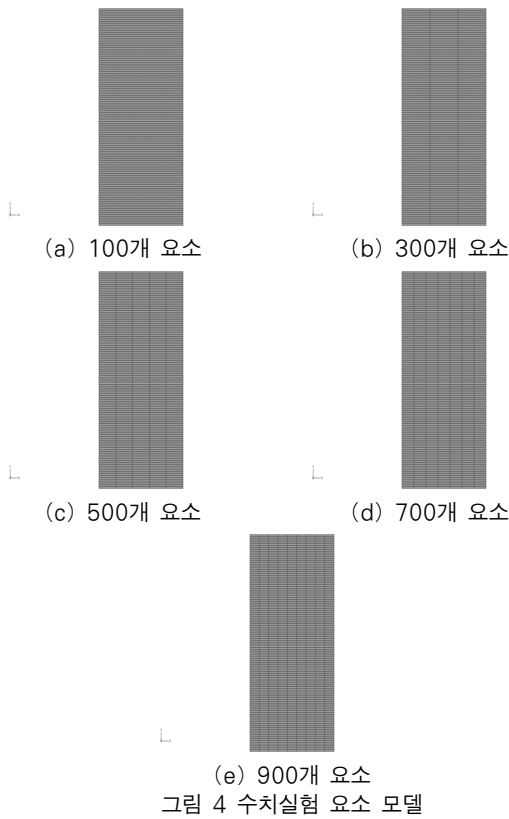


그림 4 수치실험 요소 모델

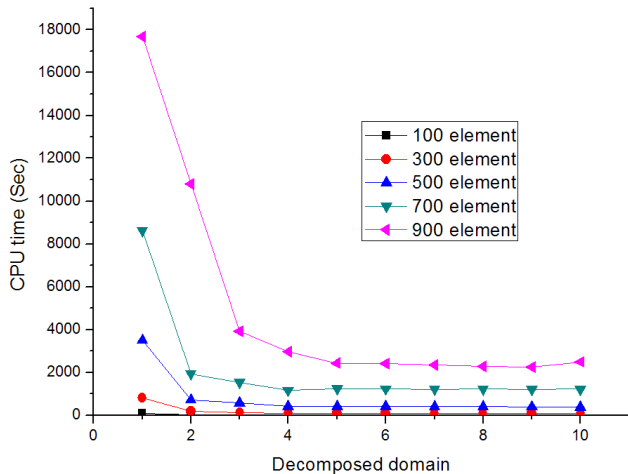


그림 5 영역 개수별 해석시간

표 3 요소 개수에 따른 하위도메인별 해석시간(단위: sec)

mesh domain	100	300	500	700	900
1	94.933	826.51	3509.6	8605.4	17690
2	29.678	182.02	726.09	1930.0	10809
3	23.516	120.78	573.55	1547.4	3927.3
4	17.354	104.50	421.02	1164.9	2977.4
5	16.087	99.520	419.85	1246.0	2434.4
6	15.986	97.619	413.25	1232.8	2424.2
7	15.885	97.146	406.65	1219.6	2361.2
8	15.785	96.672	400.06	1228.1	2298.1
9	15.684	96.199	393.46	1215.1	2235.1
10	15.583	95.726	386.86	1223.7	2491.9

