대한수학교육학회지 <학교수학> 제 12 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.12, No.4 563-584. Dec. 2010

정사면체 분할 과제에서의 이미지에 기반 한 수학적 사고

한 대 희*

본 연구는 학생들이 일상적인 경험으로부터 형성한 이미지로는 해결하기 어려운 과제에서 학생들이 어떻게 사고하는지, 그리고 자신의 이미지를 어떻게 조작하고 변형하여 과제 해결에 유용한 새로운 이미지를 구성하는지를 고찰하고자 한 것이다. 이 연구를 위해 정사면체를 분할하는 과제를 사용하였으며, 2명의 중학교 1학년 학생의 추론과정을 세밀하게 분석하였다. 두 학생의 사례로부터 이미지에 기반 한 사고를 이미지 형성, 이미지 검토/해석, 이미지 조작/변형, 새로운 이미지의 형성 등의 순환과정과 이미지를 유도하는 언어적 사고와 이미지로부터 파악되는 사실에 기반을 둔 언어적 추론의 순환 과정으로 분석할 수 있음을 확인하였다. 또한 구체적 이미지에 기반 한 사고와 기호적 이미지에 기반 한 사고의 특성 및 그들 사이의 관계를 이해할 수 있었다.

I. 서론

이미지가 인간의 사고에 중요한 역할을 한다는 것은 오래 전부터 인식되어 왔지만 이에 대한 체계적인 연구는 행동주의 심리학이 쇠퇴하고 인지과학이 등장하는 1970년대 말 무렵에 시작되었다. (Kosslyn & Rabin, 1999; Presmeg, 1997) 수학교육분야에서도 전통적으로 수학을 형식적인 논리적 추론을 적용하는 학문으로 여겨 왔으며 그러한 배경에서 이미지에 기반 한 수학적 추론의 중요성이 이 무렵까지 주목받지 못하였다(English, 1997; Wheatley, 1997). 그러나 1980년대 이후 수학 학습에서 이미지에 기반 한 시각적 사고에 대한 활발한 연구가 진행되고 있으며, 1990년대 이후로 수학교육의 핵심적인 연구 영역의 하나가 되고 있다(Presmeg, 2006a; Presmeg, 1997; Wheatley, 1997).

이미지에 기반 한 사고가 수학의 여러 영역에서의 다양한 활동에 중요한 역할을 한다는 것을 보고 하는 많은 연구물들이 있다. 가령, Davis & Maher(1997)는 산술 학습에서 이미지의 영향을 보고하고 있으며, Wheatley(1997)는 대수, 기하, 함수 등의 다양한 영역에서의 이미지에 기반 한 추론의 중요성을 보고하고 있다. 또한 Archavi(2003)는 수학적 문제해결에서 이미지는 직관적 이해와 통찰 그리고 문제해결의 방향제시를 통해 문제해결에 필요한 추론을 할 수 있게 한다는 것을 보고하고 있다. 더 나아가 Fischbein(1993)은 기하 증명을 공간 이미지를 언어적으로 개념화 하는 것으로 파악하고 있다. 우리나라에서도 최근 이미지에 기반 한 시각적 추론의 중요성에 주목한 연구들이 있다(고은성 · 이경화 · 송상헌, 2008; 류현아, 2009; 김재홍, 2010).

이와 같은 시각적 이미지의 중요성을 두 가지 측면에서 이해할 수 있다. 그 하나는 수학

* 청주교육대학교 (handh@cje.ac.kr)

적 개념의 이해, 추론, 문제 해결, 증명 등에서 적절한 시각적 이미지를 형성하고 활용하는 학생들이 성공적이었다는 점이다. 또 다른 하나는 시각적 이미지를 적절하게 형성하지 못한 학생들은 그와 관련된 수학 학습에서 성공적이지 못하였다는 점이다. 후자와 관련하여 Presmeg(1997)은 이미지가 갖는 구체성이 수학 학습에서 어려움의 근원이 될 수 있으며, 하나의 예가 전형적인 것에 제한되지 않는다는 것을 인식하기 어렵다는 것 등을 제시하면서 "개인의 사고에서 명령 없이 생겨난다는 점에서 그리고 모순되는 증거에 직면해도 여전히 유지된다는 점에서 통제하기 어려운 처음의 상"(Presmeg, 1997, p.342)의 문제점을 지적하고 있다.

학생들이 다양한 수학적 활동에 적절한 이미지를 사용할 수 있도록 돕는 것은 수학교육의 중요한 과제 중의 하나이다. 특히 학생들이 처음에 자신이 가지고 있는 이미지를 어떻게 조작하고 변형하여 이해, 추론, 문제해결 등에 유용한 새로운 이미지를 구성하는가는 수학교육의 중요한 문제이다. 그러나 지금까지 우리나라에서는 구체적인 문제 해결의 맥락에서 학생들이 어떻게 이미지를 이용한 사고를 진행하는지, 이 과정에서 어떤 이미지가 어떻게 만들어지는지, 그 이미지들이 어떤 기능을 하고 있는지, 그리고 이미지를 이용한 사고를 어떻게 촉진시킬 수 있는지 등에 대한 상세한 연구가 부족한 실정이었다.

이에 본 연구는 학생들이 일상적인 경험으로부터 형성한 이미지로는 해결하기 어려운 과제에서 학생들이 어떻게 사고하는지, 그리고 자신의 이미지를 어떻게 조작하고 변형하여 과제 해결에 유용한 새로운 이미지를 구성하는지를 고찰하고자 한 것이다. 이를 위하여 이미지와 이미지에 기반 한 사고에 관한 선행 연구를 고찰하고, 일상적인 학습 경험에 의해 생겨난 이미지로는 해결하기 힘든 과제를 개발할 것이다. 이어서, 이 과제를 해결하는 과정에서 이미지에 기반 한 사고의 특성을 잘 드러내는 학생의 사례를 발굴하여, 이들이 어떻게 이미지에 기반 한 사고를 진행하는 지를 분석하고 이미지에 기반 한 사고의 특징과 교수·학습상의 시사점 등을 분석해 볼 것이다.

Ⅱ. 이미지에 기반 한 수학적 사고

수학 학습에서 이미지[1)]를 이용하는 사고에 관한 연구는 공간 능력, 시각화, 표상 등의 상이한 용어를 사용하는 다양한 맥락에서 진행되어 왔다. 연구자들은 각자의 고유한 관심사에 따라 유사하면서도 조금씩 상이한 용어를 사용하여 왔다. 여기서는 이미지 개념을 중심으로 수학 학습에서 사용되는 이미지에 기반 한 사고[2)]를 고찰해 볼 것이다.

1. 이미지

1) 이미지는 시각적 이미지, 청각적 이미지, 촉각적 이미지 등을 포괄하는 개념으로 사용되기도 한다. 그러나 수학 학습은 주로 시각적 이미지와 관련되어 있으며 이하에서 이미지는 시각적 이미지를 의미하는 것으로 사용된다.

2) 이미지에 관한 연구가 1970년대 후반에서야 본격적으로 이루어졌던 것은 이미지가 직접 관찰 할 수 없는 심리 현상이라는 점 때문이다. Kosslyn & Rabin (1999)이 '내관적 딜레마'라고 언급한 바와 같이, 어떤 사람의 머릿속에 떠오르는 이미지가 어떤 것인지는 그 사람이 아니고서는 정확하게 파악할 수 없다. 학습자의 마음속에 떠오르는 이미지에 관한 연구는 필연적으로 그 학습자가 자신의 머릿속에 있는 이미지를 밖으로 들어낸 그림, 기호 혹은 서술적 표현(representation)에 의존할 수밖에 없다. 따라서 이미지에 기반 한 사고를 심적 이미지와 함께 그림이나 다이어그램과 같은 심적 이미지의 외적 표현을 이용하여 사고하는 것을 포괄하는 의미로 사용하기로 한다.

학습과 이미지를 연결시키는 연구는 1970년대 초기 심리학 분야의 단어 학습에 관한 연구에서 등장한다. 여기서는 이미지를 떠올릴 수 있는 단어의 학습이 그렇지 않은 단어의 학습보다 더 수월하다거나, 이미지를 떠올리면서 단어를 기억하는 것이 더 잘 기억된다는 것 등이 보고되었다(Kosslyn & Rabin, 1999).

수학 분야에서는 오래전부터 이미지를 선호하는 성향을 보이는 수학자와 대수적 기호를 선호하는 성향의 수학자가 있다는 것(Hadamard, 1945)이 알려져 왔으며, Krutetskii(1976)는 학생들이 수학학습에서 언어적/논리적으로 사고하는가와 시각적/회화적으로 사고하는가를 수준과 유형으로 나누어 분석하여 수학적 재능을 분류하고자 하였다.

1980년대 이후 인지과학 분야에서 이미지에 관한 연구와 수학교육분야에서의 이미지에 기반 한 수학적 사고에 대한 연구가 활발해 지면서, 수학 학습에서 사용되는 이미지에 대한 개념이 변화하고 있다. 일상적으로 이미지는 '마음속에 떠오르는 그림'이라는 의미로 사용되어 왔다. Presmeg(1997)에 의하며 이와 같은 이미지의 개념은 아리스토텔레스 시대까지 거슬러 올라가는 오래된 개념이었으나, 최근의 이미지에 대한 연구에서 이 개념이 변모되고 있다고 한다. Presmeg은 학생들이 사용하는 이미지에는 다양한 유형이 있으며, 특히 그림과 같은 구체성을 띄는 '구체적 이미지'와는 다른 '패턴 이미지'가 사용되고 있음을 확인하였고 패턴 이미지가 학생들의 일반화에 중요한 역할을 하고 있음을 강조하고 있다. Presmeg은 이와 같은 유형의 이미지를 포괄하는 의미로 이미지를 "시각적이거나 공간적인 정보를 기술하는 정신적 구성물"(Presmeg, 1997, p.339)로 정의할 것을 제안하고 있다.

Wheatley(1997)는 또한 최근 여러 연구자들이 사용하고 있는 이미지와 관련된 개념을 비교하고 있는데, 그에 따르면 수학 학습에서 사용되는 이미지에는 그림과 같은 구체성을 가진 이미지와 이것을 추상화한 이미지의 두 가지 이미지 개념이 있다고 한다. Cobb이 사용하고 있는 '이미지 독립'과 '이미지 기반', Lakoff가 사용하고 있는 '풍부한 이미지'와 '이미지 스키마', Presmeg의 '구체적 이미지'와 '패턴 이미지' 등의 구분이 두 가지 유형의 이미지를 설명하고자 하는 용어들이다. 전자의 경우는 지각 경험과 관련하여 구체성을 띄는 고전적 의미의 이미지를 표현한 것이라면, 후자의 경우는 한 단계 더 구조적이고 추상적인 그래서 수학적 사고에 보다 중요한 역할을 하는 새롭게 주목받고 있는 이미지 개념을 표현한 것이라고 할 수 있다.

