병렬알고리즘 이용한 비압축, 비투과성 포화 다공질매체의 혼합유한요소해석

The Mixed Finite Element Analysis for Nearly Incompressible and Impermeable Porous Media Using Parallel Algorithm

탁 문 호* 강 윤 식* 박 대 효†
Tak, Moonho Kang, Yoon-Sik Park, Taehyo

요 지

본 논문에서는 Park and Tak(2010)이 제안한 다공질매체 스태거드 방법의 효율성을 제고하기 위해 MPI(Message-Passing Interface) 라이브러리를 통한 병렬해석이 소개된다. 이를 위해 비압축, 비투과성 포화 다공질매체와 FEM을 통한 스태거드 방법이 간략히 소개된다. 그리고 병렬해석을 위한 MPI 라이브러리를 소개하고 스태거드 방법에 블록킹, 논블록킹 MPI 라이브러리를 접목시킨 병렬해석 알고리즘을 제안한다. 여기서는 변위와 간극수압 계산에서의 CPU 할당방법과 MPI 통신 규약을 통한 효율적인 프로그래밍 방법을 제시하고, 수치효율성을 검증하기 위한 2차원 모델의 순차해석과 병렬해석 결과 값들을 요소개수에 따라 계산시간이 비교・검증된다.

핵심용어 : 스태거드 방법, 병렬알고리즘, 메시지 패싱 라이브러리, 비압축 비투과성 포화 다공질매체

Abstract

In this paper, the parallel algorithm using MPI(Message-Passing Interface) library is introduced in order to improve numerical efficiency for the staggered method for nearly incompressible and impermeable porous media which was introduced by Park and Tak(2010). The porous media theory and the staggered method are also briefly introduced in this paper. Moreover, we account for MPI library for blocking, non-blocking, and collective communication, and propose combined the staggered method with the blocking and nonblocking MPI library. And then, we present how to allocate CPUs on the staggered method and the MPI library, which is related with the numerical efficiency in order to solve unknown variables on nearly incompressible and impermeable porous media. Finally, the results comparing serial solution with parallel solution are verified by 2 dimensional saturated porous model according to the number of FEM meshes.

Keywords *: staggered method, parallel algorithm, MPI, nearly incompressible and impermeable porous media*

1. 서 론

포화된 다공질매체는 고체와 유체로 구성되어 있는 다상의 재료이다. 1941년 Biot에 의해 Poroelasticity 지배방정식이 제안된 후 현재까지 혼합이론(Mixture Theory)과 평균이론(Average Theory)를 이용한 이론식들이 나누어 연구되어 왔다. 혼합이론의 대표적인 연구는 Morland(1972), Goodman and Cowin(1972), Bowen(1980)들에 의해 미시관점(Micro Scale)에서 거시관점(Macro Scale)으로의 지배방정식을 형상학적 접근(Phenomenological Approach) 방법을 이용하여 유도하였다. 한편 평균이론의 대표적인 연구 중 하나는 Hassanizadeh and Gray(1979)가 REV (Representative Elementary Volume) 방법을 통하여 포화된 다공질매체의 지배방정식들을 유도하였다. 그러나 현재까지 모든 지배방정식들은 연속체 관점에서 질량평형방정식, 운동량평형방정식에서 동일한 거동을 나타내고 있다.

수치해석 분야에서는 이러한 다공질매체를 해석하기 위하여 많은 연구가 진행되어 왔다. 특히 고체영역의 변형과 유

† 책임저자, 종신회원・한양대학교 건설환경공학과 교수
Tel: 02-2220-0321 ; Fax: 02-2220-4322
E-mail: cepark@hanyang.ac.kr
* 학생회원・한양대학교 건설환경공학과 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2010년 10월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2010년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

체영역의 유체흐름을 동시에 고려되어야 하는 문제로 하이브리드 요소를 사용한 유한요소방법이 연구되어 왔다. Zienkiewicz 등(1980)은 지배방정식을 변위, 간극수압으로 표현되는 u/p 모델을 정식화하였으며 혼합유한요소해석을 이용하여 지반에 압밀해석을 수행하여 왔다. 그의 u/p 모델은 특히 고체, 액체, 기체 등으로 구성되어 있는 불포화 다공질매체 모델에 적용이 가능하다는 장점을 갖고 있는데, 프로그램 코딩에 있어서도 포화된 다공질매체와 불포화된 다공질매체의 해석기법 구분이 큰 차이가 없는 이점이 있다. 그 후 Borja(1986), Voyiadjis와 Abu-Farsakh(1997)등에 의해 혼합유한요소해석은 그 범위가 지반역학 분야에서 고체역학 분야로 확장되어 왔다.

그러나 이러한 혼합유한요소해석 방법에는 선형방정식을 해석함에 있어서 직접법(Direct Method 또는 Monolithic) 사용이 매우 제한적이다. 왜냐하면, 고체영역과 액체영역의 형상함수 차수가 다르므로 요소사이의 연속성(Continuity)문제가 발생하기 때문이다. 이러한 문제를 해결하기 위해 혼합유한요소해석에서는 방정식에서 요구되는 차수에 맞는 하이브리드 요소를 사용하였으며, 그 결과 간극수압과 변위들은 어느 정도 만족할 만한 수준이다. 그러나 차수가 다른 요소를 사용함에 있어서 수치해석상 효율성과 정확성은 극한상황에서 다음과 같은 문제를 발생시킨다. 다공질매체내에 고체가 비 압축이고, 유체의 흐름이 매우 느리다고 가정하면 해석진행에 있어서 요소 잠김(Element Locking)이 발생하며 하이브리드 요소 차수의 선택폭이 좁아진다. 이러한 현상은 비압축성 판이나 쉘 요소에서 발생하는 문제점과 동일하며, 이러한 문제의 해결을 위해서는 요소가 Patch Test를 통과하거나 Babuska-Brezzi 조건을 만족해야 한다. 위와 같은 문제의 해결은 모델의 동적해석에서 직접법이 아닌 스태커드방법(Staggered Method)을 사용하는 것인데, 최근에는 다른 차수의 요소를 사용함에 있어서 단점으로 지적되어 온 문제들을 해결하기 위해 동일차수요소를 사용하는 연구가 활발히 진행되었다. 동일차수요소를 사용할 경우 직접법으로는 수치적 불안정성을 해결할 수 없지만 스태거드 방법(Staggered Method)을 사용하여 문제들을 해결할 수 있다(Zienkiewicz 등, 1990; Lewis and Schrefler, 2000).

