

# 통신차단규칙을 따르는 유한버퍼 단순 조립형 대기행렬 망에서의 안정대기시간

서동원<sup>1†</sup> · 이승만<sup>2</sup>

## Stationary Waiting Times in Simple Fork-and-Join Queues with Finite Buffers and Communication Blocking

Dong-Won Seo · Seung Man Lee

### ABSTRACT

In this study, we consider stationary waiting times in a simple fork-and-join type queue which consists of three single-server machines, Machine 1, Machine 2, and Assembly Machine. We assume that the queue has a renewal arrival process and that independent service times at each node are either deterministic or non-overlapping. We also assume that the Machines 1 and 2 have an infinite buffer capacity whereas the Assembly Machine has two finite buffers, one for each machine. Services at each machine are given by FIFO service discipline and a communication blocking policy. We derive the explicit expressions for stationary waiting times at all nodes as a function of finite buffer capacities by using  $(\max,+)$ -algebra. Various characteristics of stationary waiting times such as mean, higher moments, and tail probability can be computed from these expressions.

**Key words** : Communication Blocking, Finite Buffer Capacity, Fork-and-Join Queue,  $(\text{Max},+)$ -algebra and  $-$ -linear System, Waiting Time

### 요약

본 연구에서는 3개의 단일서버 노드(기계 1, 기계 2, 조립기계)로 구성된 단순 조립형 대기행렬 망의 안정대기시간에 대해 분석한다. 하나의 재생도착과정을 가정하며, 각 기계의 서비스시간은 서로 독립이며 상수 또는 겹침이 없는 시간으로 가정한다. 기계 1과 기계 2는 무한크기의 버퍼를 가지며, 조립기계는 각 기계로부터의 이송되는 부품을 위해 2개의 유한버퍼를 가진다. 각 기계는 FIFO 규칙과 통신차단규칙에 따라 서비스를 제공한다. 단순 조립형 대기행렬 망의 안정대기시간에 대한 간결한 표현식을  $(\max,+)$ -대수를 활용하여 유한버퍼의 크기에 대한 함수의 형태로 도출하였다. 이러한 표현식으로부터 평균, 고차평균, 꼬리확률과 같은 다양한 성능 특성치들의 값을 구할 수 있다.

**주요어** : 통신차단, 유한버퍼, 조립형 대기행렬,  $(\text{Max},+)$ -대수,  $(\text{Max},+)$ -선형 시스템

## 1. 서론

다양한 통신망과 제조시스템을 대표하는 모형으로 무

\*이 논문은 2010년도 경희대학교 연구년 지원에 의한 결과임.

2010년 7월 28일 접수, 2010년 9월 18일 채택

<sup>1)</sup> 경희대학교 경영대학 경영학부, 경영연구원

<sup>2)</sup> University Affiliated Research Center, University of California, NASA Ames Research Center

주저자: 서동원

교신저자: 서동원

E-mail: dwseo@khu.ac.kr

한 크기의 버퍼를 갖는 대기행렬 모형이 폭넓게 연구되어왔다. 현존하는 시스템은 단일 또는 다수의 노드로 구성되어 있으며 각 노드들이 연결된 형태에 따라 일렬(tandem) 또는 조립형(fork-and-join 또는 assembly) 구조로 구분된다. 일반적으로 조립형구조를 일렬구조의 특수한 형태로 보기도 하지만, 일렬구조에 비해 조립형 구조에 대한 연구는 부족한 편이다.

Flatto와 Hahn<sup>[11]</sup>, Flatto<sup>[10]</sup>는 2-노드  $M/M/1$  망의 안정 상태분포(stationary distribution)에 대한 생성함수(generating function)를 도출하고 몇몇 특성을 밝혔다.

Baccelli 외<sup>[6,7]</sup>, Raghavan와 Viswanadham<sup>[15]</sup>은 일반 서비스시간을 갖는 다양한 종류의 조립형 망에서의 체류시간(response time 또는 sojourn time)에 대한 범위를 구하였다. Nelson과 Tantawi<sup>[14]</sup>는 동일한 서비스 비율(homogeneous service rate)을 갖는  $M/M/1$  조립형 대기행렬 망에서 평균 체류시간에 대한 근사치를 구하였는데, 2-노드인 경우에는 체류시간에 대한 간결한 표현식을 도출하였지만 다수의 노드로 확장시키지는 못 하였다. Balsamo 외<sup>[9]</sup>는 matrix-geometric 알고리즘을 이용하여 평균 체류시간의 상/하한 범위를 구하였다. Varma와 Makowski<sup>[18]</sup>는 내삽법 보간(interpolation)법을 이용하여 일반 서비스시간을 갖는 조립형 모형에 대한 평균 체류시간에 대한 근사치를 연구하였다. Ayhan과 Seo<sup>[1,2]</sup>는 포아송 도착과정과 상호 독립인 일반 서비스시간을 갖는 대기행렬 망에서의 대기시간에 대한 고차평균과 Laplace 변환, 꼬리확률에 대한 테일러 시리즈 전개식으로 유도하였다. 이와 같이 조립형 구조를 갖는 대기행렬 망에 대한 분석은 Markovian 대기행렬과 근사치에 대한 분석이 주를 이루고 있다.

더 나아가 각 시스템은 실제로는 유한 크기의 버퍼를 갖는 노드들로 구성되어있다. 버퍼의 유한성이 노드간의 고객(부품)의 이동에 있어 차단현상(blocking)을 유발하여, 시스템의 확률적 운영 특성에 대한 분석을 매우 어렵고 복잡하게 만든다. 이러한 이유로, 많은 기존연구에서 지수분포, 단계형(phase-type)분포, 무한버퍼, 크기 1 또는 2인 유한버퍼, 1 또는 2개의 노드로 구성된 매우 제한적인 환경 또는 소규모 망을 대상으로 분석하여왔다. 특히 유한버퍼 대기행렬 망의 내부노드에 대한 분석은 더욱 어렵고 복잡하여 흔히 무한버퍼를 가정하였다. 앞서 소개한 바와 같이 일렬대기행렬 망과 조립형 대기행렬 망에서 유한버퍼를 고려한 경우는 매우 제한적이며, 특히 망의 전체 또는 일부에서의 대기시간에 대한 유의한 결과는 찾아보기 어렵다.