Duval(1999)은 수학적 사고를 기호학적 관점으로 분석하는 분석틀을 제시하면서 위와 유사한 논의를 발전시키고 있다. Duval에 따르면 사물에 대한 지각에서 비롯되는 시각(vision)과 기호적 표현에 의한 시각화(vision)를 구분할 필요가 있다. 사물에 직접 경험함으로써 생겨난 이미지나 그것에 대한 표현은 아이콘과 같이 자동적으로 그 의미를 파악할 수 있게 해 준다. 그러나 기하학적 도형이나 그래프 등은 시각적으로 지각하는 것 자체만으로는 그 표현들이 담고 있는 수학적 관계나 의미를 곧 바로 파악할 수 있는 것이 아니다. 시각화는 시각으로는 볼 수 없는 기호적 표현 속에 담겨진 수학적 관계를 보는 것을 의미하며 오랜 시간의 훈련을 필요로 한다. 이와 같은 구분에 따라 이미지는 시각적 지각으로서의 이미지와 내면화된 기호적 이미지로 구분될 수 있다.

최근 Presmeg(2006b)은 Peirce의 기호학적 관점으로 이미지와 그것의 표현(inscription) 개념을 파악하고자 하고 있다. Peirce는 기호를 이

이콘적 기능을 하는 기호와 인덱스적 기능을 하는 기호 그리고 상징적 기능을 하는 기호 등의 세 가지 유형으로 분류하고 있다. 아이콘적 기호는 어떤 사람의 사진이 그 사람을 나타내는 것과 같이 기호와 대상 사이에 물리적인 닮음 관계가 있을 때 사용된다. 인덱스적 기호는 도로 표지판이 도로의 여러 정보를 알려주는 것과 같이 기호와 대상 사이의 지시적 관계가 있을 때 사용된다. 상징적 기호는 대수적 기호와 같이 기호와 대상 간의 관계가 관습적일 때 사용된다. Presmeg은 이미지를 시각적 기호로 보는 관점에 기초하여 학생들이 사용하는 이미지를 위의 세 가지 기호로 나누어 분석하고자 하였다.

이상과 같이 최근의 수학학습과 관련된 이미지에 관한 논의들은 이미지 개념을 감각 경험에서 수동적 자동적으로 떠오른 구체적인 그림과 같은 것에서 보다 추상적이고 구조적인 특성을 가진 지닌 개념으로, 나아가 능동적 해석을 요구하는 기호의 일종으로 확장하고 있다.

2. 이미지에 기반 한 사고의 과정

학습자가 수학적 문제 해결에서 이미지를 이용한 사고를 어떻게 진행하는가를 분석하기 위해 먼저 인지과학에서 제시하는 이미지를 이용한 사고 과정[3]을 살펴보자. Marsonolek & Kosslyn(1992)에 따르면 인지과학에서는 이미지와 같은 추상적 심리 현상을 이해하기 위해 두뇌에서 일어나는 일이 컴퓨터가 정보를 표현하고 조작하는 것과 유사할 것이라는 은유적 가설을 이용하고 있다. 이러한 관점에서 이미지는 두뇌 속에 저장된 정보를 저장하고 사용하는 방식의 하나로 저장된 정보에 의해 형성된 순간적인 지각적 표현이다. Kosslyn(1981)은 시각적 이미지를 이용하는 사고에서 최소한 다음과 같은 4가지로 구분되는 이미지 과정이 있음을 임상적으로 확인하였다: 1)저장된 정보로부터 이미지 생성하기(generation), 2) 생성된 이미지를 유지하기(maintenance)하기, 3) 이미지를 필요에 따라 변형하기(transformation), 4) 이미지를 해석하기(interpretation). Kosslyn은 새로 이사 간 집의 안방에 가구를 어떻게 배치할 것인가라는 질문을 받고 어떻게 이미지를 가지고 사고하게 되는지를 예로 들어 이 과정을 설명하고 있다. 먼저, 방과 가구에 대한 이미지를 생성하여야 하고, 그 이미지는 이 문제를 해결하는 동안 계속 유지되어야 한다. 방에 대한 이미지와 가구에 대한 이미지가 생성되고 나면 상상의 가구를 이리 저리 옮겨 방의 적절한 곳에 배치 시켜야 한다. 그 다음에는 상상한 가구들이 원하는 위치에 정확하게 놓여 있는지를 볼 수 있어야 한다.

위의 Kosslyn의 연구에 기초하여 Clements & Battiista(1992)는 학습자의 이미지 과정을 이미지 가져오기, 이미지 검토하기, 이미지를 변형하고 조정하기, 조정된 이미지를 유지하기 등의 네 가지로 제시하고 있으며(류현아, 1998, p.21에서 재인용), Wheatley & Brown(1994)은 이미지의 구성, 재-표현, 변형, 유지 등의 네 가지로 제시한 바 있다(Presmeg, 1997, p.343에서 재인용). 그러나 Kosslyn에 기초한 이미지 과정 모델을 이용하여 수학 학습에서의 이미지에 기반 한 사고를 설명하기 위해서는 몇 가지 사항을 더 고려하여야 한다.

먼저 위의 모델은 인지과학적 관심에 따라 실험실에서 연구자의 요구에 의해 피험자들이 순수하게 이미지만을 이용하여 사고하는 상황

3) 이미지를 이용한 사고 과정은 image processes를 번역한 것이다. 이하에서는 이를 이미지 과정으로 줄여서 사용할 것이다.

에서 만들어진 것이다. 그러나 수학 학습 상황에서 학생들은 이미 기억하고 있는 정보 이외에 또 다른 정보를 사용할 수 있다. 가령 구체물을 이용하거나 컴퓨터 프로그램 등을 이용하여 자신이 지금까지 경험하고 기억하고 있던 정보 이외의 또 다른 시각적 정보를 얻을 수 있다. 따라서 이미지를 조사하거나 변형하는 것이 반드시 사고 속에서 이미지를 조사, 변형하는 것만이 아니라 이미지를 표현한 그림, 구체물, 컴퓨터 프로그램 등을 이용하여 조사, 조작, 변형하는 것을 포함하여야 한다.

또한, Presmeg(1997)이 Brown & Wheatley의 연구를 언급하면서 지적한 바와 같이 이 모델로는 '통제 불능'의 이미지를 설명하기 어려운 점이 있다. 다시 말해, 이 모델은 이미지를 성공적으로 활용한 경우를 잘 설명하고 있지만 적절한 이미지를 만들어 내지 못한 경우를 설명하기에는 어려움이 있다. Wheatley(1997)는 수학 학습에서 자연스럽게 떠오르는 이미지에 고착되어 적절한 이미지를 형성하지 못하는 학생들의 문제점을 지적하면서 이미지를 구성하고 새롭게 표현하고 변형하는 것의 중요성을 강조하고 있다. Wheatley는 이를 위해 이미지화하기(imaging)라는 용어를 사용하고 있다.

이와 같이 학습자가 이전에 가지고 있는 이미지로는 해결하기 힘든 과제가 주어졌을 때, 학습자가 자신이 가지고 있는 이미지를 어떻게 새롭게 구성해 나가게 되는지를 설명할 수 있는 보다 세부적인 모델이 필요하다. 이를 위해 Duval(1999)이 설명하고 있는 기하 도형을 변형하기 위해 사용하는 3가지 인지적 조작을 참조할 수 있다. Duval은 앞서 시각과 시각화의 구분과 관련하여 살펴본 바와 같이 시각화를 물리적으로 보는 것 이면에 있는 관계나 관계의 조직화를 보는 것으로 생각하였다. 이와 같은 관점에서 주어진 기하 도형을 변형하여 시각화에 이르도록 하는 세 가지 전형적인 인지적 조작을 예시하고 있다. 그 하나는 분해-결합 방법(merelogic)으로 주어진 도형을 분해한 후 이를 결합하여 새로운 도형을 만들거나 부분 도형을 만드는 조작이다. 그 다음은 시각적 방법으로 주어진 도형을 마치 렌즈를 사용하는 것처럼 줄이거나 늘이는 조작이다. 세 번째는 위치 방법으로 그림이 놓여 있는 평면에서 방향을 바꾸는 것이다. 이와 같은 기하 도형을 조작하는 방법은 주어진 이미지에서 새로운 이미지를 만드는 과정을 설명 하는 데 도움을 줄 수 있다.

마지막으로 이미지를 이용한 수학적 사고를 이해하기 위해서 이미지를 이용한 수학적 사고가 이미지만을 이용하는 사고가 아니라는 점을 고려하여야 한다. 개념적으로는 시각적 사고와 언어적/분석적 사고가 구분되지만 수학 학습 상황에서 양자는 서로 밀접하게 관련을 맺고 있다. 따라서 주어진 수학 과제를 해결할 때 시각적 이미지를 다루는 과정과 언어적/분석적 사고가 어떻게 서로에게 영향을 주는지를 고려하여야 한다. 특히, 이미지 개념이 구체적인 그림에서 보다 추상적이고 기호적인 개념으로 발전하면서, 이미지를 이용하는 사고는 마음에서 수동적, 자동적으로 떠오르는 이미지를 사용하는 것을 넘어 학생들이 의도적인 노력을 통해 적극적으로 구성하고 해석해 나가는 활동을 포괄하게 되었다. 따라서 이미지에 상징적 의미를 부여하거나 이를 해석하는 언어적/분석적 사고를 함께 고려해야 한다.

가령, Zazkis, Dubinsky & Dautermann(1996)는 대학생들이 대칭군 D_4을 학습하는 과정에서 시각적인 이미지와 대수적 기호의 사용 사이의 관계를 분석하여 시각적 사고와 분석적 사고의 상호 작용 모델 (VA모델)을 제시하고 있다. 이 모델은 두 가지 사고가 서로 순환적으로 상호작용하면서 수학적 사고가 발전해 가는 것으로

설명한다. 즉, 이전에 시각화한 결과(V_i)를 분석하고(A_i), 이를 통해 새롭고 풍부한 이해를 바탕으로 새로운 시각화(V_{i+1})를 할 수 있게 되며, 점점 더 정교한 분석(A_{i+1})도 가능하게 된다. 이와 같이 두 사고는 순환적으로 상호작용하면서 두 사고는 서로 더 가까워지고, 밀전하게 연결되고 통합된다는 것이다.