최근 Park and Tak(2010)은 결과의 정확성을 높인 스태거드 방법을 제안하였다. 이들은 각 영역에서 시간증분을 달리하는 방법과 이에 따른 요소재배열 방법을 이용하여 비압축 비투과성 다공질매체에서의 간극수압의 정확성과 수치적 불안정성을 해결하였다. 그러나 기존 해석 영역에서 반복계산은 추가적으로 해야 하는 문제가 있어 수치효율성이 매우 떨어진다.

한편 스태거드 방법에서 효율성을 높이기 위해 사용되는 병렬해석은 MPI 통신규약을 이용한 라이브러리를 사용한다. MPI 라이브러리 이전에 노드간의 데이터 전송 규약은 SMP (Shear Memory Multiprocessor)나 Cluster 시스템 상태에 따라 다르게 운영되어 왔다. 그러나 1992년 슈퍼컴퓨팅 학회에서 MPI 라이브러리의 필요성이 대두되었고, 결국 MPI 포럼을 통하여 MPI 1.0이라는 통합통신규약을 제공하게 되었으며, 현재까지는 MPI 2.2까지 개발된 상태이다. MPI 라이브러리 종류는 크게 점대점통신(point-to-point)과 집합통신(Collective)으로 나눌 수 있는데, 점대점통신의 경우 하나의 CPU에서 다른 하나 CPU로의 메시지를 전송하는 규약으로 메시지를 전송함에 있어 양방향 통신이 가능하다. 또한 하나의 CPU에서 다른 CPU로 메시지를 전송하고 다른 작업을 할 수 있는지에 따라 블록킹통신(blocking)과 논블록킹통신(nonblocking)으로 나눌 수 있다. 블록킹통신의 경우 메시지를 전송한 다음 전송 메시지가 이상없이 도착되었다는 메시지를 받기 전까지는 그 CPU가 다른 작업을 할 수 없는 알고리즘이고 논블록킹통신은 전송 메시지의 도착유무 없이 다른 작업이 가능한 알고리즘이다. 집합통신의 경우 여러 노드들로 구성되어 있는 클러스터링 시스템, 또는 SMP(Shared memory Multiprocessor)과 같이 여러 개의 CPU가 하나의 메모리를 공유해서 쓰는 장비에 적합하다. 일반적으로 FEM 영역분할 기법에서 집합통신이 매우 효율적이다. 문지중 등(2009)은 병렬해석 기법을 유한요소법에 적용하여 고속충돌파괴에 대한 해석을 한 바 있다.

본 연구에서는 앞에서 소개되어진 스태거드 방법의 단점을 해결하고자 MPI 라이브러리를 사용하여 Park and Tak (2010)이 제안한 스태거드 방법의 수치 정확성, 안정성, 효율성을 얻고자 한다. 이를 위해 포화된 다공질매체 지배방정식과 스태거드 방법, MPI 방법이 간략히 소개되고 스태거드 방법과 MPI 방법 조합을 통한 알고리즘이 제안된다. 마지막으로 수치효율성을 검증하기 위해 이차원 비압축 비투과성 다공질매체 모델을 통한 순차 및 병렬해석이 진행된다.

2. 다공질매체의 지배방정식 및 유한요소정식화

일반적으로 포화된 다공질매체의 지배방정식은 크게 변위를 얻기 위한 운동량평형방정식, 간극수압을 얻기 위한 질량평형방정식으로 유도된다. 운동량 평형방정식과 질량평형방정식은 연속체 역학 이론을 통하여 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}'' - \mathbf{I}p^f) + \rho\mathbf{g} = 0 \tag{1}$$

$$\left(\frac{\alpha-n}{K^s}\right)\frac{\partial p^f}{\partial t}\alpha\nabla\cdot\mathbf{v}^s+\frac{1}{\rho^f}\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{k}}{\mu^f}(-\nabla p^f+\rho^f\mathbf{g})\right)=0 \quad (2)$$

여기서, $\boldsymbol{\sigma}''$는 Cauchy stress 텐서, $\mathbf{I}$는 Identity 텐서, p^f는 간극수압, ρ는 전 영역의 밀도, $\mathbf{g}$는 중력벡터, α는 Biot 상수, n은 다공질매체의 다공성, K^s는 고체영역의 체적계수, $\mathbf{v}^s$는 고체영역의 속도벡터, $\mathbf{k}$는 투수텐서, μ^f는 유체의 동점성계수, ρ^f는 액체밀도를 나타낸다.

다공질매체에 대한 운동량평형방정식 (1)에서 응력은 고체영역에서의 Cauchy stress 텐서와 간극수압 관계식으로 나타내며, 구성방정식을 통하여 다공질매체의 변형거동을 표현한다. 질량평형방정식 (2)에서는 Darcy's law와 상대 물질의 시간도함수를 이용해 다공질매체 내에서의 유체흐름을 나타낸다.