이러한 단점을 극복하고자 최근에는 보다 일반적인 시스템인 max-plus 선형시스템에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 통신망 또는 제조시스템에서 흔히 볼 수 있는 다양한 형태의 확률적 시스템인 칸반 시스템, 유한 또는 무한 버퍼를 갖고 다양한 차단규칙을 따르는 일렬대기행렬 망, 분리/접합형 또는 조립형 대기행렬 망이 max-plus 선형시스템에 포함된다. Max-plus 선형시스템에 속하는 모형들은 확률적 페트리 넷(Stochastic (Timed) Petri net)의 특정형태인 확률적 이벤트 그래프(Event Graph)로 도

식화 될 수 있다(참조<sup>[3,12]</sup>). 이는 ‘최댓값(maximum)’과 ‘합(adding)’, 두 개의 연산자만을 이용하여 시스템의 성능 특성치를 선형식으로 표현가능하게 한다. 간단히 말하면, max-plus 선형시스템은 FIFO 서비스규칙을 따르는 단일 서버 노드로 구성된 선택불가형(choice-free) 망이다.

Baccelli와 Schmidt<sup>[8]</sup>은 포아송 도착과정을 갖는 max-plus 선형시스템에서의 평균 안정대기시간을 포아송 도착과정의 모수에 대한 테일러 시리즈 전개식으로 도출하였다. 그들의 결과는 후에 Baccelli 외<sup>[4,5]</sup>, Ayhan과 Seo<sup>[1,2]</sup>에 의해 일시대기시간과 안정대기시간의 고차평균, Laplace 변환식, 꼬리확률과 같은 다른 성능 특성치로 일반화되었다. 후에 Heidergott<sup>[13]</sup>는 임의의 재생도착과정을 갖는 max-plus 선형시스템에서의 안정대기시간 역시 도착과정의 일반모수에 대한 테일러 시리즈 전개식으로 표현 가능함을 밝혔다.

Max-plus 대수를 이용한 분석방법은 유한버퍼 대기행렬 망의 분석에도 유효하다. 최근에 Seo<sup>[16,17]</sup>는 max-plus 대수를 이용하여 포아송 도착과정을 갖는 2-노드와 3-노드 유한버퍼 일렬대기행렬 망의 안정대기시간을 분석하였다. 그는 유한버퍼로 인한 차단현상을 통신차단규칙(communication blocking 또는 blocking before service)과 제조차단규칙(production blocking 또는 blocking after service)으로 구분하여 안정대기시간에 대한 간결한 표현식을 도출하고 두 차단규칙간의 관련성을 보였다.

또한, Max-plus 대수를 이용한 분석방법은 일렬대기행렬 망뿐만 아니라 보다 일반적인 구조의 대기행렬 망에 대한 분석에도 유용하다. 따라서 본 연구에서는 기존연구의 한계를 벗어나, 통신차단규칙을 따르는 유한버퍼 조립형 대기행렬 망에서의 안정대기시간에 대한 분석으로 확장하고자 한다. 구체적으로 말하자면, 상수 또는 겹침이 없는(non-overlapping) 서비스시간을 갖고 통신차단규칙을 따르는 유한버퍼 조립형 대기행렬 망에서 안정대기시간에 대한 표현식을 도출하고 버퍼의 크기에 따른 특성을 규명하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. Max-plus 대수와 max-plus 선형시스템에서의 대기시간에 대한 기존 연구결과를 2절에서 간단히 소개한다. Max-plus 대수와 이를 이용한 대기시간 관련 상세한 연구결과는 Baccelli 외<sup>[3]</sup>을 참고하면 된다(또는<sup>[1,2,8,12,16]</sup>). 3절과 4절에서는 본 연구의 주결과인 유한버퍼 조립형 대기행렬 망에서의 대기시간에 대한 간결한 표현식과 수치예제를 통한 검증을 보인다. 5절에서는 결론과 추후 연구과제에 대해 언급한다.

## 2. Max-plus 선형 시스템에서의 대기시간

개방형 max-plus 선형 시스템의 노드  $i$ 에서  $n$ 번째 서비스 시작시점  $X_n^i$ 와  $n+1$ 번째 서비스 시작시점  $X_{n+1}^i$  간의 관계를 임의벡터(random vector) 수열  $\{X_n\}$ 과 max-plus 대수를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$X_{n+1} = A_n \otimes X_n \oplus B_{n+1} \otimes T_{n+1} \quad (1)$$

식 (1)에서 max-plus 대수 연산자인  $\otimes$ (o-times)와  $\oplus$ (o-plus)는 각각 합(addition)과 최대치(maximization)를 의미한다.  $\{A_n\}$ 와  $\{B_n\}$ 는 안정 임의행렬이고, 이 행렬은 서비스시간 확률변수들의 선형 함수를 원소로 갖는다. 예를 들어 max-plus 선형 시스템이  $\alpha$ 개의 노드로 구성되어 있다면, 임의행렬  $A$ 는  $\alpha \times \alpha$ 이고, 임의행렬  $B$ 는  $\alpha \times 1$ 인 행렬이다.  $\{T_n\}$ 은 실수 값을 갖는 증가수열이며, 도착 과정 분포에 따른 (절대)도착시간을 의미한다.  $P^0$ 를 재생 도착과정의 Palm probability로 정의하고, 시스템은 초기에 비어있는 상태로 시작한다고 가정하자. 그리고  $T_0$ 를 도착과정의 최소 비음시점으로,  $T_n (n < 0)$ 을 음의영역에서  $n$ 번째 도착시점으로 두면  $P^0(T_0) = 1$ 이 되고 각 도착시점들은 다음과 같이 정의된다.

$$\dots < T_{-n} < T_{-(n-1)} < \dots < T_{-2} < T_{-1} < 0 < T_0 \quad (2)$$

따라서  $\{X_n\}$ 는 시스템의  $n$ 번째 도착고객이 노드  $i$ 에서 서비스 시작시점까지의 절대시간을 나타낸다. 시스템의  $n$ 번째 도착고객이 도착시점부터 노드  $i$ 에서 서비스 시작시점까지 시스템에 머문 시간을 대기시간  $W_n^i = X_n^i - T_n$ 로 정의할 수 있다. 일반적으로 노드의 수가 2보다 큰 경우에 대기시간 임의벡터  $\{W_n\}$ 의 간결한 표현식을 구하는 것은 매우 어렵다. 단일 노드인 경우에는 대기시간 임의벡터  $\{W_n\}$ 는 잘 알려진 Lindley의 식과 일치한다.