한편, Duval(1999) 또한 일상 언어에 의한 명제와 기하 도형 사이의 상호작용으로 증명을 포함한 기하학적 문제 해결을 분석하고자 하였다. 특히 Duval(2006)은 수학적 사고 과정에 작용하는 3가지 종류의 언어적 표현을 제시하고 있다. 먼저 이름이나 표식과 같이 단어나 어구의 뜻을 표시하는 표현이 있다. 다음으로 관계나 성질에 대한 명제를 표시하는 표현 그리고 연역이나 계산과 같은 추론을 표시하는 표현이 있다. 이를 이미지 형성에 영향을 미치는 언어적 사고와 관련시켜 생각하면, 단어나 개념을 통해 이미지화하기 그리고 성질과 관계를 통해 이미지화하기 그리고 추론을 통해 이미지화하기 등이 가능함을 생각할 수 있다.

이상과 같은 선행 연구들로부터 학생들의 이미지에 기반 한 사고 과정을 분석하는 틀을 생각해 볼 수 있다. 이 문제는 다음 장의 분석 방법에서 다시 다루도록 하겠다.

III. 연구 방법

1. 과제

이 연구에서는 학생들이 일상적인 경험으로부터 생겨난 이미지로는 해결하기 어려운 과제에 직면하였을 때 어떻게 사고하는지, 그리고 자신이 가지고 있던 이미지를 어떻게 조작하고 변형하여 새로운 이미지를 만들어내는지 등을 살펴보고자 한다. 이를 위해서는 학생들의 일반적인 학습 경험에서 만들어지는 이미지로는 해결하기 어려운 과제이면서 새로운 이미지를 만들어 내야만 하는 과제를 필요로 한다.

Wheatley(1997)는 초등학교 3학년 학생부터 성인에 이르기까지의 많은 범위의 사람들의 이미지화하기를 이끌어내기 위한 잠재력이 풍부한 과제들을 예시하고 있다. 여기서 등장하는 예는 모서리의 길이가 1미터인 정육면체 모양의 상자를 쌓아서 만든 6미터 크기의 정육면체의 위와 앞 그리고 왼쪽 면에 X표시를 하였다면, 총 216개의 작은 정육면체 중 몇 개의 정육면체에 X표시가 되어 있겠는가를 묻는 과제이다. 이와 유사한 과제로 平林一榮(1999)이 제시한 교수 단원의 예를 들 수 있다. 이 교수 단원은 겉면을 색칠한 정육면체를 각 면에 평행하게 n등분하여 생겨나는 n^3개의 정육면체를 색칠된 면의 수에 따라 분류하는 과제로, 절단하는 횟수를 늘여 가면서 탐구하는 과정에서 일정한 패턴을 찾아내고 이것을 n차원 정입방체의 탐구로 확장하는 것이었다.

이 두 과제는 모두 작은 정육면체를 쌓아서 큰 정육면체를 만들 수 있다든가, 혹은 큰 정육면체를 면에 평행한 평면으로 n등분 하여 잘라내면 n^3개의 작은 정육면체를 만들 수 있다는 성질에서 출발하고 있다. 본 연구에서는 이러한 아이디어를 정사면체로 확장하여 정사면체를 각 면에 평행한 평면으로 잘라내었을 때 어떤 도형이 생겨나는지를 탐구하는 과제를 적용하고자 하였다(한대희, 2006). 구체적으로 본 연구에서 사용하고자 하는 과제는 다음의 3가지이다.

과제1. 주어진 정사면체를 각 면에 평행한 평면으로 선분의 중점을 지나도록 2등분 하였을 때 생겨나는 도형의 종류와 수를 구하여라.

과제2. 주어진 정사면체를 각 면에 평행한 평면으로 삼등분점을 지나도록 3등분한 하였을 때 생겨나는 도형의 종류와 수를 구하여라.

과제3. 이와 같은 과정을 4등분, 5등분, ... 등으로 확장하면서 일반적인 규칙을 찾아보라.[4)]

정사면체를 면에 평행한 평면으로 n등분하면, 정육면체의 경우와는 달리 두 종류의 도형 즉 정사면체와 함께 정팔면체가 생겨난다. 또한 각각의 개수도 $\frac{n(n^2+2)}{3}$와 $\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$으로 정육면체의 경우의 n^3에 비해 훨씬 복잡하다. 뿐만 아니라, 정사면체를 면으로 잘라낸 결과를 직접 만들어 보지 않고 이미지만으로 해결하기는 쉽지 않다. 그러나 n등분된 정사면체 속에 들어 있는 정사면체와 정팔면체는 일정한 규칙에 따라 배치되어 있으며, 이에 관한 이미지를 파악하고 나면 귀납적, 유추적인 방식으로 n등분된 정사면체 속에 들어 있는 정사면체의 수와 정팔면체의 수를 추론할 수 있다.

학생의 연령, 수준 그리고 시각적 사고를 선호하는 성향에 따라 이 과제를 시각적 추론을 통해 해결하는 정도가 다를 수 있다. 어떤 학생의 경우 과제1을 이미지만으로 해결하는 데 상당한 어려움을 겪을 수 있다. 과제2를 이미지(표현)만으로 해결하는 지 못하는 경우에는 구체물을 이용하여 3등분된 정사면체를 실제로 만들어 보도록 할 필요가 있으며, 구체물로 만든 3등분된 정사면체의 관찰을 통해 일반적인 성질이나 규칙을 파악하도록 하고 그 결과를 이용하여 과제3을 해결하도록 유도할 수 있다.

2. 실험 과정과 연구 대상

일상적 학습 경험으로 생겨난 이미지로는 해결하기 힘든 과제를 해결하는 과정에서 이미지에 기반 한 수학적 사고가 어떻게 진행되는지를 살펴보기 위하여 연구 대상자를 다음과 같은 과정에 따라 선정하였다. 먼저, 우리나라 영재교육진흥법에 따라 과학 재단의 지원을 받는 대학 부설 과학영재교육원에 소속된 중학교 1학년 20명으로 구성된 1개 학급에 연구자가 이 과제를 가지고 3시간 단위의 수업을 진행하였다. 그리고 그 과정에서 이미지에 기반 한 수학적 사고의 특성을 잘 드러내는 2명의 학생을 발굴하였다. 대략적인 수업의 진행과정과 연구 대상자 2명의 선정 과정을 소개하면 다음과 같다.

수업은 앞서 제시한 3개의 과제를 순차적으로 해결하는 방식으로 진행되었다. 연구자는 과제를 제시하고 과제를 이해하기 위한 질문에 대한 답변을 한 후, 학생들이 개별적으로 생각하도록 하였다. 여기서 연구자는 최소한으로 개입하고 학생들 스스로 답을 찾도록 유도하였으며, 과제에 대한 답을 찾아내는 것만이 아니라 자신의 생각을 칠판 앞에 나와 전체 학생들에게 설명할 수 있도록 요구하였다. 연구자는 학생들이 과제를 해결하는 동안 학생들의 문제 해결 과정을 관찰하고 기록하였다. 학생들이 탐구하는 동안 의미 있는 시도를 하는 학생이 있는 경우 그 학생에게 어떻게 생각하고 있는지를 질문하였고 이를 기록하였다. 과제별로 충분한 시간을 제공한 후, 의미 있는 시도를 한 학생들을 전체 학생 앞에서 구체물을 사용하지 않고 칠판에 그림을 그려가며 설명하도록 하였다. 학생들이 발표를 한 후 학생들과 함께 풀이 과정을 확인하였다.

정사면체를 2등분하는 과제1은 머릿속의 이미지와 그림만으로 해결하도록 하였으며, 과제2는 처음에는 머릿속의 이미지와 그림만으로 해결하도록 한 뒤, 구체물을 이용하여 자신이 구한 답이 올바른지 확인하도록 하는 방식으로

4) 앞으로 각 면에 평행한 평면으로 n등분 한 정사면체를 'n등분된 정사면체'라고 한다.

진행되었다. 연구자는 구체물을 사용하지 않은 상황에서의 시도와 구체물을 사용하고 난 뒤의 학생들의 사고 과정을 분리하여 기록하였다. 특히, 구체물이 없을 때에 불완전하게 답을 구하였으나 구체물을 이용한 이후에 과제2와 과제3을 의미 있게 진행한 학생들을 중심으로 관찰, 기록하였다.

수업이 끝난 후 수업 과정에서 주목한 학생들의 기록을 분석하였으며, 그 중 본 연구의 목적에 부합하는 2명의 학생을 선정하여 학생의 기록지와 면담 자료 그리고 녹화자료를 집중적으로 분석하였다. 연구 대상자중 한명은 과제2에서 구체물 없이 이미지만을 이용하여 의미 있는 추론을 보여준 학생이며, 다른 한명은 구체물을 이용한 후 새로운 이미지를 만들어 내고 이를 이용하여 과제3을 해결할 수 있는 일반적인 아이디어를 보여준 학생이다.

3. 분석 방법

앞서 II장에서 이미지에 기반 한 사고 과정에 대한 선행 연구들을 고찰하였다. 이들로부터, 본 연구는 수학적 문제 해결에서 이미지에 기반 한 사고를 두 가지 서로 연결된 순환 과정으로 분석해 보고자 한다. 첫 번째 순환 과정은 Kosslyn(1981)의 단선적 이미지 과정을 순환적으로 보는 것으로 처음에 떠올린 이미지를 이용해서는 곧 바로 문제가 해결되지 않을 경우 그 이미지를 조작하여 변형하는 과정을 문제가 해결될 때까지 반복하는 것이다. 이 때 이미지를 조작하는 과정을 이해하기 위해 Duval(1999)이 제안하고 있는 도형 변형의 세 가지 인지적 조작을 적용할 것이다. 즉, 처음에 형성된 이미지를 검토/해석하여 문제 해결의 필요에 따라 처음 이미지를 인지적으로 조작하거나 구체물을 이용한 조작과 관찰을 통해 새로운 이미지를 만들어 내고, 이렇게 만들어진 이미지를 다시 검토/해석하는 과정을 문제가 해결할 때까지 반복하는 순환 과정을 생각할 수 있다.

또한 Zazkis et al.(1996)이 제시한 바 있는 언어적 사고와 이미지에 의한 사고의 관계에 주목하면 또 하나의 순환 과정을 생각해 볼 수 있다. 즉, 처음에 언어적으로 주어진 문제 상황에서 이미지를 생성한 후 이를 검토하여 문제해결에 필요한 언어적 성질을 찾아내고, 이렇게 주어진 성질에 기초한 언어적 추론이 이루어지며, 그에 따라 다시 새로운 이미지를 형성하는 과정이 문제가 해결될 때가지 반복되는 순환 과정이 있다. 그리고 이 과정에서 사용되는 언어적 상호과정을 Duval(2006)이 제시한 수학적 사고 과정에 작용하는 3가지 종류의 언어적 표현 즉, 이름이나 어구의 뜻을 나타내는 개념, 관계나 성질에 대한 명제, 그리고 계산과 추론 등으로 세분화하여 분석해 볼 것이다.