식 (1)과 식 (2)로부터 유한요소해석을 위하여 고체변형과 유체흐름에 대한 경계조건을 적용시키고, implicit 시간해석을 위한 후향차분법(Backward Difference Method)을 이용해 나타내면 식 (3), 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}^s_{n+1}=\mathbf{K}^{-1}_{t,n+1}\left\{\mathbf{f}^s_{n+1}+\mathbf{C}_{1,n+1}\mathbf{p}^f_{n+1}\right\} \quad (3)$$

$$\mathbf{p}^f_{n+1}=\left[\mathbf{D}_{n+1}+\frac{1}{\triangle t_{2,n+1}}\mathbf{S}_{n+1}\right]^{-1} \quad (4)$$
$$\left[\mathbf{f}^f_{n+1}+\frac{1}{\triangle t_{2,n+1}}\mathbf{S}_{n+1}\mathbf{p}^f_n\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\triangle t_{1,n+1}}\left(\mathbf{C}_{2,n+1}\left(\mathbf{u}^s_n-\mathbf{u}^s_{n+1}\right)\right)\right]$$

여기서, 위첨자 s는 고체영역, f는 액체영역, 아래첨자 $n+1$은 반복계산단계, $\mathbf{u}^s$는 변위, $\mathbf{K}_t$는 강성행렬, $\mathbf{f}^6$는 고체영역의 하중, $\mathbf{C}_1$. $\mathbf{C}_2$는 커플링행렬, $\mathbf{p}^f$는 간극수압, $\mathbf{D}$는 투수행렬, $\mathbf{S}$는 압축성행렬, $\mathbf{f}^f$는 액체영역의 flux 하중, $\triangle t_1$은 고체영역의 시간간격, $\triangle t_2$는 액체영역의 시간간격을 나타낸다.

3. 스태거드 방법

포화된 다공질매체의 해석에서는 고체와 액체부분의 서로 다른 물리적 특성이 동시에 고려되어야 한다. 그러므로 식 (3)과 식 (4)를 해석하기 위해서는 직접법(Direct Method) 또는 반복법(Iterative Method)이 사용되어야 한다. 그러나 커플링행렬 $\mathbf{C}_1$. $\mathbf{C}_2$의 커플링행렬에서 나타나는 고체와 액체부분의 형상함수 연속성 문제는 해결되어야 한다. 이를 위해 요소들은 Babuska-Brezzi 상태를 만족하거나 패치 테스트를 만족해야 한다. 그러나 하나의 요소에 고체와 유체의 서로 다른 차수를 고려해야 하기 때문에 요소 선택의 제약사항이 많다. 이를 위해 현재까지 연구에서는 동차요소를 사용하여 변위와 간극수압을 따로 계산하는 explicit-implicit과 implicit-implicit 스태거드 방법들이 사용되어 왔다. 그러나 이러한 방법 또한 비압축, 비투과성 해석에서는 수치적 불안정성을 야기한다. 즉 비압축일 경우 $S\approx 0$과 비투과성일 경우 $D\approx 0$는 식 (4)에서 역행렬을 구하기가 어려워 진다. Park and Tak(2010)이 제안한 스태거드 방법에서는 이러한 문제를 해결하기 위해 각 영역에 대한 시간간격을 달리주어 이를 해결하고자 Belytschko 등(1979)이 개발한 다중시간간격해석(multi time step)이 적용되었다. 또한 서로 다른 시간간격해석으로부터 초래되는 결과의 부정확성은 요소재배열(remesh)과 반복계산을 통하여 해결하였다. 즉 식 (4)에서 다중시간간격, 요소재배열, 반복계산을 식으로 표현하면 다음과 같다.

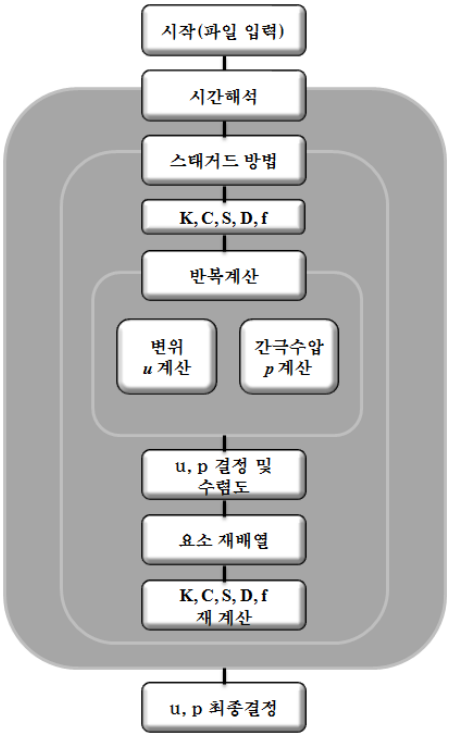


그림 1 비압축 비투과 다공질매체의 스태거드 방법 흐름도

$$\tilde{\mathbf{p}}^f_{n+(i+2)}(t_2)= \quad (5)$$
$$\left[\mathbf{D}_{\mathbf{n+(i+2)}}+\frac{1}{\triangle t_{2,n+(i+2)}}\mathbf{S}_{\mathbf{n+(i+2)}}\right]^{-1}$$
$$\left[\mathbf{f}^{\mathbf{f}}_{\mathbf{n+(i+2)}}+\frac{1}{\triangle t_{1,n+(i+2)}}(\mathbf{C}_{\mathbf{2,n+(i+2)}}(\tilde{\mathbf{u}}^s_n(t_1)\right.$$
$$-\tilde{\mathbf{u}}^s_{n+(i+1)}(t_1)+\tilde{\mathbf{u}}^s_n(t_1)-\tilde{\mathbf{u}}^s_{n+(i+2)}(t_1)))$$
$$\left.+\frac{1}{\triangle t_{2,n+(i+2)}}\mathbf{S}_{\mathbf{n+(i+2)}}\tilde{\mathbf{p}}^f_{n+(i+1)}(t_2)\right]$$

여기서, 아래첨자 i는 반복계산 단계를 나타낸다.