Baccelli 외<sup>[3]</sup>는 일정 조건하에서 포아송 도착과정을 갖는 max-plus 선형시스템의 안정대기시간이 다음과 같이 벡터의 계차방정식(recurrence equation)의 형태로 표현될 수 있음을 보였다.

$$W = D_0 \oplus \bigoplus_{k \geq 1} C(-T_{-k}) \otimes D_k. \quad (3)$$

식 (3)에서  $D_0 = B_0$ 이고, 모든  $k \geq 1$ 에 대해 임의벡

터  $D_k$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$D_k = \left( \bigotimes_{n=1}^k A_{-n} \right) \otimes B_{-k} \quad (4)$$

또한 식 (3)에서  $C(x)$ 는 행렬의 대각원소들이  $-x$ 인 대각행렬(diagonal matrix)이다. 임의벡터  $D_k$ 의  $i$ 번째 원소인  $D_k^i$ 는 개방형 max-plus 선형 시스템에 상응하는 task graph에서 처음 노드에서  $i$ 번째 노드까지의 주공정시간(일종의 critical path time)을 말하며, 서비스 시간 확률변수의 선형함수로 표현된다. 임의행렬  $A_n$ 의 각 원소는 비음(non-negative)이거나  $-\infty$ 이고, 모든 대각 원소는 모두 비음임을 가정한다.

더 나아가, Baccelli 외<sup>[4,5,8,12]</sup>는 max-plus 선형 시스템에서 일시대기시간과 안정대기시간의 특성치가 다음과 같이 포아송 도착과정의 모수에 대한 테일러 시리즈 전개 식으로 표현 가능함을 보였다. 그들의 결과에 의하면 모든  $x(x \geq 0)$ 에 대해 비음이고, 적분가능하고, 유한(bounded)인 함수  $G(x)$ 가  $m+1$ 차까지 미분가능하다면, 노드  $i$ 에서의 시스템 안정대기시간의 특성치  $G(W^i)$ 는 다음과 같다.

$$E[G(W^i)] = \sum_{k=0}^m \lambda^k E[q_{k+1}(D_0^i, D_1^i, \dots, D_k^i)] + O(\lambda^{m+1}) \quad (5)$$

여기서 함수  $G(\cdot)$ 와 다항함수  $q_k(\dots)$ 는 Baccelli 외<sup>[4,8,12]</sup>에 정의된 것과 같다.

일반적으로 일시대기시간과 달리 특정서비스 시간분포를 갖는 경우 외에는 안정대기시간에 대한 간결한 표현식은 구할 수 없다. 따라서 Ayhan 외<sup>[1,2]</sup>, Baccelli 외<sup>[4,8,12]</sup>와 Seo<sup>[16,17]</sup>는 안정대기시간의 특성치에 대한 분석을 위해 상수 서비스시간을 갖는 max-plus 선형 시스템이 다음과 같이 임의벡터  $D_m^i$ 가 ultimately periodic한 형태를 만족함을 가정하였다.

$$D_m^i = \begin{cases} \eta_m^i & \text{for } m = 0, \dots, \xi_i - 1 \\ \eta_{\xi_i}^i + (m - \xi_i)a_i & \text{for } m \geq \xi_i \end{cases} \quad (6)$$

상수 서비스시간을 갖는 모든 대기행렬 망이 식 (3)의 형태를 만족하지는 못하지만, 잘 알려진 대부분의 시스템이 이러한 가정을 만족한다. 식 (6)에서  $\eta_m^i (m = 0, 1, \dots, \xi_i)$ 는 상수,  $0 \leq \eta_0^i \leq \eta_1^i \leq \dots \leq \eta_{\xi_i}^i$ 이고,  $a_i$ 는 실수이고,  $\xi_i$

는 비음인 정수이다. 또한 여기서  $\eta_m^i$ ,  $a_i$ 와  $\xi_i$ 는 망의 관심 노드  $i$ 에 따라 결정되는 값들이다.

식 (3)과 (4)는 임의의 재생도착과정을 갖는 max-plus 선형 시스템에서의 안정대기시간에 유효하다. 하지만, 기존 연구결과를 활용하여 성능 특성치의 정확한 값을 계산하기 위해 본 연구에서는 포아송 도착과정을 가정한다. 분석대상 max-plus 시스템이 일반 서비스시간을 갖는 경우는 식 (1)을 이용하여 임의벡터  $D_k$ 에 대한 표현식을 도출한 후 식 (5)를 이용하여 다양한 시스템 성능 특성치를 구할 수 있다. 반면에 상수 서비스시간이고 도출한 임의 벡터  $D_k$ 가 식 (6)과 같이 ultimately periodic한 조건을 만족하는 경우는 기존 연구결과인 고차평균, Laplace 변환, 꼬리확률과 같은 안정대기시간의 성능 특성치에 대한 간결한 표현식을 이용하여 정확한 값을 구할 수 있다(참조 Ayhan과 Seo<sup>[1,2]</sup>).

다음 절에서는 본 연구의 결과인 통신차단규칙을 따르는 유한버퍼 조립형 대기행렬 망의 안정대기시간에 대한 표현식을 소개하고자 한다.

### 3. 통신차단규칙을 따르는 유한버퍼 조립형 대기행렬 망의 대기시간

유한버퍼로 인한 차단규칙은 크게 통신차단규칙과 제조차단규칙으로 구분할 수 있다. 통신차단규칙에 따르면 노드  $j$ 에 있는 부품은 노드  $j+1$ 에 여유 공간이 있을 때까지 노드  $j$ 에서 공정을 시작하지 못한다. 반면에 제조차단규칙은 노드  $j$ 에 있는 부품은 노드  $j$ 에서 공정을 마친 후 노드  $j+1$ 에 여유 공간이 있는지 확인한 후 여유 공간이 있으면 노드  $j+1$ 로 이동하고 여유 공간이 없을 경우에는 노드  $j+1$ 로 이동하지 못하고 노드  $j$ 에 남아있어서 노드  $j$ 의 서버를 점유한다.