이하에서는 이와 같은 두 가지 순환 과정의 관점에서 학생들의 이미지에 기반 한 사고가 어떻게 진행되는지를 분석해 볼 것이다. 즉, 학생들이 주어진 과제를 해결하기 위하여 사용하는 이미지와 언어적 추론을 추출하고 이들이 어떻게 상호 작용하는 지를 분석해 볼 것이다. 이를 위하여 주어진 과제를 해결하기 위해서 학생들이 사용하는 개념, 성질, 추론들을 분리하여 추출하고 추론의 각 단계에 사용된 성질, 관계, 규칙 등에 인덱스를 붙일 것이다. 학생A가 사용한 언어적 추론에서의 성질을 P_i로 학생B가 사용한 언어적 추론에서의 성질을 P_i'로 표시할 것이다. 또한 이 성질들과 관련하여 학생들이 사용하고 있는 이미지와 이미지 표현(그림)에도 번호를 붙여 각각 I_i와 F_i로 나타낼 것이다. 이와 같이 코딩된 자료들을 아래의 <표 III-1>로 정리하여 학생들이 보여준 이미지

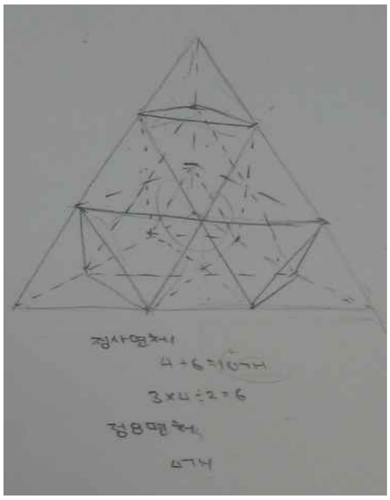
과정을 정리하고 여기서 발견되는 특징을 분석해볼 것이다.

Ⅳ. 실험 결과

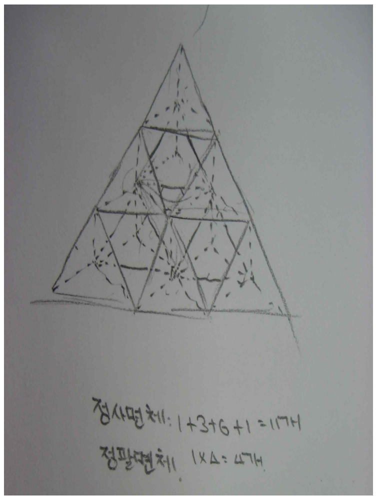
1. 학생A의 사례 - 이미지를 이용한 추론

가. 구체물을 사용하기 전의 학생A의 추론

구체물을 사용하지 않고 과제2를 해결하기 위해 학생A가 그린 그림은 [그림 IV-1]과 같다. 이 그림은 앞쪽에서 정사면체를 바라 볼 때의 그림이다. 절단면 8개가 모두 그려져 있으며, 실선으로 그려진 앞쪽 꼭지점 부분에 있는 정사면체 3개와 점선으로 그려진 뒤쪽 꼭지점 부분의 정사면체 1개 그리고 앞쪽 아래 부분의 모서리에 있는 정사면체 1개는 정확하게 묘사되어 있다. 그러나 나머지 부분의 도형들은 정확하게 묘사되지 못하였다. 그 이유는 절단면의 내부에 절단된 선들이 표현되어 있지 않기 때문이다. 이 그림은 비교적 정밀하게 묘사되어 있지만, 이 그림 속에 있는 도형을 세는 방식으로는 3등분된 정사면체 속에 몇 개의 정사면체와 정팔면체가 생기는지 혹은 다른 도형이 더 생기는 지를 명확하게 알 수는 없다.



[그림 IV-1] 학생A의 처음 그림



[그림 IV-2]학생A의 두 번째 그림

학생A는 그림 아래에 정사면체의 수를 $4+6=10$개로 제시하고 있으며, 그 아래에 $3\times4\div2=6$을 기록하여 $4+6=10$에서 6을 구한 방법을 제시하고 있다. 그리고 그 밑에 정팔면체의 수를 4개로 제시하고 있다. 학생A는 자신

<표 III-1> 학생들의 이미지에 기반 한 추론 과정 분석틀

	이미지 형성에 사용된 개념, 성질	인지적/ 구체적 조작	이미지/ 이미지 표현	이미지, 표현, 혹은 구체물에서 파악된 성질	성질 혹은 이미지에서 추론된 성질
학생들의 문제 해결과정	…	분리/결합	I_i / F_i	P_i / $P_i^{'}$	P_i / $P_i^{'}$

이 구한 식을 다음과 같이 설명하였다.

연구자: 어떻게 구한 건지 설명해 볼까?
학생A: 여기(위 부분)를 보면 (정사면체를) 이등분한 것과 같잖아요. 여기(왼쪽 꼭지점 부분)와 여기(오른쪽 꼭지점 부분) 그리고 여기도(뒤쪽 꼭지점 부분) 마찬가지로 (정사면체를) 2등분 한 거니까, 이것(3등분된 정사면체)은 (정사면체를) 이등분 한 것 4개를 겹쳐 놓은 것과 같아요.
연구자: 그래서, 그림 밑에 있는 식은 어떻게 구한 거지?
학생A: 여기(윗 꼭지점 부분)에 (겹치지 않은) 정사면체가 있는데 이런 것이 (꼭지점마다) 모두 4개가 있고요. 여기(3등분된 정사면체의 중간부분)에 3개의 (겹치는) 정사면체가 있는데 이런 것이 4개 있으니까 3×4를 하고, 한 번씩 겹치니까 2를 나누어서 6개가 있어요. 그래서 모두 10개의 정사면체가 있어요. 그리고 정팔면체는 이런 것(2등분된 정사면체) 1개 당 1개씩 생기니까 정팔면체는 4개가 있어요.

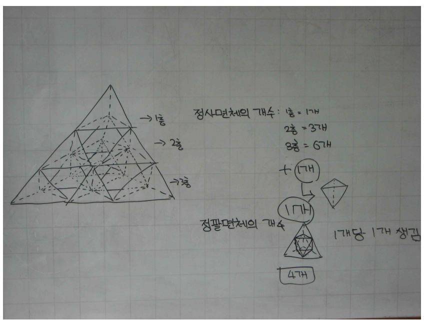
나. 구체물을 이용한 후의 학생A의 새로운 이미지표현

구체물을 이용하여 자신이 구한 답을 확인하도록 한 후 학생A는 자신이 빠뜨린 부분이 있음을 확인하고, [그림 IV-2]와 같이 수정된 그림을 제시하였다. 학생A는 3등분된 정사면체의 내부의 중간 부분에 있는 도형을 정확하게 묘사하기 위하여 앞의 그림과는 조금 다른 그림을 제시하고 있다. 즉, 뒤쪽에 있는 꼭지점의 정사면체는 생략하고 절단면을 정확하게 묘사하여 가운데 부분에서 빠뜨렸던 선들을 정확하게 나타내려고 하였다. 학생A가 그린 두 번째 그림에서는 앞에서 보이는 3개의 꼭지점 부분의 정사면체와 모서리 부분에 있는 6개의 정사면체 그리고 가운데에 있는 '뒤집어진' 정사면체 1개가 명확하게 보이며, 3개의 정팔면체를 구분할 수 있다. 그러나 뒤쪽에 있는 1개의 정사면체와 그것과 인접한 정팔면체는 파악하기 힘들다. 이 그림은 처음에 파악하지 못하였던 가운데 부분에 있는 '뒤집어진 정사면체'를 표현하기 위한 시도라고 볼 수 있다.

[그림 IV-3]은 학생A가 최종적으로 전체 학생들에게 자신의 생각을 발표할 때 사용한 그림과 설명이다. 이 그림은 정사면체를 3등분하였을 때 생기는 절단면과 선을 아주 정확하게 표현하고 있다. 그리고 정팔면체의 수는 앞의 설명과 동일하게 2등분된 정사면체 1개당 1개씩 있다는 것으로 설명하고 있지만, 정사면체의 수를 설명하는 방식은 앞서 자신이 불완전 그림으로 추론하였던 방법이 아니라 세밀하게 묘사된 그림을 보면서 '층'별로 나누어 제시하였다. 특히, 자신의 그림에서 명확하게 드러나지 않았던 가운데에 부분에 있는 정사면체를 따로 그려 설명하려고 시도 하고 있다.

다. 학생A의 이미지를 이용한 추론

살펴본 바와 같이 학생A는 처음에는 비교적 세밀하지만 정확하지는 않은 그림을 이용하여, 정사면체와 정팔면체의 수를 추론하였다. 학생A가 정사면체와 정팔면체의 수를 세기 위하여 제시한 그림과 이 학생의 계산과정 및 면담으로부터 이 학생의 추론과정에서 어떤 이미지가 어떻게 사용되었는지를 분석해 보자.



[그림 IV-3] 학생A의 세 번째 그림

학생A는 [그림 IV-1]의 윗부분에 주목하여 이것이 2등분된 정사면체임을 생각하였다. 이것은 전체 도형에서 어떤 부분을 분리해서 생각하는 조작을 사용한 것이다. 즉, 전체 이미지(표현)에서 일부분에 주목하여 그 부분만을 분리한 이미지(I_1)를 떠올렸으며, 그 이미지에는 '2등분된 정사면체'라는 언어적 개념이 연결되어 있다. 이와 같이 분리되어 개념화된 이미지로부터 "3등분된 정사면체의 위부분에 2등분된 정사면체가 있다."(P_1)라는 언어적 성질을 파악할 수 있다. 이 성질과 과제1의 결과 즉, 2등분된 정사면체라는 개념에 함의된 성질로부터 "3등분된 정사면체의 맨 위에 정사면체 1개, 그리고 그 아래 부분에 정사면체 3개와 정팔면체 1개가 있다."라는 성질을 추론할 수 있다(P_1과 2등분된 정사면체 개념으로부터의 추론). 또한 이러한 추론으로부터 3등분된 정사면체의 가장 위에 있는 정사면체 1개(I_{1-1})와, [그림 IV-1]에서는 분명하게 보이지 않은 전체 이미지 I의 중간 부분에 있는 정사면체 3개(I_{1-2})와 정팔면체 1개(I_{1-3})를 각각 분리한 이미지를 떠올릴 수 있다.