그러나 식 (5)에서의 반복계산은 일반 다공질매체해석에서 반복계산을 추가적으로 수행함으로 수치적 정확성과 안정성은 얻을 수 있지만 효율성은 떨어진다. 지금까지 설명한 비압축 비투과성 다공질매체의 스태거드 방법 해석 흐름도를 나타내면 그림 1과 같다.

4. MPI 라이브러리

MPI(Message Passing Interface)는 네트워크 컴퓨터에서 메시지 전달 형식의 병렬 응용프로그램을 위해 개발된 인터페이스이다. 병렬 컴퓨터상의 MPI 구현에서 같은 수행을 할 수 있도록 프로토콜과 각 함수들의 의미를 정의한 메시지 패싱 라이브러리 규격이다(Gropp, 1999).

MPI의 구현에 있어서 사용되는 함수들은 지금까지 125개의 함수가 제공된다. 제공되는 함수는 많이 있지만 MPI의 프로그래밍을 위해서 125개의 함수가 다 사용되는 것은 아니다. 기본적인 함수 8개만을 사용하여도 많은 수의 병렬 프로그램의 코딩이 가능하다. 기본적인 MPI의 함수는 다음과 같다.

- MPI_Init( ) : MPI 라이브러리들이 이용될 수 있도록 시스템에 미리 정해진 작업을 수행한다.
- MPI_Finalize( ) : MPI에 의해 남겨진 미완료된 작업들을 끝낸다.
- MPI_Comm_rank( ) : MPI를 호출시 현재 실행되고 있는 프로세스 번호를 할당하고 그룹 내 프로세스의 식별자를 나타낸다.
- MPI_Comm_size( ) : 프로그램을 수행하고 있는 프로세스들의 수를 알려주는 역할을 한다.
- MPI_Send( ) : 일대일 블록킹통신에서 데이터 송신을 수행하는 함수이다.
- MPI_Isend( ) : 일대일 논블록킹통신에서 데이터 수신을 수행하는 함수이다.
- MPI_Recv( ) : 일대일 블록킹통신에서 데이터 송신을 수행하는 함수이다.
- MPI_Irecv( ) : 일대일 논블록킹통신에서 데이터 수신을 수행하는 함수이다.

여기서 블록킹통신은 메시지를 전송한 다음 전송 메시지가 이상없이 도착되었다는 메시지를 받기 전까지는 그 CPU가 다른 작업을 할 수 없는 규약이고, 논블록킹통신은 전송 메시지의 도착유무 없이 다른 작업이 가능한 통신이다.

그 외 집합적 통신(collective communication), 언어 바인딩(language binding), 전달자(communicator) 생성, 프로세스 분할 등이 있고, 부가적인 기능으로 유도 데이터형(derived data type)과 이기종간 데이터 지원, 환경관리, 성능 분석 등의 기능을 가지고 있다.

5. MPI 라이브러리를 이용한 스태거드 방법

그림 1과 같이 Park and Tak(2010)이 제안한 스태거드 방법은 정적해석일 경우에도 반복계산이 두 번 들어간다. 위 스태거드 절차에서 변위와 간극수압 계산을 블록킹, 논블록킹 MPI 라이브러리를 이용해 적용해 보면 다음의 표 2와 같이 나타낼 수 있다.

블록킹 MPI 통신에서는 동시에 CPU1과 CPU2에서 각각 식 (3)과 식 (4)를 이용하여 변위와 간극수압이 계산되어진다. 그리고 상대 CPU에 결과 값들을 MPI_Send 라이브

표 1 블록킹 MPI 라이브러리 알고리즘

```
1. 시간해석 시작
 1.1 스태거드 반복계산 시작
  1.1.1. 강성행렬 및 하중벡터 계산
  1.1.2 반복계산
   1.1.2.1 CPU1:
     식(3)계산 및 CPU 2로의 변위벡터 송신(MPI_Send)
     CPU2로부터 간극수압벡터 수신 (MPI_Rev)
       1.1.2.2 CPU2:
         식(4) 계산 및 간극수압벡터 송신(MPI_Send)
         CPU1로부터 변위벡터 수신 (MPI_Recv)
       1.1.2.3 CPU2:
          스태거드 수렴 및 Deadlock 확인
    1.1.3 요소재배열(Remeshing)
    1.1.4 식(5) 계산
  1.3 스태거드 반복계산 수렴확인
2. 변위 및 간극수압 값 결정
```

표 2 논블록킹 MPI 라이브러리 알고리즘

```
1. 시간해석 시작
 1.1 스태거드 반복계산 시작
  1.1.1. 강성행렬 및 하중벡터 계산
   1.1.1.1 CPU1:
     1.1.1.1.1 반복계산
      CPU2로부터 간극수압벡터 수신 (MPI_Irecv)
     식(3)계산 및 CPU 2로의 변위벡터 송신(MPI_Isend)
     논블록킹 통신완료 MPI_Wait
   1.1.1.2 CPU2:
     1.1.1.2.1 반복계산
      CPU1로부터 변위벡터 수신 (MPI_Irecv)
      식(4) 계산 및 간극수압벡터 송신(MPI_Isend)
     논블록킹 통신완료 MPI_Wait
   1.1.2.3 CPU2:
       스태거드 수렴 및 Deadlock 확인
    1.1.3 요소재배열(Remeshing)
    1.1.4 식(5) 계산
  1.3 스태거드 반복계산 수렴확인
2. 변위 및 간극수압 값 결정
```