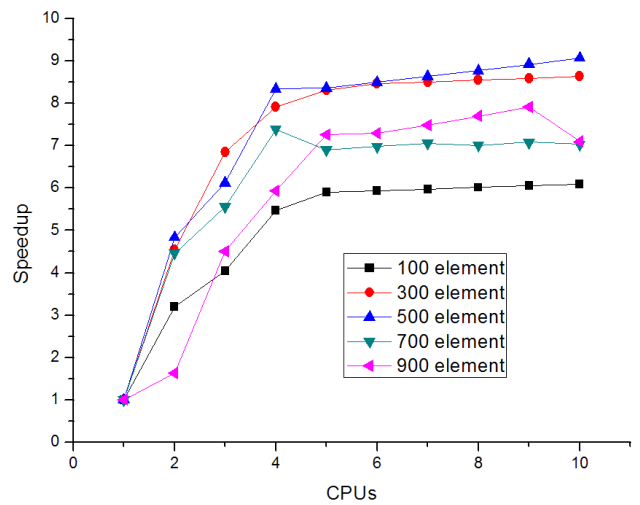


그림 6 CPU 개수별 Speedup

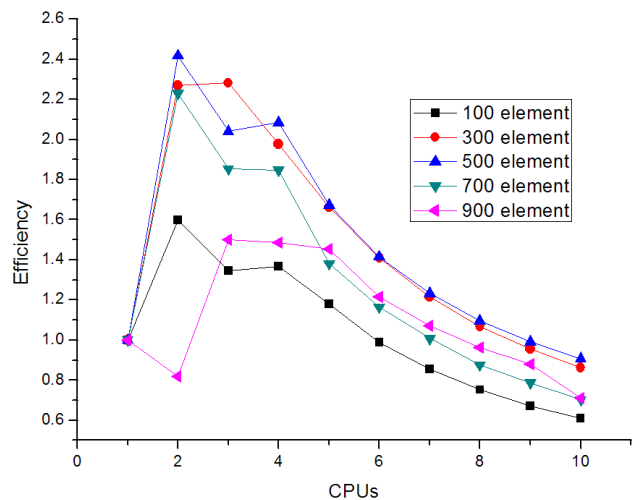


그림 7 CPU 개수별 Efficiency

300, 500, 700, 900로(그림 4) 나누고 각 요소개수 별 영역분할을 1에서부터 10까지 나누었다. 수치효율성을 검증하기 위하여 프로그램 시작부터 검증된 결과가 나올 때까지 시간을 측정하였다.

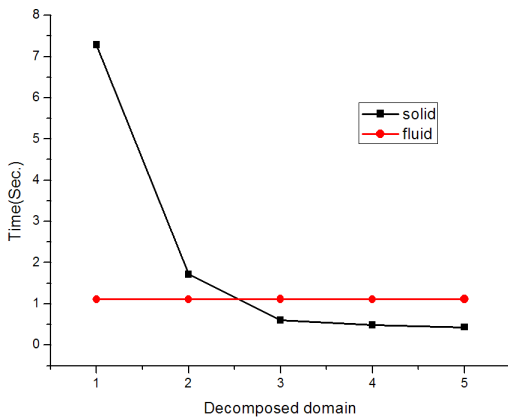
그림 5는 영역 개수에 따른 변위와 간극수압 계산을 시간에 대한 결과로 나타내고 있다. 요소의 개수가 클수록 영역 분할에 따른 효과는 크게 나타나고 있다. 하지만 영역개수가 4개 이후로는 간극수압의 계산에 걸리는 시간에 의해 차이가 근소하게 나타난다. 하위도메인에 따른 해석시간은 표 3과 같다.

여기서 병렬해석의 효율성을 알아보기 위하여 speedup과 efficiency 값을 비교하였다. Speedup은 병렬알고리즘과 일 반알고리즘을 비교한 값으로 일반적으로 하나의 CPU를 이

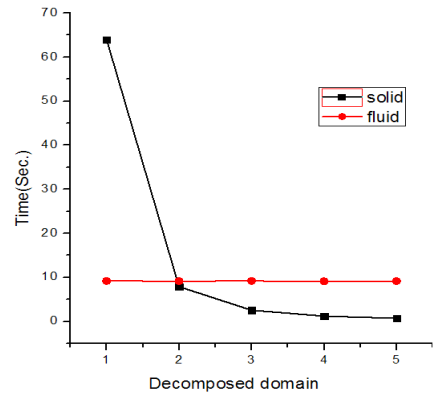
용해 계산한 알고리즘보다 병렬 해석기법을 이용해 여러 개의 CPU를 사용하여 계산된 알고리즘이 얼마나 빠르니 수치 적으로 나타내는 값이다. Speedup은 아래의 식 (24)와 같 이 정의된다.