학생A는 이와 같은 부분 도형으로의 분리 조작을 전체 도형의 다른 부분에도 적용하여 3등분된 정사면체의 위쪽뿐만 아니라 왼쪽, 오른쪽 그리고 뒤쪽에서 2등분된 정사면체의 부분 도형을 분리하였다(각각 I_2, I_3, I_4). 여기서 학생A는 분리하였던 4개의 부분도형을 결합 조작을 사용하여 3등분된 정사면체를 파악하고자 하였다. 즉, I의 부분도형 I_1, I_2, I_3, I_4의 결합에 의한 이미지($I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$)로부터 "3등분된 정사면체는 일부분씩 겹치는 4개의 2등분된 정사면체로 이루어져 있다."(P_2, $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 = I$)라는 성질을 파악하였다.

그 다음으로 학생 A는 겹치지 않은 부분과 겹치는 부분의 개념에 주목하여 3등분된 정사면체 안에 있는 도형의 수를 구하였다. 즉, 2등분된 정사면체 I_1, I_2, I_3, I_4 끼리의 결합을 통해 "어떤 도형이 겹치지 않았는지"와 "어떤 도형이 겹치는지"를 파악하여 정사면체의 수와 정팔면체의 수를 추론하였다.

학생A는 부분도형 I_1, I_2, I_3, I_4 를 결합한 이미지로부터 겹치지 않는 부분에 있는 도형을 파악하였다. 먼저, I_1과 각각의 I_2, I_3, I_4를 결합하여 I_1과 다른 2등분된 정사면체들이 겹치지 않은 부분에 주목하였고, 이로부터 새로운 부분도형의 이미지($I_1 - (I_2 \cup I_3 \cup I_4)$)를 분리하였다. 또한 이미지로부터 "2등분된 정사면체 안에 겹치지 않는 정사면체 1개(I_{1-1}, P_3)와 정팔면체 1개가 있음(I_{1-3}, P_6)"을 파악하였다. 이어서 이 성질과 3등분된 정사면체는 4개의 2등분된 정사면체로 구성되어 있다는 성질(P_2)로부터 "3등분된 정사면체에 (꼭지점 부분에) 겹치지 않은 4개의 정사면체가 있다."(P_3와 P_2에 의한 추론)와 "3등분된 정사면체에 겹치지 않은 4개의 정팔면체가 있다."(P_6과 P_2에 의한 추론)를 추론하였다.

다음으로 겹치는 부분에 있는 정사면체의 수를 구하기 위해 학생 A가 제시한 $3 \times 4 \div 2$의 계산식을 분석해 보자.

먼저 이식에 있는 3은 위쪽에 있는 I_1과 아래에 있는 I_2, I_3, I_4가 각각 겹치는 부분의 정사면체 수를 의미한다(P_4). 이는 P_1에서 추론한 "I_1 아래에 3개의 정사면체가 있다."(P_1에 의한 추론)에 의한 이미지(I_{1-2})와 위에서 살펴본 바와 같이 부분 이미지 I_1, I_2, I_3, I_4들을 결합하여 겹치는 부분에 주목하여 새롭게 분리해낸 이미지($I_1 \cap (I_2 \cup I_3 \cup I_4) = I_{1-2}$)에 의해 파악한 성질이다.

$\times 4$는 3등분된 정사면체에 있는 4개의 2등분된 정사면체가 있다는 것(P_2)과 각각의 2등분된 정사면체에 $I_1 \cap (I_2 \cup I_3 \cup I_4)$를 분리해내는 것과 동일한 방식을 적용할 수 있다는 것에서 추론

한 결과이다. 이와 같은 추론으로부터 4개의 2등분된 정사면체에 “각각 3개의 겹치는 정사면체가 들어 있다”는 것을 알 수 있고 이로부터 $\times 4$가 추론되었다(P_2에 의한 추론).

이제 마지막으로 $\div 2$를 생각해 보자. “위에서 3×4로 계산한 하나의 정사면체에 주목하면, 이 정사면체는 두 개의 2등분된 정사면체에 포함되어 있음”(P_5)을 알 수 있다. 예를 들어, 3등분된 정사면체의 중간 부분의 왼쪽에 있는 정사면체의 이미지를 분리해 보면 이 이미지는 I_1과 I_2에 포함된 이미지($I_1\cap I_2$)임을 알 수 있다. 이와 같이 I_1, I_2, I_3, I_4 중 두 개의 이미지를 결합한 결과로 얻어지는 이미지($I_i\cap I_j$)로부터 P_5를 파악할 수 있다. 따라서 $\div 2$를 해야 함을 추론할 수 있 수 있다(P_5에 의한 추론).

이러한 추론을 통해 학생A는 3등분된 정사면체 속에 정사면체 10개와 정팔면체 4개가 있을 것이라고 추론하였다. 위에서 분석한 사항을, 이미지를 형성하는데 사용된 언어적 개념이나 성질, 인지적 조작, 형성된 부분이미지, 그 이미지에서 파악되는 성질 그리고 그 성질에서 추론되는 성질 등으로 나누어 정리하면 아래의 <표IV-1>과 같다.

<표 IV-1>의 ‘부분 이미지’ 항목의 세로 줄을 보면, 처음 이미지에서 문제 해결에 필요한 부분 이미지가 분리되고, 그 분리된 이미지의 결합과 분리를 통해 새로운 이미지가 형성되는 등의 Duval(1999)이 제안한 인지적 조작 중 분해-결합 방법에 의한 이미지 형성의 순환과정이 이루어지고 있음을 확인할 수 있다. 이미지의 분해와 결합에 의해 생성된 부분이미지는 문제 해결에 필요한 성질을 파악할 수 있게 함으로써 학생A의 추론과정에서 각 단계를 형성하였다. 또한 <표 IV-1>의 가로에 주목하여 보면, Zazkis et al.(1996)이 제안한 VI모델과 유사하게, 새로운 이미지가 형성되는 데는 언어적 개념이나 성질들이 관련되어 있으며, 새롭게 형성된 이미지로부터 문제 해결에 필요한 성질들을 파악된다. 그리고 그렇게 파악된 성질에 기초하여 새로운 이미지를 형성하는 순환과정

<표 IV-1> 학생A의 이미지에 기반 한 추론 과정 분석

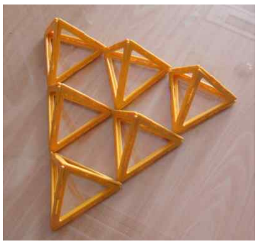
<table>
<tr><th>이미지 형성에 사용된 개념과 성질</th><th>인지적 조작</th><th colspan="2">부분 이미지</th><th>이미지에서 파악된 성질</th><th>추론된 성질</th></tr>
<tr><td>2등분된 정사면체</td><td>분리</td><td colspan="2">$I_1\ (I_2,\ I_3,\ I_4)$</td><td>P_1</td><td>P_1에 의한 추론</td></tr>
<tr><td>2등분된 정사면체
P_1에 의한 추론</td><td>분리</td><td colspan="2">$I_{1-1},\ I_{1-2},\ I_{1-3}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2등분된 정사면체 P_1</td><td>결합</td><td colspan="2">$I_1\cup I_2\cup I_3\cup I_4 = I$</td><td>$P_2$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">P_1
P_1에 의한 추론</td><td rowspan="2">결합
분리</td><td rowspan="2">$I_1-(I_2\cup I_3\cup I_4)$</td><td>$I_{1-1}$</td><td>$P_3$</td><td>$P_3$와$P_2$에 의한 추론</td></tr>
<tr><td>I_{1-3}</td><td>P_6</td><td></td></tr>
<tr><td>2등분된 정사면체
겹치지 않는 부분
P_1, P_1에 의한 추론</td><td>결합
분리</td><td colspan="2">$I_1\cap(I_2\cup I_3\cup I_4) = I_{1-2}$</td><td>$P_4$</td><td>$P_4$와 P_2에 의한 추론</td></tr>
<tr><td>2등분된 정사면체
겹치는 부분, P_1</td><td>결합
분리</td><td colspan="2">$I_i\cap I_j$</td><td>P_5</td><td>P_5에 의한 추론</td></tr>
</table>

을 확인할 수 있었다. 이와 같이 II장에서 살펴본 바와 같은 이미지를 이용한 사고의 두 가지 순환 과정을 확인할 수 있다.

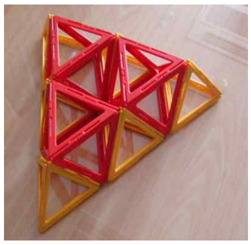
이와 같이 학생A는 그림 속의 이미지를 보면서 파악한 성질과 이를 바탕으로 하여 타당한 추론을 제시하였다. 그러나 한 부분에서 오류가 있었다. 문제가 된 부분은 2등분된 4개의 정사면체를 일부분씩 겹쳐 놓은 것으로 3등분된 정사면체를 만들 수 없다(P_2)는 데 있다. 네 개의 2등분된 정사면체를 겹쳐 쌓아보면 중간에 빈 공간이 생겨난다. 학생A가 제시한 [그림 IV-1]이나 학생A의 추론에서는 이 빈공간의 존재를 파악할 수 없었다.

2. 학생 B의 사례 - 구체물과 그림을 이용한 추론

학생 B도 학생 A와 마찬가지로 3등분된 정사면체의 윗부분에 2등분된 정사면체가 있다는 것(P_1)에 주목하였다. 그러나 학생 A가 2등분된 정사면체 4개가 겹쳐 있는 것으로 3등분된 정사면체를 파악하려고 한 것과는 달리 학생 B는 3등분된 정사면체 중 2등분된 정사면체를 제외한 아랫부분에 있는 정사면체와 정팔면체의 수를 세고자 하였다. 그러나 이미지와 그림만으로 정확한 수를 파악하지 못한 학생B는 구체물을 이용하여 3등분된 정사면체를 만들어 정사면체와 정팔면체가 몇 개씩 있는지를 확인하였다. 구체물을 이용하여 자신이 파악한 결과를 다른 학생들에게 설명하기 위해 그리고 4등분, 5등분 ,... 등의 일반화된 경우의 문제를 해결하기 위해 학생 B는 처음에 가졌던 이미지와는 다른 새로운 이미지 표현을 만들어 내었다.