러리를 이용하여 전송한다. 이 때 서로의 CPU에서 동시에 결과 값들을 전송한다면 교착(deadlock)상태가 발생할 수 있다. 그러나 FEM 요소에서 고체영역과 유체영역의 자유도가 다르고 계산하고자 하는 방정식이 다르기 때문에 매우 단순한 모델을 제외하고 CPU1과 CPU2가 동시에 계산이 끝나고 데이터를 전송하는 경우는 극히 드문 현상이다. 마지막으로 반복계산 동안에 변위와 간극수압 수렴성을 확인 한 후 만족하지 못하면 스태거드 반복계산은 재시도한다. 이러한 알고리즘은 상대 CPU에서 계산이 지연되었을 경우 현재 CPU가 기다려야 하는 단점이 있다. 즉 대용량의 다공질매체를 해석할수록 한쪽 CPU에서 대기하고 있는 시간이 길어져 load balanceing에서 문제가 발생한다.

반면, 논블록킹 MPI 통신에서는 계산 CPU에서 각 CPU로 데이터 수신이 준비가 되었다는 메시지를 먼저 버퍼에 전송한다(MPI_Irecv). 그리고 각 CPU에서 변위와 간극수압을 계산하고 MPI_Send를 통해 전송한다. 이 때 반복계산은 블록킹통신과 다르게 각 CPU에서 진행된다. 즉 이러한 알고리즘은 반복계산 동안 CPU1 또는 CPU2의 계산속도가 틀리기 때문에 먼저 끝난 CPU의 활용도를 높이고자 하는 것이다. 특히 논블록킹을 사용한 위와 같은 알고리즘은 데이터 전송에서 교착이 발생하지 않는다. 그러나 송신하고자 하는 데이터 크기가 수신하고자 하는 CPU의 버퍼보다 크면 블록킹통신과 마찬가지로 상대 CPU 작업이 끝나고 버퍼용량이 남을 때까지 대기해야 한다. 일반적으로 이러한 문제점들을 해결하기 위해 논블록킹에서 통신상태를 점검할 수 있는 MPI_Wait 함수를 적절히 사용해야 한다.

6. MPI 수치해석

해석 시스템 환경은 64비트 Power5 CPU(1.9GHz) 32개를 구성하고 있는 IBM P570 SMP를 사용하였으며. 총 메모리는 32GB이다. AIX 5.3 운영체제에서 xlc 컴파일러와 Parallel Environment(PE) 4.2를 사용하여 병렬해석을 진행하였다.

앞에서 소개된 블록킹 통신과 논블록킹 통신의 2가지 경우에 대해 2차원 비압축 비투과 다공질매체에 대해 효율성을 비교하였다. 가로 100cm, 세로 100cm 컬럼 모델이 사용되었고(그림 2) 요소의 개수는 1개부터 225개까지 증가시켜 해석하였다(그림 3). 비압축성 및 비투과성 다공질매체 물성치는 표 3과 같다. 또한 고체영역에서의 시간간격은 0.2초, 액체영역에서의 시간간격은 1e-10초를 사용하였으며 중력의 영향은 무시되었다. 수치 해석에 사용된 다공질매체는 완전 포화되었다고 가정하고 4절점 요소라는 가정아래 해석이 진행되었다.

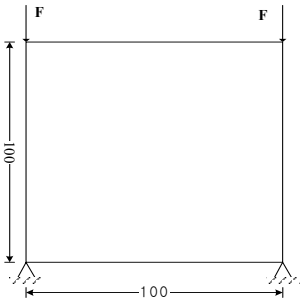


그림 2 수치해석 모델의 유한요소망(15×15mesh)

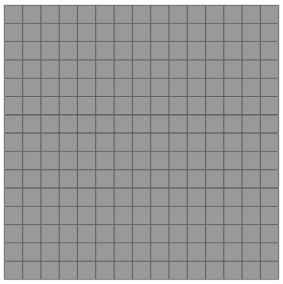


그림 3 2차원 요소

표 3 비압축 비투과성 다공질매체 특성 값

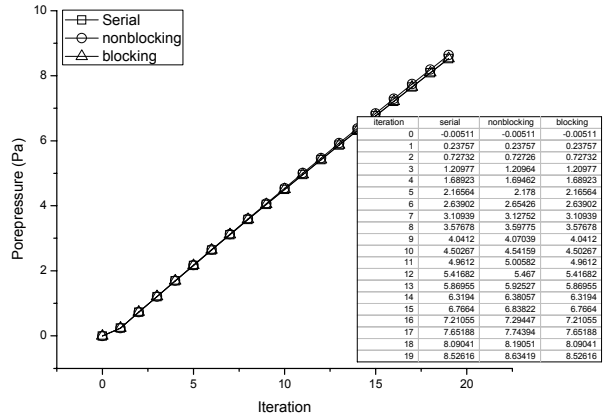
E	3.0×10^{7}Pa
ν	0.2
ρ	2000kg/m^3
n	0.3
k	1.0×10^{-16}m/s
K^s	1.7×10^{-15}Pa
α	1
F	100kN

해석하기에 앞서 스태거드 방법과 MPI가 적용된 병렬해석의 수치 정확성 비교를 위해 스태거드 반복횟수 20에서 간극수압 증가를 해석하였다. 그림 4에 포함된 표는 각 횟수별 순차적 계산, 블록킹, 논블록킹 해석의 간극수압을 나타내었다.

그림 4에서는 병렬해석의 반복계산이 진행되면서 간극수압 증가가 이미 Park and Tak(2010)이 검증한 순차해석 결과(그림 4 Serial)와 차이가 없음을 알 수 있다. 즉 제안된 병렬해석에서의 수치 정확성은 순차해석 결과로부터 신뢰할만한 수준이다.