본 연구의 분석대상인 통신차단규칙을 따르는 단순 조립형 유한버퍼 대기행렬(simple fork-and-join queue) 모형은 다음 그림 1과 같으며, 이에 상응하는 이벤트 그래프는 그림 2와 같다. 시스템은 3개의 단일서버 노드(기계 1, 기계 2, 기계 3)로 구성되어 있으며, 하나의 재생도착과정에 따라 도착한 부품은 기계 1과 기계 2에 동시에 도착함을 가정한다. 하나의 재생도착과정을 가정한 이유는 두 개의 재생도착과정이 하나의 노드에서 만나는 join형 모형의 경우 재생도착과정의 모수가 같더라도 안정 상태(stationary state 또는 steady-state)에 도달하지 못하기 때문이다(참조 Baccelli 외<sup>[3]</sup>, page 369). 다시 말하면, 지수

분포 재생도착과정인 경우에 두 도착과정의 모수가 다른 경우뿐만 아니라 같더라도 null recurrent Markov Chain이 되어 안정 상태에 이르지 못하게 된다. 안정 상태는 일정시간이 지난 후 시스템이 도달하게 되는 일정한 평균 수준으로 시간 또는 반복횟수에 대한 극한치가 존재함을 의미한다. 기계 1과 기계 2에서 작업을 마친 부품은 기계 3(조립기계)로 이송되어 조립공정을 거친다. 조립기계에서는 기계 1과 기계 2에서 공정을 마친 부품 1개씩이 짝을 이루어 조립되어 1개의 조립품이 됨을 가정한다.

각 기계에서의  $n$ 번째 서비스시간( $\sigma_n^1, \sigma_n^2, \sigma_n^3$ )은 서로 독립이고 상수 또는 겹침이 없는 시간으로 가정하자. 각 기계에서의 작업은 선착순 규칙(FIFO)과 통신차단규칙에 따라 제공된다. 여기서 겹침이 없는 서비스시간은 Wan과 Wolff<sup>[19]</sup>에서 정의된바와 같이 ‘with respect to tasks’로 정의한다. 즉, 두 노드  $i \neq j$ 에 대해  $\sigma_m^i \geq \sigma_n^j$ (또는  $\sigma_m^i \leq \sigma_n^j$ )이 모든  $m$ 과  $n$ 에 대하여 만족됨을 말한다.

또한, 기계 1과 기계 2는 무한크기의 버퍼를 가지며, 조립기계는 각 기계로부터의 이송되는 부품을 위해 2개의 유한버퍼( $K_1, K_2$ )를 가진다. 유한버퍼의 크기  $K_1$ 과  $K_2$ 는 서비스 중인 부품에 대한 공간을 포함한 것으로 가정한다.

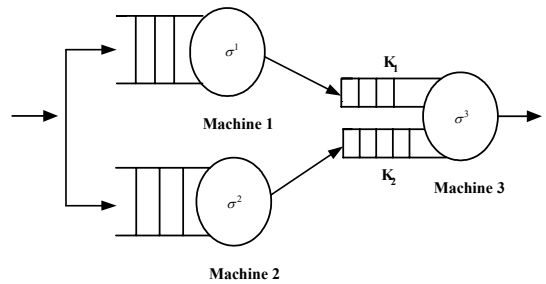


그림 1. 유한버퍼 조립형 대기행렬 망

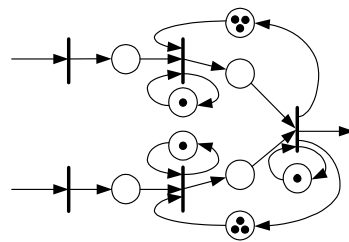


그림 2. 유한버퍼 조립형 대기행렬 망의 이벤트 그래프 ( $K_1 = K_2 = 3$ )

분석대상 시스템의 이벤트 그래프로부터 식 (1)과 같이 각 노드에서의 서비스 시작시점에 대한 계차방정식을 정의하면, 임의행렬  $A$ 와  $B$ 를 도출할 수 있다. 도출된 임의행렬  $A$ 와  $B$ 로부터 식 (4)를 이용하여 임의벡터  $D_n$ 의 표현식을 유도할 수 있다. 이후 소개되는 임의벡터  $D_n$ 의 표현식은 이와 같은 방법으로 도출한 것으로 시간소모적인 유도과정은 생략한다.

무한버퍼인 경우 기계  $i(i=1,2,3)$ 에서  $n+1$ 번째 서비스 시작시점  $X_{n+1}^i$ 은

$$\begin{aligned} X_{n+1}^1 &= \sigma_n^1 \otimes X_n^1 \oplus T_{n+1} \\ X_{n+1}^2 &= \sigma_n^2 \otimes X_n^2 \oplus T_{n+1} \\ X_{n+1}^3 &= \sigma_{n+1}^1 \otimes X_{n+1}^1 \oplus \sigma_{n+1}^2 \otimes X_{n+1}^2 \oplus \sigma_n^3 \otimes X_n^3 \end{aligned}$$

와 같다. 이 표현식으로부터 상수 서비스시간을 가정(즉, 모든  $n(\geq 0)$ 에 대해서  $\sigma_n^i = \sigma^i$ )하고 일반대수로 표현하면 다음과 같이 정리된다. 각 노드에서의 서비스 시작시점은  $M/D/1$  모형으로 표현된다.

$$\begin{aligned} D_n^1 &= n\sigma^1 \text{ for } n \geq 0, \\ D_n^2 &= n\sigma^2 \text{ for } n \geq 0, \\ D_n^3 &= \max\{\sigma^1, \sigma^2\} + (n)\max\{\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\} \text{ for } n \geq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