[그림 IV-4] 정사면체



[그림 IV-5] 정팔면체

[그림 IV-6] 1층

[그림 IV-7] 3층

가. 구체물을 이용하여 3등분된 정사면체 만들기

아래 [그림 IV-4]에서 [그림 IV-7]까지는 학생B가 3등분된 정사면체를 만드는 과정을 보여 주고 있다. 학생B는 구체물을 이용하여 몇 번의 시행착오를 겪은 다음, 정사면체를 하나를 만들고 그것을 잘라서 3등분된 정사면체에 어떤 도형이 들어 있는지를 찾아가는 방식이 아니라 작은 정사면체와 정팔면체 여러 개를 먼저 만들고 이것들을 쌓아서 3등분된 정사면체를 만들어 보고자 하였다.

학생B는 먼저 6개의 정사면체를 [그림 IV-4]와 같이 정삼각형 모양으로 배열한 후, [그림 IV-5]와 같이 그 사이에 3개의 빨간색 정팔면체를 채워 넣었다. 이 때 [그림 IV-6]과 같이 정팔면체 3개가 모이는 부문에 1개의 정사면체가 더 필요하다. 1층을 만든 후에 2등분된 정사면체를 올려놓으면 [그림 IV-7]과 같은 3등분된 정사면체를 만들 수 있다. 이와 같이 학생B는 구체물을 이용하여 3등분된 정사면체를 만들어 그 안에 11개의 정사면체와 4개의 정사면체가 있음을 확인하였다.

나. 학생B의 새로운 이미지 표현

[그림 IV-8]은 학생B가 3등분된 정사면체 속에 있는 정사면체와 정팔면체의 수를 구하는

과정을 설명하기 위해 제시한 그림이다. 이 그림은 네 부분으로 나누어 살펴 볼 수 있다.

1) 3등분된 정사면체 그림: F

[그림 IV-8]의 맨 위에 3등분된 전체 정사면체 그림(F)이 있다. 이 그림은 학생A가 제시한 그림과는 달리 보이지 않는 부분은 그려져 있지 않고, 볼 수 있는 두 면만 그려져 있다. 그리고 그 옆에 3등분된 정사면체의 윗부분(F_1)을 2, 3층으로 표현하여 그 안에 “정사면체 4개와 정팔면체 1개”(F_1과 P_1에 의한 추론)가 있다고 기술되어 있다. 여기서 학생A의 추론과정에서 등장하지 않았던 ‘층’의 개념이 등장한다.

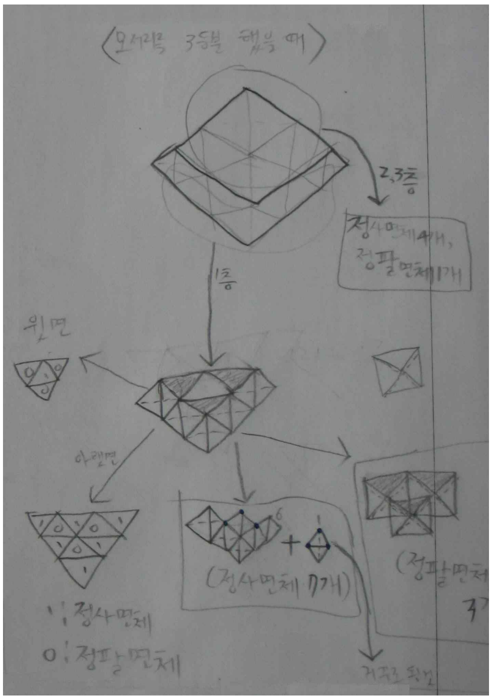
2) 맨 아래 1층의 그림 : F_2

3등분된 정사면체 그림F의 아랫부분에서 출발하는 화살표를 따라가면 가운데 부분 에 1층만 따로 떼어 놓은 그림(F_2)을 볼 수 있다. F_2는 F의 부분도형이라고 할 수 있으며 1층을 구체적으로 세밀하게 묘사하고 있다. 이 그림에서는 5개의 정사면체가 분명하게 구분이 된다. 그리고 1층의 윗면에 있는 4개의 삼각형 중 3개의 삼각형에 색칠을 되어 있다.

3) 1층에 있는 정사면체 그림과 정팔면체 그림: F_{3-1}, F_{3-2}, F_{3-3}

가운데 그려 놓은 1층(F_2)에서 오른쪽에 있는 화살표 두 개를 따라가 보면, 1층 안에 있는 정사면체와 정팔면체를 분리하여 그려 놓은 그림을 볼 수 있다. 왼쪽에는 6개의 정사면체(F_{3-1})를 그려 놓은 다음, 가운데 부분에 있는 정사면체 3개의 꼭지점에 파란점이 표시되어 있어 있으며 ‘6’이라는 숫자가 쓰여 있다(P_2'). 그리고 그 옆에 세 꼭지점에 파란색을 표시한 정사면체 하나(F_{3-2})가 더 그려져 있고 그 위에 ‘1’이란 숫자가 쓰여 있으며(P_3') 밑으로 난 화살표를 따라 가면 ‘거꾸로 된 것’이라고 기술되어 있다. 이 두 그림은 +기호로 연결되어 있고 그 밑에 “정사면체 7개”가 기술되어 있다(P_2'과 P_3'에 의한 추론). 파란색 점은 ‘뒤집어진 정사면체’가 놓여 있는 위치를 보여주고 있다.

오른쪽 그림에는 정팔면체 3개가 그려져 있는데, 정팔면체의 면이 바닥에 있는 모습으로



[그림 IV-8] 3등분한 경우의 학생B의 설명

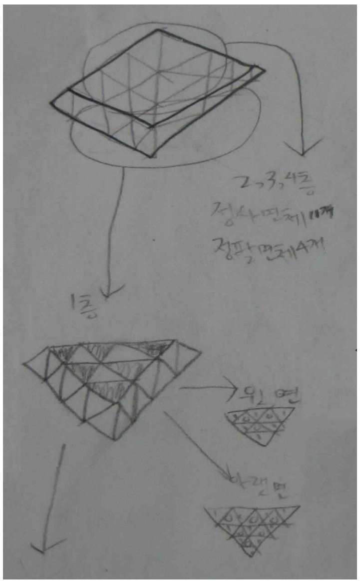
그려져 있다(F_{3-3}). 이들의 윗면들에는 색칠이 되어 있다. 이것은 중간에 그려진 1층 그림(F_2)의 위 면에 색칠된 부분과 연결되어, 정팔면체가 1층의 어떤 곳에 위치하고 있는지를 나타내고 있다. 그리고 그 밑에 ‘정팔면체 3개’(P_4')가 기술되어 있다.

4) 1층의 윗면과 아랫면을 나타낸 그림

마지막으로 가운데 있는 F_2에서 왼쪽에 있는 화살표 두 개를 따라가 보면, 1층의 윗면을 그

린 그림(F_{4-1})과 아랫면을 그린 그림(F_{4-2})을 볼 수 있다. 윗면과 아랫면을 구성하고 있는 삼각형들 안에 1과 0이 표시되어 있으며, 그 아래에 '1은 정사면체'를 그리고 '0은 정팔면체'라고 기술되어 있다.

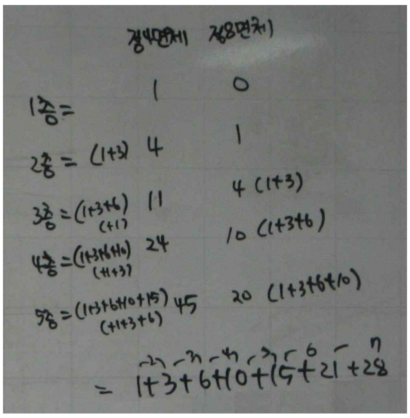
이와 같이 학생B는 3등분된 정사면체 속에 정사면체가 11개가 있으며 정팔면체체가 4개가 있다는 것을 위와 같이, 3등분된 정사면체의 외관을 그린 그림(F)에서 시작하여, 1층을 세밀하게 그린 그림(F_2), 1층 안에 있는 정사면체(F_{3-1}, F_{3-2})와 정팔면체(F_{3-3})를 분리해서 그린 그림 그리고 1층의 윗면(F_{4-1})과 아랫면(F_{4-2})을 그린 그림 등의 4단계의 그림을 통해 설명하고 있다.



[그림 IV-9] 4등분한 경우

다. 과제3에 대한 학생B의 추론

학생B는 3등분된 정사면체에 있는 도형의 수를 설명한 후, [그림 IV-9]와 같이 4등분된 정사면체 있는 도형의 수를 유사한 방법으로 설명하였다. 그러나 여기서는 위의 [그림 IV-8]에 있는 F_{3-1}, F_{3-2}와 F_{3-3}과 같은 그림을 사용하지 않고 1층의 윗면과 아랫면을 나타내는 F_{4-1}과 F_{4-2}과 같은 그림을 이용하고 있다. 이와 같이 윗면과 아랫면을 이용하면 그리기 힘든 공간도형을 나타내는 그림을 그리지 않아도 된다. 뿐만 아니라 정사면체와 정팔면체가 번갈아 가면서 삼각형 모양을 이루고 있다는 관계(P_5')와 윗면의 정팔면체 사이에 '뒤집어진' 정사면체가 있다는 관계(P_6')을 한 눈에 파악할 수 있다. 더 나아가 정사면체의 수와 정팔면체의 수를 구할 수 있는 규칙을 유추할 수 있게 해 준다. 즉, 아래 면은 정삼각형 16개로 이루어진 정삼각형이다. 16개의 정삼각형 위에 1과 0이 쓰여 있으며, 1은 정사면체가 있는 위치 그리고 0은 정팔면체가 있는 위치를 나타내고 있다. 따라서 아래 면을 보았을 때 정사면체의 수는 1+2+3+4=10이 되고(P_7'), 정팔면체의 수는 1+2+3=6이 된다(P_9'). 한편, 윗면은 정삼각형 9개로 이루어진 정삼각형이고, 여기서 뒤집어진 정사면체가 1+2=3개가 있음을 알 수 있다(P_8'). 따라서 정사면체의 수는 11+(10+3)=24개가 되고, 정팔면체의 수는 4+6=10이 됨을 알 수 있다. 이와 같이 학생B는 4등분된 정사면체를 구할 때, F_{4-1}과 F_{4-2}과 같이 위 면과 아래 면을 나타내는 간단한 그림을 사용하고 있다.