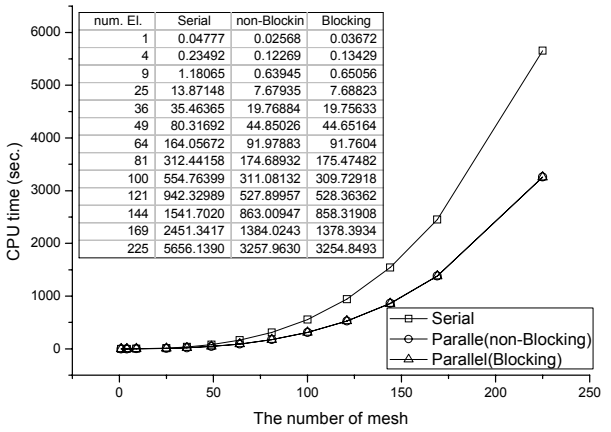
블록킹, 논블록킹 MPI 병렬알고리즘의 적용은 변위와 간극수압을 얻는 반복계산에서 이루어짐으로 스태거드 반복계산의 횟수는 1로 제한하였다.

그림 5는 요소증가에 따른 계산시간을 나타내는 그래프와 요소별 순차적 계산, 블록킹, 논블록킹의 해석시간의 표를 나타낸다. 계산과정에서의 반복계산 횟수는 1000으로 제한하였으며, 총 계산시간은 초단위로 나타냈다. 요소증가에 상관없이 순차해석과 블록킹해석의 CPU 해석시간 감소율은 평



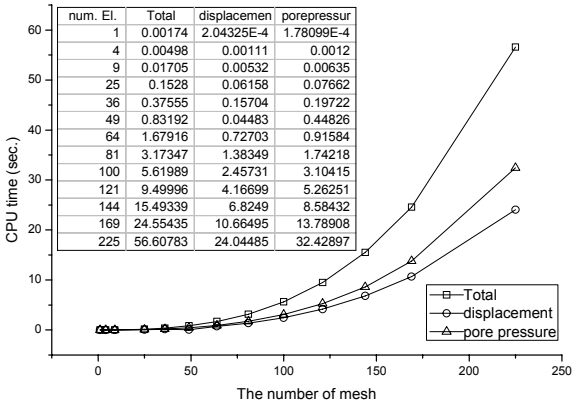
iteration	serial	nonblocking	blocking
0	-0.00511	-0.00511	-0.00511
1	0.23757	0.23757	0.23757
2	0.72732	0.72726	0.72732
3	1.20977	1.20964	1.20977
4	1.68923	1.69462	1.68923
5	2.16564	2.178	2.16564
6	2.63902	2.65426	2.63902
7	3.10939	3.12752	3.10939
8	3.57678	3.59775	3.57678
9	4.0412	4.07039	4.0412
10	4.50267	4.54159	4.50267
11	4.9612	5.00582	4.9612
12	5.41682	5.467	5.41682
13	5.86955	5.92527	5.86955
14	6.3194	6.38057	6.3194
15	6.7664	6.83822	6.7664
16	7.21055	7.29447	7.21055
17	7.65188	7.74394	7.65188
18	8.09041	8.19051	8.09041
19	8.52616	8.63419	8.52616

그림 4 만복계산에 의한 간극수압 비교



num. El.	Serial	non-Blockin	Blocking
1	0.04777	0.02568	0.03672
4	0.23492	0.12269	0.13429
9	1.18065	0.63945	0.65056
25	13.87148	7.67935	7.68823
36	35.46365	19.76884	19.75633
49	80.31692	44.85026	44.65164
64	164.05672	91.97883	91.7604
81	312.44158	174.68932	175.47482
100	554.76399	311.08132	309.72918
121	942.32989	527.89957	528.36362
144	1541.7020	863.00947	858.31908
169	2451.3417	1384.0243	1378.3934
225	5656.1390	3257.9630	3254.8493

그림 5 요소증가에 따른 순차, 블록킹, 논블록킹 병렬해석

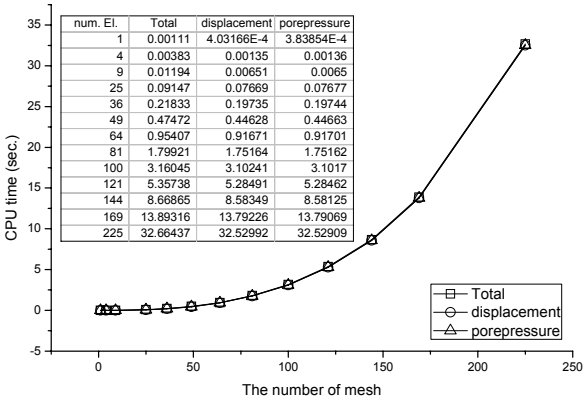


num. El.	Total	displacemen	porepressur
1	0.00174	2.04325E-4	1.78099E-4
4	0.00498	0.00111	0.0012
9	0.01705	0.00532	0.00635
25	0.1528	0.06158	0.07662
36	0.37555	0.15704	0.19722
49	0.83192	0.04483	0.44826
64	1.67916	0.72703	0.91584
81	3.17347	1.38349	1.74218
100	5.61989	2.45731	3.10415
121	9.49996	4.16699	5.26251
144	15.49339	6.8249	8.58432
169	24.55435	10.66495	13.78908
225	56.60783	24.04485	32.42897