페트리 넷에서는 유한버퍼 시스템의 동적인 행태를 이벤트 그래프를 통하여 무한버퍼 시스템에서 동일하게 표현하는 것이 가능하다. 이는 초기 마킹(initial marking)이  $c(c > 1)$ 개인 플레이스(place)를 마킹이 1개인  $c$ 개의 플레이스로 확장하고 이들을 0인 소요시간을 갖는 가상 트랜지션(dummy transition)으로 연결함으로써 가능하다(Chapter 3 of Hasenfuss<sup>[12]</sup>). 이렇게 확장된 무한버퍼 조립형 대기행렬 망에 대한 이벤트 그래프로부터 통신차단 규칙하의 임의행렬  $D_n^i$ 에 대한 표현식을 다음과 같이 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned} X_{n+1}^1 &= \sigma_n^1 \otimes X_n^1 \oplus \sigma_{n-K_1+1}^3 \otimes X_{n-K_1+1}^3 \oplus T_{n+1} \\ X_{n+1}^2 &= \sigma_n^2 \otimes X_n^2 \oplus \sigma_{n-K_2+1}^3 \otimes X_{n-K_2+1}^3 \oplus T_{n+1} \\ X_{n+1}^3 &= \sigma_{n+1}^1 \otimes X_{n+1}^1 \oplus \sigma_{n+1}^2 \otimes X_{n+1}^2 \oplus \sigma_n^3 \otimes X_n^3 \end{aligned}$$

여기서  $m < 0$ 이면  $X_m^i = 0$ 임을 가정하자.

앞서 무한버퍼인 경우와 마찬가지로, 상수 서비스를 가

정하고 일반대수를 이용하면 버퍼의 크기에 따라 다음을 얻을 수 있다.

Proposition 1. 상수 서비스시간을 갖는 유한버퍼 3-노드 조립형 대기행렬 망의 임의벡터  $D_n^i$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{i) 경우 1: } & K_1 = 1, K_2 = 1, \\ & D_n^1 = n[\sigma^3 + \max\{\sigma^1, \sigma^2\}] \text{ for } n \geq 0, \\ & D_n^2 = n[\sigma^3 + \max\{\sigma^1, \sigma^2\}] \text{ for } n \geq 0, \\ & D_n^3 = \max\{\sigma^1, \sigma^2\} + n[\sigma^3 + \max\{\sigma^1, \sigma^2\}] \\ & \text{for } n \geq 0. \\ \text{ii) 경우 2: } & K_1 = 1, K_2 \geq 2, \\ & D_0^1 = 0, \\ & D_n^1 = \sigma^3 + \max\{\sigma^1, \sigma^2\} + (n - K_1)\max\{\sigma^1 + \sigma^3, \sigma^2\} \\ & \text{for } n \geq K_1, \\ & D_n^2 = n\sigma^2 \text{ for } 0 \leq n < K_2, \\ & D_n^2 = \max\left\{n\sigma^2, \sigma^3 + \max\{\sigma^1, \sigma^2\} + (n - K_2)\max\{\sigma^1 + \sigma^3, \sigma^2\}\right\} \\ & \text{for } n \geq K_2, \\ & D_n^3 = \max\{\sigma^1, \sigma^2\} + (n)\max\{\sigma^1 + \sigma^3, \sigma^2\} \\ & \text{for } n \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) 경우 3: } & K_1 \geq 2, K_2 \geq 2, \\ & D_n^1 = n\sigma^1 \text{ for } 0 \leq n < K_1, \\ & D_n^1 = \max\left\{n\sigma^1, \sigma^3 + \max\{\sigma^1, \sigma^2\} + (n - K_1)\max\{\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\}\right\} \\ & \text{for } n \geq K_1, \\ & D_n^2 = n\sigma^2 \text{ for } 0 \leq n < K_2, \\ & D_n^2 = \max\left\{n\sigma^2, \sigma^3 + \max\{\sigma^1, \sigma^2\} + (n - K_2)\max\{\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\}\right\} \\ & \text{for } n \geq K_2, \\ & D_n^3 = \max\{\sigma^1, \sigma^2\} + (n)\max\{\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\} \text{ for } n \geq 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Remark 1. 조립기계의 두 버퍼의 크기가  $K_1 = 1$ 와  $K_2 = 1$ 인 경우에는 일반적인  $M/D/1$  모형과 같아진다. 즉, 기계 1과 기계 2에서 가공을 시작할 때까지의 시간인  $W^1$ 와  $W^2$ 는  $\sigma^3 + \max\{\sigma^1, \sigma^2\}$ 를 상수 서비스시간으로 갖는  $M/D/1$  모형으로, 조립기계에서 가공을 시작할 때까지의 시간인  $W^3$ 은 여기에 조립기계까지 도달하는 시간인  $\max\{\sigma^1, \sigma^2\}$ 가 추가된 모형이다.

Remark 2.  $K_1 \geq 2, K_2 = 1$  인 경우는  $K_1 = 1, K_2 \geq 2$  에 대한 표현식에서 노드 1과 2를 바꾸어 생각하면 동일한 표현식을 얻을 수 있다.  $K_1 = 1, K_2 \geq 2$  인 경우 조립 기계에서의 대기시간인  $W^3$ 은  $\max\{\sigma^1 + \sigma^3, \sigma^2\}$ 를 상수 서비스시간으로 갖는  $M/D/1$  모형의 대기시간에 조립 기계까지의 도달시간인  $\max\{\sigma^1, \sigma^2\}$ 이 추가된 것과 같다.

Remark 3. 앞서 소개된 표현식에  $\sigma^1$  또는  $\sigma^2$ 를 0으로 두면 Seo<sup>[16]</sup>에 소개된 2-노드 유한버퍼 일렬대기행렬에서의 각 노드의 대기시간과 동일하게 됨을 알 수 있다.

Remark 4. 식 (7)과 (8)로부터 두 버퍼의 크기가 모두 2보다 큰 경우 조립형 대기행렬 망이 상수 서비스시간을 갖는 경우 조립기계에서 가공이 시작할 때까지의 시간인  $W^3$ 은 유한버퍼의 크기와 무관함을 알 수 있다. 또한, 통신차단규칙하에서 시스템 체류시간은 대기시간 ( $W^3$ )과 조립기계에서의 가공시간( $\sigma^3$ )의 합이므로 시스템 체류시간 역시 유한버퍼의 크기와 무관하다. 이것은 일렬대기행렬 망의 경우에 이미 잘 알려진 사실이지만(참조 Whitt<sup>[20]</sup>), 조립형 모형에 대해서도 성립됨을 확인할 수 있다.