[그림 IV-10] 5등분까지의 결과

이어서 학생B는 3, 4등분을 하면서 파악한 규칙을 이용하여 구체물을 사용하지 않고 5등분한 정사면체 속에 있는 도형의 수를 구하였다. 그리고 [그림 IV-10]과 같이 5등분한 경우까지 탐구한 결과를 표로 정리하여 제시하였다. 이 표로부터 학생B가 이 과제3을 해결하는 일반적인 규칙을 파악하고 있음을 알 수 있다. 가령, 맨 아래에 있는 5층까지 있는 5등분된 정사면체의 경우를 살펴보자. 정사면체의 수를 나타내는 45는 (1+3+6+10+15) + (1+3+6)으로 계산된 것이다. 이 식의 앞쪽의 1, 3 (=1+2), 6 (=1+2+3), 10 (=1+2+3+4), 15 (=1+2+3+4+5)는 각 층에 있는 정사면체 중 F_{4-1}과 같은 밑면에서 파악되는 정사면체의 수로 규칙 P_7'을 귀납적으로 적용한 것이다. 그리고 뒤쪽에 있는 1, 3 (=1+2), 6 (=1+2+3)은 각 층에 있는 정사면체 중 F_{4-2}와 같이 윗면에서 파악되는 '뒤집어진' 정사면체의 수로 규칙 P_8'를 귀납적으로 적용한 것이다. 그리고 정팔면체 수 20도 각 층에 있는 정팔면체의 수를 규칙 P_9'를 귀납적으로 적용하여 구한 것이다.

[그림 IV-10]의 밑에 보이는 식은 7등분된 정사면체를 층별로 나누어 각 층의 아랫면(F_{4-1}과 같은 그림)에 있는 정사면체의 수의 합으로 나타낸 것이다. 각 항의 위에 표시된 수자들은 층의 아랫면에 있는 정사면체의 수가 2, 3, 4, ... 와 같은 규칙에 따라 증가함을 보여주고 있으며 규칙 P_7'를 구체적으로 표현하고 있는 것이다.

이와 같이 학생B는 n등분된 정사면체에 들어 있는 도형들의 수를 구할 수 있는 일반적인 규칙을 보여주고 있다. n등분된 정사면체에 있는 도형의 수는 각 층으로 나누어 생각할 수 있고, 각 층에 있는 정사면체의 수와 정팔면체의 수는 층이 늘어날 때 마다 일정한 규칙에 따라 늘어나고 있다. 이와 같은 규칙은 앞서 살펴본 각 층의 윗면과 아랫면을 나타내는 F_{4-1}과 F_{4-2}와 같은 그림을 통해 한 눈에 파악될 수 있다.

라. 구체물과 이미지(표현)를 이용한 학생B의 추론

과제2를 해결하기 위해 학생A와 학생B는 3등분된 정사면체의 윗부분에 2등분된 정사면체가 있다는 이미지를 이용하였다. 그러나 그 이후의 문제 해결 과정에서 학생A와 학생B는 상이한 방식을 취하였다. 학생A는 하나의 그림에서 이미지의 분리와 결합을 통해 특정 부분에 주목한 부분이미지를 만들고 이를 조사하여

<표 IV-2> 구체물과 이미지 표현을 이용한 추론

이미지 형성에 사용된 개념과 성질	인지적/구체적 조작	구체물로 파악되는 성질	이미지 표현	이미지에서 파악되는 성질	성질에서 추론된 성질
2등분된 사면체층	분리		F_1	P_1	P_1에 의한 추론
층	[그림 IV-6]		F_2		
거꾸로 된	[그림 IV-4]	P_2'	F_{3-1}		P_2'과 P_3'에 의한 추론
	[그림 IV-5, 6]	P_3', C_3'	F_{3-2}		
	[그림 IV-5]	P_4'	F_{3-3}		

문제 해결에 필요한 성질을 찾아내었다. 이에 비해 학생B는 구체물을 이용하여 과제2를 해결하였고 이를 그림으로 설명하기 위하여 새로운 이미지 표현을 고안하였다. 이 과정을 정리하면 <표 IV-2>와 같다.

<표 IV-2>로부터 처음 생성된 3등분된 이미지에서, 새로운 이미지들이 형성되는 순환의 과정을 볼 수 있다. 그런데 이 과정은 학생A의 사례에서와는 달리, 이미지가 아닌 구체물에서 문제 해결에 필요한 성질을 파악하게 되고 이를 설명하기 위한 이미지표현이 만들어졌다. 즉, 학생B는 자신이 구체물을 이용하여 3등분된 정사면체를 만드는 과정을 반성적으로 돌아보고 문제해결에 필요한 몇 개의 장면을 구체적으로 묘사하려 하였다는 것을 알 수 있다. F_2는 [그림 IV-6]을 묘사한 것이고, F_{3-1}은 [그림 IV-4]를 묘사한 것이며, F_{3-3}은 [그림 IV-5]의 정팔면체가 있는 부분을 따로 묘사하려고 한 것임을 알 수 있다.

여기서 학생B가 만들어낸 새로운 이미지표현을 보다 면밀히 분석할 필요가 있다. 먼저, F_2는 1층을 세밀하게 묘사하려는 의도를 가진 그림이다. 그러나 1층을 세밀하게 묘사하는 것으로 1층의 어디에 정사면체와 정팔면체가 있는지 그 숫자가 어떻게 되는지를 정확하게 보기가 어렵다. 그래서 만들어진 그림이 F_{3-1}, F_{3-2}, F_{3-3}이다. 이와 같은 그림을 그리기 위해서는 이미 만들어진 1층을 분해해서 정사면체만 있는 경우와 정팔면체를 끼워 넣은 경우를 다시 만들어야 한다. 이는 학생A가 이미지를 특정 목적에 따라 분해하는 심적 조작을 하였던 것과 비교할 수 있다. 학생B는 특정한 목적을 위해 구체물을 분해하였고 그것을 이미지화하여 표현하고 있는 것이다.

다음으로 그림 F_{3-1}, F_{3-2}, F_{3-3}에서 주목할 수 있는 점은 구체물에는 없는 것들이 표현되어 있다는 점이다. F_{3-1}, F_{3-2}에는 각각 3개의 꼭지점이 크게 그려져 있으며, F_{3-3}에는 윗면이 색칠되어 있다. 이들은 각각 '뒤집어진' 정사면체가 어디에 위치하는지 그리고 정팔면체가 정사면체들과 어떻게 배치되어 있는지 등을 나타내기 위해 만들어진 표식이다. 이는 있는 그대로를 묘사하고자 하는 구체적 이미지와는 다른 의미를 가진 Presmeg(2006)의 표현으로 인덱스적 기능을 하는 이미지라고 할 수 있다. 이와 같이 학생B는 구체물로 구한 자신의 답을 그림으로 설명하기 위해서 처음에는 구체적으로 1층을 묘사하는 그림을 그리고 이를 분해하여 정사면체만 있는 그림과 정팔면체만 있는 그림을 구체적으로 묘사하려 하였다. 특히 정사면체와 정팔면체가 배치되어 있는 관계나 '거꾸로 된' 정사면체가 있는 위치를 나타내기 위하여 인덱스적 기능을 하는 이미지를 사용하였다.

한편, 그림 F_{3-1}, F_{3-2}, F_{3-3}만으로도 충분히 과제2를 설명할 수 있지만 학생B는 그림 F_{4-1}과 F_{4-2}를 제시하고 있다. 그리고 학생B는 과제3과 관련된 4등분된 정사면체에 있는 도형의

<표 IV-3> 층의 윗면과 아랫면을 이용한 추론

이미지 형성에 사용된 개념과 기호	인지적 조작	이미지 표현	이미지에서 파악되는 성질	이미지에서 추론된 성질 (관계, 규칙)
아래면, 0, 1	분리	F_{4-1}	P_2', P_4'	P_5', P_7', P_8'
윗면, 0, 1	분리	F_{4-2}	P_3'	P_6', P_9'

수를 설명할 때는 F_{3-1}, F_{3-2}, F_{3-3}과 같은 그림을 사용하지 않고 F_{4-1}과 F_{4-2}와 같은 그림을 이용하였으며, 5등분된 정사면체에 있는 도형의 수를 구할 때는 일반적인 규칙을 사용하였다. F_{4-1}과 F_{4-2}과 같은 그림을 통한 학생B의 추론 과정을 <표 IV-3>과 같이 정리할 수 있다.

F_{3-1}, F_{3-2}, F_{3-3}는 3차원 도형을 묘사하고 있는 반면 F_{4-1}와 F_{4-2}는 2차원 단면이며, 1과 0이라는 숫자 기호를 통해 그 자리에 어떤 도형이 있는지를 상징적으로 나타내고 있다. F_{4-1}는 F_{4-2}는 F_{3-1}, F_{3-2}, F_{3-3}를 간략하게 요약하여 나타낸 그림이라고 할 수 있으며 구체물을 묘사하는 기능을 하는 이미지가 아니라 구체물 안에 들어 있는 수학적 성질을 상징하는 기호적 의미를 담은 상징적 이미지라고 할 수 있다. 즉, 수학적으로 의미 있는 일반성 있는 관계만을 남기고 이와는 관련 없는 구체적인 부분들은 생략함으로써 이 이미지를 효율적으로 그릴 수 있을 뿐만 아니라 일반성 있는 수학적 관계나 규칙을 한 눈에 파악할 수 있다. 학생B는 비록 일반화된 문자를 사용하지는 않고 있지만 이와 같은 일반적인 관계(P_5', P_6')와 규칙(P_7', P_8', P_9')에 기초하여 5등분된 정사면체에 들어 있는 정사면체와 정팔면체의 수를 구하였고, 필요하다면 몇 등분 된 정사면체에 대해서도 정확한 답을 구할 수 있게 되었다.

V. 결론

지금까지 일상적인 경험으로부터 생겨난 이미지를 이용해서는 해결하기 힘든 과제에서 학생A와 학생B가 처음의 이미지를 어떻게 조작하고, 변형하여 새로운 이미지를 만들어 내었는지 그리고 그 이미지들로부터 어떤 성질을 찾아내고 이를 통해 문제 해결에 필요한 추론을 어떻게 진행하였는지를 분석해 보았다. 이와 같은 분석으로부터 다음의 몇 가지 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 학생들은 처음에 가진 이미지를 대상화하여 이를 검토하고 조작하면서 문제 해결에 필요한 추론을 진행하였다. 또한 이 추론의 과정에서 이미지는 수학적 성질을 파악 하는 원천으로 작용하였으며, 동시에 언어적인 수학적 성질들이 문제 해결에 필요한 새로운 이미지를 형성하는데 작용하고 있었다. 이는 이미지에 기반 한 사고 과정을 분석하기 위해 선행연구를 기초로 하여 본 연구에서 고안한 두 가지 순환 과정의 특징을 잘 드러내고 있는 것으로 볼 수 있다. 특히, 학생A의 사례에서 이미지를 조작하는 방법으로 Duval이 제안한 세 가지 인지적 조작 중 주로 분해-결합 방법이 나타나고 있었으며, 학생B는 구체물의 분해-결합을 이용하여 문제 해결에 필요한 이미지를 형성하고 수학적 성질을 파악하고 있었다.