그림 6 요소증가에 따른 순차해석의 계산시간

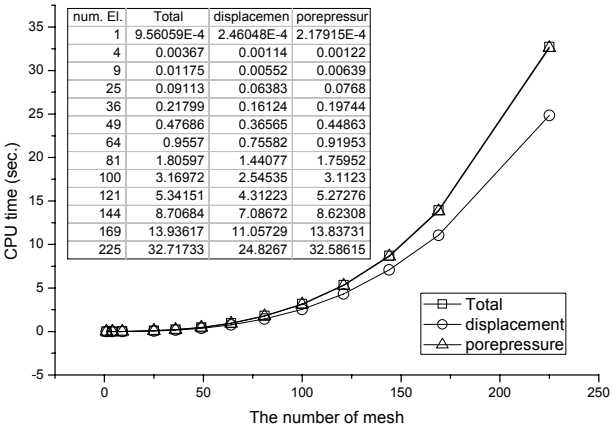
균 42.4%, 순차해석과 논블록킹 해석에서는 44.7%의 감소율을 보였다. 또한 4개 요소의 논블록킹 해석에서 최대 47.8%의 최대 감소율을 나타냈다. 하지만 블록킹과 논블록킹 사이에서는 큰 차이를 나타내고 있지 않다. 다만 평균적으로 논블록킹통신해석에서 전반적으로 CPU 해석시간 저감 효과를 보였다.

한편 순차해석, 블록킹통신해석, 논블록킹통신해석에서 변위



num. El.	Total	displacement	porepressure
1	0.00111	4.03166E-4	3.83854E-4
4	0.00383	0.00135	0.00136
9	0.01194	0.00651	0.0065
25	0.09147	0.07669	0.07677
36	0.21833	0.19735	0.19744
49	0.47472	0.44628	0.44663
64	0.95407	0.91671	0.91701
81	1.79921	1.75164	1.75162
100	3.16045	3.10241	3.1017
121	5.35738	5.28491	5.28462
144	8.66865	8.58349	8.58125
169	13.89316	13.79226	13.79069
225	32.66437	32.52992	32.52909

그림 7 요소증가에 따른 블록킹통신에서의 계산시간



num. El.	Total	displacemen	porepressur
1	9.56059E-4	2.46048E-4	2.17915E-4
4	0.00367	0.00114	0.00122
9	0.01175	0.00552	0.00639
25	0.09113	0.06383	0.0768
36	0.21799	0.16124	0.19744
49	0.47686	0.36565	0.44863
64	0.9557	0.75582	0.91953
81	1.80597	1.44077	1.75952
100	3.16972	2.54535	3.1123
121	5.34151	4.31223	5.27276
144	8.70684	7.08672	8.62308
169	13.93617	11.05729	13.83731
225	32.71733	24.8267	32.58615

그림 8 요소증가에 따른 논블록킹통신에서의 계산시간

와 간극수압 계산시간 차이를 규명하기 위해 스태거드 반복계산수 1, 변수계산 반복횟수 10으로 제한하여 해석을 진행하였다.

그림 6은 순차해석에 따른 변위와 간극수압의 계산시간 결과를 나타내고 있다. 여기서 '총시간=변위계산시간+간극수압 계산시간+결과조합시간'의 관계로 정의될 수 있다. 요소 1개에서는 간극수압 계산속도가 변위의 계산속도보다 빠르게 나타나지만, 요소개수가 증가 할수록 변위의 계산속도가 빠르게 나타남을 알 수 있다.

그림 7과 그림 8은 요소가 증가함에 따라 블록킹통신과 논블록킹통신에서의 계산시간 결과를 나타낸 표와 그래프이다. 그림 7에서는 변위와 간극수압을 계산함에 있어 블록킹통신에서는 계산시간이 동일한 결과 값을 보인다. 이는 각영역에서 MPI_Recv를 통해 데이터를 완료한 후 모든 작업을 끝내는 블록킹통신의 특성이 나타나 있다. 한편 그림 8에서는 MPI_Isend와 MPI_Irecv 함수를 사용하여 상대편의 버퍼로 데이터를 전송하고 다음 작업이 가능한 논블록킹 해석 특성을 나타내고 있다. 즉 각 CPU에서 반복계산이 진행되며, 상대편으로부터 데이터를 수신한 것과 관계없이 현재 작업을 진행하고 보내는 알고리즘 구조로 되어있다. 변위와 간

극수압의 결과들은 그림 7에서의 결과와 거의 동일하다. 그러나 총 CPU 시간에서는 변위 계산시간과 간극수압 계산시간을 모두 고려해야 하는 순차계산 보다 간극수압 계산시간에 의존적인 논블록킹통신 결과가 보다 더 효율적임을 알 수 있다. 특히 블록킹통신과 다르게 변위를 계산하고 상대 CPU에서 간극수압을 계산하는 동안 추가작업이 가능하다는 점에서 CPU 자원 활용이 유연하다.

7. 결 론

비압축 비투과성 다공질매체를 병렬해석하기 위해서 본 논문에서는 Park and Tak(2010)이 제안한 스태거드 방법에 MPI 라이브러리를 접목시켜 병렬알고리즘을 제안하였다. 이를 위해 포화된 다공질매체이론과 유한요소 정식화, 스태거드 방법, MPI 통신규약이 간략히 소개되었다. 또한 MPI 점대점 양방향 통신을 위해 블록킹방법과 논블록킹방법이 적용된 다공질매체해석방법이 제안되었다. 마지막으로 제안된 알고리즘의 검증을 위해 2차원 비압축 비투과성 다공질매체에 대한 유한요소해석이 수행되었다. 해석은 순차, 블록킹 병렬, 논블록킹 병렬해석으로 나누어 진행되었으며, 순차 해석보다 병렬해석이 논블록킹통신에서 최대 47.8%까지 수행시간이 감소하는 경향을 보였다. 또한 블록킹통신과 논블록킹해석 결과에서 볼 수 있듯이 병렬해석의 효율성은 간극수압 계산시간에 따라 결정됨을 알 수 있었다.