더 나아가, 겹침이 없는 서비스시간의 경우에는 앞서 겹침이 없는 서비스시간을 ‘with respect to tasks’의 관점으로 정의하기로 하였기 때문에 퇴화 확률변수들(상수 서비스시간, degenerate random variables)의 합을 서로 독립인 확률변수들(i.i.d. random variables)의 합으로 표현 가능하다. 또한, 앞서 도착시점을 음의영역에서 정의하였기 때문에 겹침이 없는 서비스시간의 경우 한 노드에서의 고객들의 서비스시간을 구분하기 위하여 도착시점에 대한 첨자(음의 순서)를 추가하면 Proposition 1을 다음 Corollary와 같이 쓸 수 있다.

Corollary 1. 겹침이 없는 서비스시간을 갖는 유한버퍼 3-노드 조립형 대기행렬 망의 임의벡터  $D_n^i$ 는 다음과 같다.

i) 경우 1:  $K_1 = 1, K_2 = 1,$

$$D_n^1 = \sum_{\ell=1}^n [\sigma_{-\ell}^3 + \max\{\sigma_{-\ell}^1, \sigma_{-\ell}^2\}] \text{ for } n \geq 0,$$

$$D_n^2 = \sum_{\ell=1}^n [\sigma_{-\ell}^3 + \max\{\sigma_{-\ell}^1, \sigma_{-\ell}^2\}] \text{ for } n \geq 0,$$

$$D_n^3 = \max\{\sigma_0^1, \sigma_0^2\} + \sum_{\ell=1}^n [\sigma_{-\ell}^3 + \max\{\sigma_{-\ell}^1, \sigma_{-\ell}^2\}]$$

for  $n \geq 0.$

ii) 경우 2:  $K_1 = 1, K_2 \geq 2,$

$$D_0^1 = 0,$$

$$D_n^1 = \sigma_{-(n-K_1+1)}^3 + \max\{\sigma_{-(n-K_1+1)}^1, \sigma_{-(n-K_1+1)}^2\} + \max\left\{\sum_{\ell=1}^{n-K_1} (\sigma_{-\ell}^1 + \sigma_{-\ell}^3), \sigma_{-\ell}^2\right\}$$

for  $n \geq K_1,$

$$D_n^2 = \sum_{\ell=1}^n \sigma_{-\ell}^2 \text{ for } 0 \leq n < K_2,$$

$$D_n^2 = \max\left\{\sum_{\ell=1}^n \sigma_{-\ell}^2, E_1^*\right\} \text{ for } n \geq K_2,$$

$$E_1^* = \sigma_{-(n-K_2+1)}^3 + \max\{\sigma_{-(n-K_2+1)}^1, \sigma_{-(n-K_2+1)}^2\} + \max\left\{\sum_{\ell=1}^{n-K_2} (\sigma_{-\ell}^1 + \sigma_{-\ell}^3), \sigma_{-\ell}^2\right\}$$

$$D_n^3 = \max\{\sigma_0^1, \sigma_0^2\} + \max\left\{\sum_{\ell=1}^n (\sigma_{-\ell}^1 + \sigma_{-\ell}^3), \sum_{\ell=1}^n \sigma_{-\ell}^2\right\}$$

for  $n \geq 0.$

iii) 경우 3:  $K_1 \geq 2, K_2 \geq 2,$

$$D_n^1 = \sum_{\ell=1}^n \sigma_{-\ell}^1 \text{ for } 0 \leq n < K_1,$$

$$D_n^1 = \max\left\{\sum_{\ell=1}^n \sigma_{-\ell}^1, E_2^*\right\} \text{ for } n \geq K_1,$$

$$E_2^* = \sigma_{-(n-K_1+1)}^3 + \max\{\sigma_{-(n-K_1+1)}^1, \sigma_{-(n-K_1+1)}^2\} + \max\left\{\sum_{\ell=1}^{n-K_1} \sigma_{-\ell}^1, \sum_{\ell=1}^{n-K_1} \sigma_{-\ell}^2, \sum_{\ell=1}^{n-K_1} \sigma_{-\ell}^3\right\}$$

$$D_n^2 = \sum_{\ell=1}^n \sigma_{-\ell}^2 \text{ for } 0 \leq n < K_2,$$

$$D_n^2 = \max\left\{\sum_{\ell=1}^n \sigma_{-\ell}^2, E_3^*\right\} \text{ for } n \geq K_2,$$

$$E_3^* = \sigma_{-(n-K_2+1)}^3 + \max\{\sigma_{-(n-K_2+1)}^1, \sigma_{-(n-K_2+1)}^2\} + \max\left\{\sum_{\ell=1}^{n-K_2} \sigma_{-\ell}^1, \sum_{\ell=1}^{n-K_2} \sigma_{-\ell}^2, \sum_{\ell=1}^{n-K_2} \sigma_{-\ell}^3\right\}$$

$$D_n^3 = \max\{\sigma_0^1, \sigma_0^2\} + \max\left\{\sum_{\ell=1}^n \sigma_{-\ell}^1, \sum_{\ell=1}^n \sigma_{-\ell}^2, \sum_{\ell=1}^n \sigma_{-\ell}^3\right\}$$

for  $n \geq 0.$

앞서 언급한 바와 같이, 이와 같이 도출된 임의행렬  $D_n$ 에 대한 표현식은 특정 재생도착과정을 가정하지 않고 도출된 것이며, 또한 임의벡터  $D_n$ 은 식 (6)에 정의된 특정형태(ultimately periodic)를 만족함을 알 수 있다. 재생 도착과정의 모수에 대한 테일러 시리즈 전개식을 이용하여 안정대기시간의 다양한 성능 특성치를 구할 수 있다. 하지만, 포아송 도착과정 이외의 경우에는 성능 특성치에

대한 간결한 표현식이 아직 밝혀져 있지 않다.

### 4. 예 제

이 절에서는 수치 예를 통해 도출한 표현식의 정확성을 검증하고 조립형 대기행렬 모형에서 대기시간과 유한 버퍼 크기와의 특성을 확인해보고자 한다.