$$S_p = \frac{T_1}{T_p} \tag{24}$$

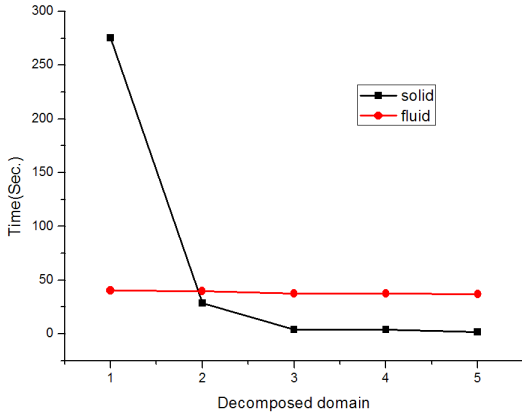
여기서, p 는 CPU의 수, T_1 은 한 개의 CPU가 사용되었을 때



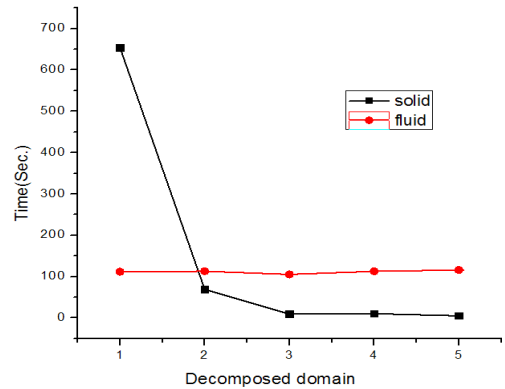
(a) 100개 요소



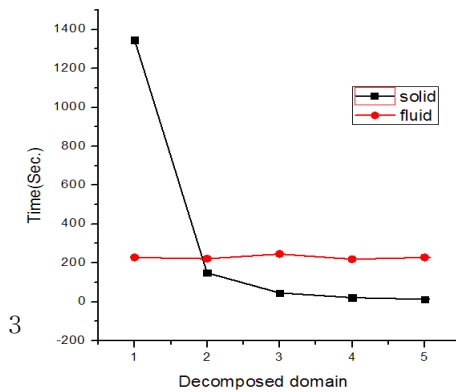
(b) 300개 요소



(c) 500개 요소



(d) 700개 요소



(e) 900개 요소

그림 8 영역 개수별 고체 및 액체영역의 해석시간

의 수행 시간, T_p 는 p 개의 CPU가 사용되었을 때의 수행시간을 나타낸다. 가장 이상적인 speedup은 S_p 와 p 가 같을 때 가장 이상적인 speedup이라 하고 이것을 Linear speedup이라고 정의한다. 본 논문에서 수행되었던 수치실험결과를 식 (24)에 적용하여 나타내면 그림 6과 같이 나타난다.

Efficiency는 문제를 해석하는데 있어서 통신과 동기화의 과정에서 낭비되는 소요 시간들을 비교하여 수치적으로 나타낸 값이다. 일반적으로 Efficiency값은 0에서 1사이의 값을 나타내고, 식 (25)와 같이 정의된다.

$$E_p = \frac{T_1}{pT_p} \quad (25)$$

Linear speedup과 한 개의 CPU를 사용하여 수행된 알고리즘과의 efficiency값은 1을 나타낸다. 그리고 사용하는 CPU가 증가할수록 efficiency값은 $1/\log p$ 와 같은 추세를 나타낸다. 본 실험에서의 efficiency값을 나타내어 보면 그림 7과 같다.

각각의 요소에서 하위도메인별 해석시간을 비교해 보면 아래의 그림 8과 같이 나타내어 진다. 고체영역에서의 해석시간은 하위도메인의 수가 많아질수록 감소하게 된다. 병렬해석의 효율성을 알아보기 위해 speedup과 efficiency를 비교해 보면 그림 6과 같이 CPU가 4개 이상 사용할수록 speedup값은 거의 일정함을 볼 수 있다. 이유는 유체영역의 계산과정이 포함되어 있고 분할된 영역의 개수가 많아짐에 따라 고체영역의 해석시간은 줄어들지만 유체영역의 해석시간은 동일하기 때문에 전체의 해석과정에 소요되는 시간에는 큰 영향을 주지 않기 때문이다. 또한 그림 7과 같이 efficiency도 분할 영역의 개수가 많아질수록 낭비되는 소요시간이 거의 없이 효율적으로 나타나는 것을 볼 수 있다.