제안된 MPI 알고리즘을 통하여 변위를 결정하는 고체영역 부분에 대한 병렬해석은 영역분할기법인 FETI(Finite Element Tearing and Interconnecting) 또는 BDDC(Balancing Domain Decomposition by Constraints)가 가능한 부분이다. 또한 본 연구에서는 다공질매체 내에서의 유체흐름은 선형이라 가정하여 Darcy's law를 사용하여 지배방정식을 유도하였지만 비선형성이 고려된다면 간극수압해석 시간과 변위해석 시간과의 관계는 면밀히 고려해야 할 연구 분야이다.

감사의 글

본 연구는 한국연구재단을 통해 교육과학기술부의 세계수준의 연구중심대학 육성사업(WCU)으로부터 지원받아 수행되었습니다(R32-2008-000-20042-0). 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

문지중, 김승조, 이민형 (2009) 세라믹/금속판재의 고속충돌 파괴 유한요소 병렬해석 기법, 한국전산구조공학회 논문집, 22(06), pp.527~532.

Babuska, I. (1973) The Finite Element Method with Lagrange Multipliers, *Numerische Mathematik*, 20(3), pp.179~192.

Belytschko, T., Yen, H.J., Mullen, R. (1979) Mixed Methods for Time Integration, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17(18), pp.259~275.

Biot, M. (1941) General Theory of Three-Dimensional Consolidation. *Journal of Applied Physics,* 12(1), pp.155~164.

Borja, R.I. (1986) Finite Element Formulation for Transient Pore Pressure Dissipation: A Variational Approach, *International Journal of Solid and Structures*, 22(11), pp.1201~1211.

Bowen, R.M. (1980) Incompressible Porous Media Models by use of the Theory of Mixtures, *International Journal of Engineering Science*, 18(9), pp.1129~1148.

Goodman, M., Cowin, S. (1972) A Continuum Theory for Granular Materials, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 44(4), pp.249~266.

Gropp, W., Lusk, E., Thakur, R. (1999) Using MPI-2: Advanced Features of the Message-Passing Interface, *MIT Press*, p.382.

Gropp, William., Lusk, Ewing., Skjellum, Anthony (1999) Using MPI - 2nd Edition: Portable Parallel Programing with the Message-Passing Interface, *MIT Press*, p.371.

Hassanizadeh, S., Gray, W. (1979a) General Conservation Equations for Multi-Phase Systems: 1. Averaging Procedure, *Advances in Water Resources*, 2, pp.131~144.

Hassanizadeh, S., Gray, W. (1979b) General Conservation Equations for Multi-Phase Systems: 2. Mass, Momenta, Energy and Entropy Equations, *Advances in Water Resources*, 2, pp.191~203.

Lewis, R.W., Schrefler, B.A. (2000) The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media, *John Wiley & Sons.*

Morland, L.W. (1972) A Simple Constitutive Theory for a Fluid-Saturated Porous Solid, *Journal of Geophysical Research*, 77(10), pp.890~900.

Park, K.C. (1983) Stabilization of Partitioned Solution Procedure for Pore Fluid-Soil Interaction

Analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 19(11), pp.1669~1673.

Park, T., Tak, M. (2010) A New Coupled Analysis for Nearly Incompressible and Impermeable Saturated Porous Media on Mixed Finite Element Method: Ⅰ.Proposed Method, *KSCE*, 14(1), pp.7~16.

Park, T., Tak, M. (2010) A New Coupled Analysis for Nearly Incompressible and Impermiable Saturated Porous Media on Mixed Finite Element Method: Ⅰ.Proposed Method, *KSCE*, 14(1), pp.7~16.

Park, T., Tak, M., Kim, H. (2005a) Analysis of Saturated Porous Media Using Arbitrary Lagrangian Eulerian Method: I. Theoretical Formulation. *KSCE Journal of Civil Engineering, KSCE,* 9(3), pp.233~239.

Park, T., Tak, M., Kim, H. (2005b) Analysis of Saturated Porous Media Using Arbitrary Lagrangian Eulerian Method: II. Finite Element Formulation. *KSCE Journal of Civil Engineering, KSCE,* 9(3), pp.241~246.

Park, T., Tak, M., Kim, H. (2005c) Analysis of Saturated Porous Media Using Arbitrary Lagrangian Eulerian Method: III. Numerical Examples. *KSCE Journal of Civil Engineering, KSCE,* 9(3), pp.247~254.

Tak, M., Park, T. (2010) A New Coupled Analysis for Nearly Incompressible and Impermeable Saturated Porous Media on Mixed Finite Element Method: Ⅱ.Verifications, *KSCE*, 14(1), pp.17~24.

Voyiadjis, G.Z., Abu-Farsakh, M.Y. (1997) Coupled Theory of Mixtures for Clayey Soils, *Journal of Computers and Geotechnics,* 20(3/4), pp.195~222.

Zienkiewicz, O.C., Chang, C.T., Bettess, P. (1980) Drained, Undrained, Consolidating and Dynamic Behavior Assumptions in Soils, *Geotechnique*, 30(4), pp.385~395.

Zienkiewicz, O.Z., Chan, A.H.C., Pastor, M., Paul, D.K., Shiomi, T. (1990) Static and Dynamic Behavior of Soils: A Rational Approach to Quantitative Solutions. I. Fully Saturated Problems, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A,* 429(1877), pp.285~309.

● 논문접수일 2010년 6월 7일
● 논문심사일
1차 2010년 7월 2일
2차 2010년 8월 9일
● 게재확정일 2010년 8월 10일