상수 서비스시간과 겹침이 없는 서비스시간에 대한 임의행렬  $D_n$ 의 표현식을 재생도착과정에 대한 테일러 시리즈 전개식에 대입하여 시스템의 안정대기시간과 관련된 성능 특성치를 계산할 수 있다. 하지만, 본 절에서는 불필요한 계산상의 복잡성을 피하기 위해 상수 서비스시간을 가정하고, 기존 연구결과인 안정대기시간의 평균에 대한 간결한 표현식을 이용하기 위해 재생도착과정으로 포아송 도착과정을 가정한다. 동일한 방법으로 Laplace 변환과 꼬리확률과 같은 성능 특성치의 값도 계산가능하다.

수치 예의 모형은 다음과 같다. 재생도착과정은 모수  $\lambda$ 를 갖는 포아송 도착과정을 가정하고, 기계 1과 2의 상수 서비스시간은  $\sigma^1 = 1.0$ 와  $\sigma^2 = 4.0$ 로 가정하자. 조립기계인 기계3의 상수 서비스시간은  $\sigma^3 = 6.0$ 로, 기계 1과 기계 2로부터 이동되는 부품을 위한 각 버퍼의 크기는  $K_1$ 과  $K_2$ 로 두자. 이러한 분석 대상 시스템의 모수들을 도출된 임의행렬  $D_n$ 의 표현식에 대입하고, 평균 안정대기시간에 대한 간결한 표현식을 이용하면 다음 표와 같은 값을 구할 수 있다.

표 1에서 표 4까지는 유한버퍼 크기에 따른 임의행렬  $D_n$ 의 표현식의 정확도를 시뮬레이션 결과(Arena 12)와 비교한 것이다. 다양한 도착률(또는 제공로드)에 대한 수치 예의 결과를 보면 도출된 표현식이 시뮬레이션 결과와 매우 유사함을 알 수 있다.

표 1로부터 Remark 1에서 언급한 바와 같이 기계 1과

표 1.  $K_1 = 1, K_2 = 1$ 일 때 평균 안정대기시간

$\lambda$	$E(W^1)$		$E(W^2)$		$E(W^3)$	
	Exact Solution	Simulation	Exact Solution	Simulation	Exact Solution	Simulation
$\lambda = 0.01$	0.555556	0.5631	0.555556	0.5631	4.555556	4.5631
$\lambda = 0.05$	5.000000	5.0617	5.000000	5.0167	9.000000	9.0167
$\lambda = 0.09$	45.000000	43.8031	45.000000	43.8031	49.000000	47.8031
$\lambda = 0.095$	95.000000	91.9740	95.000000	91.9740	99.000000	95.9728

표 2.  $K_1 = 1, K_2 = 2$ 일 때 평균 안정대기시간

$\lambda$	$E(W^1)$		$E(W^2)$		$E(W^3)$	
	Exact Solution	Simulation	Exact Solution	Simulation	Exact Solution	Simulation
$\lambda = 0.01$	0.514875	0.5239	0.090994	0.0956	4.263441	4.2701
$\lambda = 0.05$	3.073819	3.0684	0.869915	0.8694	5.884615	5.9914
$\lambda = 0.09$	7.986686	7.9348	3.845635	3.8098	9.959459	9.9125
$\lambda = 0.095$	9.073285	9.0311	4.677426	4.6460	10.947761	10.9086

표 3.  $K_1 = 2, K_2 = 2$ 일 때 평균 안정대기시간

$\lambda$	$E(W^1)$		$E(W^2)$		$E(W^3)$	
	Exact Solution	Simulation	Exact Solution	Simulation	Exact Solution	Simulation
$\lambda = 0.01$	0.021722	0.0234	0.090415	0.0948	4.191489	4.1979
$\lambda = 0.05$	0.527353	0.5270	0.758107	0.7560	5.285714	5.2814
$\lambda = 0.09$	2.283139	2.2584	2.529739	2.5042	7.521739	7.4916
$\lambda = 0.095$	2.683593	2.6613	2.923874	2.9009	7.976744	7.9504

표 4.  $K_1 = 3, K_2 = 3$  일 때 평균 안정대기시간

$\lambda$	$E(W^1)$		$E(W^2)$		$E(W^3)$	
	Exact Solution	Simulation	Exact Solution	Simulation	Exact Solution	Simulation
$\lambda = 0.01$	0.005471	0.0059	0.083337	0.0867	4.191489	4.1979
$\lambda = 0.05$	0.103418	0.1026	0.512627	0.5106	5.285714	5.2814
$\lambda = 0.09$	0.819059	0.8062	1.454360	1.4394	7.521739	7.4916
$\lambda = 0.095$	1.036855	1.0247	1.682764	1.6691	7.976744	7.9504

기계 2에서의 안정대기시간이 같음을 확인할 수 있고, 안정대기시간의 평균이  $\sigma^3 + \max\{\sigma^1, \sigma^2\}$  를 상수 서비스 시간으로 갖는  $M/D/1$  모형과 정확히 일치함을 알 수 있다. 또한 Remark 4에서 언급한 바와 같이 조립기계(기계 3)의 두 버퍼  $K_1$ 과  $K_2$ 가 모두 2보다 큰 경우 조립기계까지의 안정대기시간  $W^3$ 는 버퍼의 크기와 무관함을 확인할 수 있다. 결국 이것은 무한크기의 버퍼를 갖는 경우와 같아짐을 의미한다(참조 식 (7), (8)). 표 1에서 표 4를 통해 기대한 바와 같이 평균 안정대기시간은 유한버퍼의 크기가 증가함에 따라 감소함을 확인할 수 있다.

### 5. 결론 및 추후연구

유한버퍼의 차단현상으로 인한 계산상의 복잡성으로 인해 그동안 유한버퍼 대기행렬 망에 대한 분석은 매우 제한적으로 되어왔다. 최근에 max-plus 대수를 활용한 유한버퍼 일렬대기행렬 망에서의 대기시간에 대한 연구가 있었다. 본 연구에서는 그들의 연구를 상수 또는 겹침이 없는 서비스시간을 갖는 조립형 대기행렬 망에 대한 분석으로 확장한 것이다. 다시 말하면, 상수 또는 겹침이 없는 서비스시간을 갖는 유한버퍼 조립형 대기행렬 망에서 안정대기시간에 대한 표현식을 유한버퍼의 크기에 대한 함수의 형태로 도출하여 대기시간과 관련된 시스템 성능 특성을 구해 보았다.