6. 결 론

다공질매체의 해석기법인 스테퍼드 방법과 영역 분할기법 중 하나인 FETI 기법의 접목을 제안하였다. 포화된 다공질매체에서 고체영역에 FETI기법을 적용하였고, 수치예제를 통한 효율성의 검증도 실시하였다. 그 결과 하위 도메인의 개수가 많아질수록 수치적 효율성이 높아졌다. 다공질매체의 크기가 클수록, 도메인의 수가 많아질수록 제안된 기법의 적용이 효과적이다. 본 논문에서는 다공질매체 내의 고체영역은 탄성거동이라는 가정아래 수치 해석을 수행하였다. 다공질매체 내의 고체영역이 비선형으로 전환 될 때 수치적 효율성은 더욱 높아질 것이다.

감사의 글

본 연구는 한국연구재단을 통해 교육과학기술부의 세계수준의 연구중심대학 육성사업(WCU)으로부터 지원받아 수행되었습니다(R32-2008-000-20042-0). 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- 이준성, 塩谷 隆二, 이은철, 이양창 (2009) 영역분할법에 기반을 둔 병렬 유한요소해석 시스템, 한국전산구조공학회 논문집, 22(1), pp.35~44.
- Belytschko, T., Yen, H. J., Mullen, R. (1979) Mixed Methods for Time Integration, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17(18), pp.259~275.
- Babuska, I. (1973) The Finite Element Method with Lagrange Multipliers, *Numerische Mathematik*, 20(3), pp.179~192.
- Biot, M. (1941) General Theory of Three-Dimensional Consolidation, *Journal of Applied Physics*, 12(1), pp.155~164.
- Borja, R. I. (1986) Finite Element Formulation for Transient Pore Pressure Dissipation: A Variational Approach, *International Journal of Solid and Structures*, 22(11), pp. 1201~1211.
- C. Farhat. (1991) A Method of Finite Element Tearing and Interconnecting and Its Parallel Solution Algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32, pp.1205~1277.
- C. Farhat, Jan Mandel, Francois Xavier Roux (1994) Optimal Convergence Properties of the FETI Domain Decomposition Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 115(3-4), pp.365~385.
- Gropp, W., Lusk, E., Thakur, R. (1999) Using MPI-2: Advanced Features of the Message-Passing Interface, *MIT Press*, p.382.
- Park, T., Tak, M. (2010) A New Coupled Analysis for Nearly Incompressible and Impermeable Saturated Porous Media on Mixed Finite Element Method: I. Proposed Method, *KSCE*, 14(1), pp.7~16.
- Park, T., Tak, M., Kim, H. (2005a) Analysis of Saturated Porous Media Using Arbitrary Lagrangian

- Eulerian Method: I. Theoretical Formulation, *KSCE Journal of Civil Engineering, KSCE*, 9(3), pp.233~239.
- Park, T., Tak, M., Kim, H.** (2005b) Analysis of Saturated Porous Media Using Arbitrary Lagrangian Eulerian Method: II. Finite Element Formulation, *KSCE Journal of Civil Engineering, KSCE*, 9(3), pp.233~239.
- Park, T., Tak, M., Kim, H.** (2005c) Analysis of Saturated Porous Media Using Arbitrary Lagrangian Eulerian Method: III. Numerical Examples, *KSCE Journal of Civil Engineering, KSCE*, 9(3), pp.233~239.
- Tak, M., Park, T.** (2010) A New Coupled Analysis for Nearly Incompressible and Impermeable Saturated Porous Media on Mixed Finite Element Method: II.Verifications, *KSCE*, 14(1), pp.17~24.
- Terzaghi, K.** (1925) Principles of soil mechanics, Engineering News-Record.
- Voyiadjis, G.Z., Abu-Farsakh, M.Y.** (1997) Coupled Theory of Mixtures for Clayey Soils. *Journal of Computers and Geotechnics*, 20(3/4), pp.195~222.
- Zienkiewicz, O.C., Chang, C.T., Bettess, P.** (1980) Drained, Undrained, Consolidating and Dynamic Behavior Assumptions in Soils. *Geotechnique*, 30(4), pp.385~395.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Zhu, J.Z.** (2000) *The Finite Element Method Sixth edition*, Elsevier Butterworth-Heinemann, p.334 <http://gcc.gnu.org/> (2010)
- 논문접수일 2010년 6월 7일
 - 논문심사일 2010년 6월 29일
 - 게재확정일 2010년 8월 3일