본 연구에서는 3개의 노드로 구성된 간결한 형태의 유한버퍼 조립형 대기행렬 망을 고려하였지만, 이러한 분석 방법은 보다 일반적이고 복잡한 조립형 대기행렬 망의 분석에 활용 가능할 것으로 본다. 또한 유한버퍼로 인한 차단규칙으로 통신차단규칙을 고려하였지만, 제조차단규칙을 고려한 분석을 통하여 두 차단규칙과 안정대기시간과의 관련성을 밝히는 것도 의미가 있을 것으로 생각된다. 더 나아가 기존 연구결과인 일렬대기행렬 망에 대한 분석 결과를 조립형 대기행렬 망에 대한 분석에 적용한다면 보

다 큰 규모의 일반적인 구조를 갖는 대기행렬 망에 대한 분석도 가능할 것이다.

Max-plus 대수를 이용하여 대기시간에 대한 표현식을 도출하는 과정에서 서비스시간의 합에 대한 최댓값을 결정하는 데 어려움이 있어 상수 또는 겹침이 없는 서비스 시간 외의 일반적인 서비스시간을 고려하지 못하였다. 보다 일반적인 서비스 시간을 고려할 수 있는 분석방법과 계산방법에 대한 연구가 병행되어야 할 것이다.

### 참고 문헌

1. Ayhan, H. and D.-W. Seo, "Laplace transform and moments of waiting times in poisson driven (max,+)-linear systems" *Queueing Systems*, Vol. 37, No. 4, pp. 405-438, 2001.
2. Ayhan, H. and D.-W. Seo, "Tail probability of transient and stationary waiting times in (max,+)-linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 1, pp. 151-157, 2002.
3. Baccelli, F., G. Cohen, G. J. Olsder, and J-P. Quadrat, *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*, John Wiley and Sons, 1992.
4. Baccelli, F., S. Hasenfuss, and V. Schmidt, "Transient and stationary waiting times in (max,+) linear systems with poisson input," *Queueing Systems*, Vol. 26, pp. 301-342, 1997.
5. Baccelli, F., S. Hasenfuss, and V. Schmidt, "Expansions for steady state characteristics in (max,+) linear systems," *Stochastic Models*, Vol. 14, pp. 1-24, 1998.
6. Baccelli, F. and A. M. Makowski, Simple computable bounds for the fork-Join queue, In *proc. Johns Hopkins Conf. Inf. Sci.*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1985.
7. Baccelli, F., A. M. Makowski and A. Shwartz, "The fork-join queue and related systems with synchronization constraints: stochastic ordering and computable bounds,"



- Advanced Applied Probability, Vol. 21, pp. 629-660, 1989.
8. Baccelli, F. and V. Schmidt, "Taylor series expansions for poisson driven (max,+) linear systems," Annals of Applied Probability, Vol. 6, No. 1, pp. 138-185, 1996.
  9. Balsamo, S., L. Donatiello, and N. M. Van Dijk, "Bound performance models of heterogeneous parallel processing systems," IEEE transactions on Parallel Distributed Systems, Vol. 9, pp. 1041-1056, 1998.
  10. Flatto, L., "Two parallel queues created by arrivals with two demands II," SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 45, pp. 861-878, 1985.
  11. Flatto, L. and S. Hahn, "Two parallel queues created by arrivals with two demands I," SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 44, pp. 1041-1053, 1984. Erratum: Vol. 45, pp. 168, 1985.
  12. Hasenfuss, S., "Performance analysis of (max,+)-linear systems via taylor series expansions," Ph.D. thesis, Shaker Verlag, Ulm, 1997.
  13. Heidergott, B., Max-plus linear stochastic systems and perturbation analysis, Springer, 2006.
  14. Nelson, R. and A. N. Tantawi, "Approximation analysis of fork/join synchronization in parallel queues," IEEE Transactions on Computers, Vol. 37, pp. 739-743, 1998.
  15. Raghavan, N. R. S. and N. Viswanadham, "Generalized queueing network analysis of integrated supply chains," International Journal of Production Research, Vol. 39, pp. 205-224, 2001.
  16. Seo, D.-W., "Application of (max,+)-algebra to the waiting times in deterministic 2-node tandem queues with blocking," J. KORMS Society, Vol. 30, No. 1, pp. 149-159, 2005.
  17. Seo, D.-W., "Application of (max,+)-algebra to the waiting times in deterministic 3-node tandem queues with blocking," J. KORMS Society, Vol. 30, No. 2, pp. 73-80, 2005.
  18. Varma, S. and A. Makowski, "Interpolation approximations for symmetric fork-join queues," Performance Evaluation, Vol. 20, pp. 245-2654, 1994.
  19. Wan, Y.-W., and R. W. Wolff, "Bounds for different arrangements of tandem queues with non-overlapping service times," Management Science, Vol. 39, No. 9, pp. 1173-1178, 1993.
  20. Whitt, W., "The best order for queues in series," Management Science, Vol. 31, No. 4, pp. 475-487, 1985.



**서 동 원** (dwseo@khu.ac.kr)

1991 성균관대학교 산업공학과 학사  
 1996 성균관대학교 대학원 산업공학과 석사  
 2002 Georgia Institute of Technology, 산업공학 박사  
 2003~현재 경희대학교 경영대학 경영학부 부교수

관심분야 : 확률과정론, Series Expansion, (Max,+)-algebra, 시뮬레이션



**이 승 만** (seungman.lee@nasa.gov)

1991 한양대학교 산업공학과 학사  
 1994 포항공대 산업공학과 석사  
 1998 Carnegie Mellon University, 정보시스템 석사  
 2002 Georgia Institute of Technology, 산업공학 박사  
 2003~2006, 2010~현재 NASA Ames Research Center, Senior Research Engineer  
 2006~2010 Cognitive Engineering Center, Georgia Institute of Technology, Senior Research Engineer

관심분야 : Agent-Based Modeling and Simulation, Cognitive Systems Engineering, Design, Analysis, and Evaluation of Complex Socio-Technical Systems