이와 같은 사례로부터 일상적인 경험에서 생겨나는 이미지로는 곧 바로 해결되지 않는 과제를 해결하기 위해서는 처음에 형성한 이미지를 사고의 대상으로 하여 이를 인지적으로 조작하고 재구성해 가는 과정과 이와 함께 사고의 대상이 되고 있는 이미지에 문제 해결과 관련된 수학적 성질을 결합하여 새로운 이미지를 형성하거나 형성된 이미지에서 문제 해결에 필요한 수학적 성질을 파악하는 사고가 서로 상호 작용하면서 진행되어야 함을 알 수 있다. 또한 이미지의 분해-결합과 같은 인지적 조작이 이와 같은 문제 해결에서 중요한 방법으로 사용되고 있음을 알 수 있다.

둘째, 학생A가 보여준 구체적 이미지에 의한 사고와 학생B가 보여준 기호적 이미지에 의한 사고를 통해 서로 다른 특성의 이미지에 기반

한 사고가 있음을 알 수 있으며 각각이 가지는 기능과 문제점 등을 알 수 있었다. 이미지는 구체물과 유사하게 수학적 성질을 파악하는 원천이 된다. 이는 잘 약속된 정의, 최소한의 자명한 공리 등에서 출발하여 이들의 논리적 분석으로 새로운 명제를 발견하고 증명하는 순수 수학의 형식적 방법과는 다른 수학적 지식의 발견 방식이라고 할 수 있다. 이와 같이 구체적 이미지에 기반 한 사고는 구체적이고 개별적인 이미지에서 문제 해결에 필요한 수학적 성질, 관계, 규칙 등을 발견하는 중요한 수단이 된다. 그러나 학생A의 사례에서처럼 이미지를 통해 파악한 성질은 반드시 참이 아닌 경우들이 있다. 이는 구체적 사례를 통해 파악되는 경험적 지식이 가지고 있는 한계와 동일하다고 할 수 있다. 또한 이와 같은 구체적 이미지는 일반적인 문제 상황에 적용하기 어려운 한계를 가지고 있다.

이와는 대조적으로 학생B는 기호적 성격을 가진 이미지를 이용한 사고의 특징을 보여주었으며, 이를 이용하여 학생A가 보여준 구체적 이미지를 이용한 사고로는 해결할 수 없었던 보다 일반적인 과제를 해결하였다. 학생B는 처음에 구체물을 묘사하는 이미지를 사용하였지만 자신의 생각을 다른 학생들에게 설명하기 위해서 3차원의 구체물을 2차원에 간단하게 표현할 수 있는 간소화된 이미지를 고안하였고 이를 발전시켜 일반화된 상황에서도 적용할 수 있는, 기호의 역할을 할 수 있는 이미지를 사용하였다. 기호적 이미지는 그 기호를 이해하는 사람에게만 구체성을 지닌 것으로 일종의 약속을 포함하고 있다. 이는 수학적 관계를 파악한 사람들만 볼 수 있는, Duval의 의미에서의 시각화를 요구하는 것이다. 따라서 이와 같은 기호적 이미지를 사용하는 것은 한 단계 높은 추상화를 요구하는 어려움이 있다고 할 수 있다.

이 두 가지 종류의 이미지에 기반 한 사고에 관한 사례는 수학교육적으로 시사하는 바가 크다. 두 가지 종류의 이미지에 기반 한 사고는 수학 학습에서 모두 중요하다고 할 수 있다. 그러나 수학 학습이 진행되어감에 따라 보다 일반성 있는 기호적 이미지의 중요성이 증가 하게 되며, 기호적 이미지를 개발하는 일이 중요해 진다고 볼 수 있다. 구체적 이미지를 사용하고자 하는 성향은 대단히 자연스러운 것이라고 할 수 있다. 본 연구에서 고찰한 사례에서와 같이, 구체적 이미지로는 해결되지 않는 상황 그리고 자신이 해결한 결과를 다른 사람들에게 설명해야 하는 상황 그리고 보다 추상적인 일반적인 결과를 요구하는 상황 등은 구체적 이미지에서 보다 추상적인 이미지를 개발하고 발전시키는 계기가 될 수 있음을 알 수 있다.

셋째, 학생B의 사례에서 구체적 이미지에서 기호적 이미지로 이행하는 과정을 파악할 수 있었다. 학생B는 처음에 구체물을 가능한 세부적으로 묘사하려는 그림(F, F_1, F_2)을 그렸다. 이후에 문제 해결에 핵심이 되는 부분 혹은 설명이 더 필요한 부분에 구체물에는 없는 표시를 한 그림(F_{3-1}, F_{3-2}, F_{3-3})을 사용하였다. 그리고 최종적으로 일반화된 문제를 해결하기 위해서 불필요한 구체성은 생략하고 필요한 단면 부분만을 나타내고 있는 그림(F_{4-1}, F_{4-2})과 이것에 문제 해결에 필요한 수학적 관계나 규칙을 의미하는 기호를 함께 사용하였다. 이와 같이 학생B의 사례는 구체적 이미지에서 시작하여 기호적 이미지로 이행하는 과정을 보여 주었다. 특히 두 이미지를 이어주는 역할을 하는 인덱스적 이미지가 사용되는 맥락과 상황을 잘 보여주고 있다. 이와 같은 사례는 구체적 이미지와 기호적 이미지가 서로 별개로 작용하는 것이 아님을 보여 주며 일반화된 문제 해결의 필요나 간략한 의사소통의 필요에 의해 구체적 이미지에서 기호적 이미지가 자연스럽게 발전할 수 있음을 시사하고 있다.

앞서 고찰한 선행연구에서는 최근의 이미지에 관한 연구들이 수학 학습에서 두 가지 대조적인 성격을 지니는 이미지가 있다는 것에 주목하고 있음을 살펴보았다. 본 연구에 분석한 학생B의 사례는 구체적 이미지와 기호적 이미지의 두 종류의 이미지가 하나의 학습 과정에서 연속적으로 발전해 갈 수 있을 가능성과 그 과정에서 세 번째 종류의 이미지(인덱스적 성격의 이미지)가 매개 역할을 할 수 있음을 시사하고 있다. 그러나 이는 정사면체와 같은 3차원 도형을 절단하는 과제를 구체물을 이용하여 관찰하고 이를 2차원 평면에 표현하면서 일반적 규칙을 찾는 개별적인 문제 상황에서 확인된 것이다. 이와 같은 이미지에 기반 한 사고의 이행과정이 보다 다양한 수학 학습 상황에서도 확인 될 수 있을지에 관한 후속 연구가 더 필요해 보인다.

지금까지 두 학생이 정사면체 분할 과제를 해결하는 과정에 보여준 이미지를 기반 한 수학적 사고를 분석한 결과를 논의하였다. 그러나 이 학생들은 보통의 중학교학생들보다 뛰어난 수학적 성취를 보이고 있는 학생들이었다. 지금까지 논의한 이미지에 기반 한 수학적 사고와 관련된 논의들이 보통의 학생들의 사고에서도 의미 있게 적용될 수 있는가에 관하여 보다 다양한 유형의 학생들을 대상으로 보다 다양한 문제 상황에서의 연구가 더 진행 되어야 할 것이다.

참고문헌

고은성・이경화・송상헌(2008). 시각적 사고와 분석적 사고 사이에서 이미지의 역할. **대한수학교육학회 학회지 학교수학**, 10(1), 63-78.

김재홍(2010). **다이어그램적 추론으로서의 분석법에 기반한 기하 증명교육 연구**. 서울대학교 박사학위논문.

류현아(2008). **중등 기하문제 해결에서 시각화와 추론 과정**. 건국대학교 박사학위논문.

한대희(2006). 수학 영재아의 공간 능력 신장을 위한 교수 단원 개발 연구. **청주교육대학교 과학교육연구소 논문집 과학과 수학교육**, 37-54.

Archavi, A. (2003). The role of visual representation in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 212-241.

Davis, R. & Maher, C. (1997). How students think: The role of representations. In L. English (Eds.). Mathematical *Reasoning Analogies, Metaphors, and Images* (pp.281-289). London: LEA. 권석일 외 11명 (역)(2009). **수학적 추론과 유추, 은유, 이미지**. 서울: 경문사.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the international Group for the Psychology of Mathematics Education 21st, 1*, (pp.3-26).

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

English L. D.(1997). Analogies, metaphors, and images: Vehicles for Mathematical Reasoning. In L. English (Eds). *Mathematical Reasoning Analogies, Metaphors, and Images* (pp.281-289). London: LEA. 권석일 외 11명 (역)(2009). **수학적 추론과 유추, 은유, 이미지**. 서울: 경문사.

Fischbein, E. (1993). The Theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 139-162.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical fields*. NJ: Princeton University Press.

Kosslyn S. M.(1981). Research on mental imagery : Some goals and directions. *Cognition, 10*, 173-179.

Kosslyn S. M. & Rabin C. S.(1999). Imagery. In R. A Wislon . & F. C. Keil (eds.). *The MIT Encyclopedia of the Cognitive Sciences* (pp.387-389). The MIT Press: Cambridge.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities*. Chicago: University of Chicago Press.

Marsonolek C. J., Kosslyn S. M.(1992). Mental imagery representation. In S. C. Shapiro (eds.). *Encyclopedia of Artificial Intelligence* (pp 928-931). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Presmeg N. C.(1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. English (Eds.). *Mathematical Reasoning Analogies, Metaphors, and Images* (pp.281-289). London: LEA. 권석일 외 11명 (역)(2009). **수학적 추론과 유추, 은유, 이미지**. 서울: 경문사.

Presmeg N. C.(2006a). Research on visualization in learning and teaching mathematics emergence from psychology. In A. Gutierrez & P.Boero (Eds.), *Handbook of Research on the psychology of mathematics education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Presmeg N. C.(2006b). A Semiotic view of the role of imagery and inscriptions in mathematics teaching and learning. *Proceedings of the 30th conference of the International group for the Psychology of the Mathematics Education*, 1, 19-34.

Wheatley G. H.(1997). Reasoning with images in mathematical activity. In L. English (Eds). *Mathematical Reasoning Analogies, Metaphors, and Images* (pp.281-289). London: LEA. 권석일 외 11명 (역)(2009). **수학적 추론과 유추, 은유, 이미지**. 서울: 경문사.

Zazkis, R. Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the Group D_4. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 435-457.

平林一榮(1999). 수학교육의 진보와 전망. **대한 수학교육학회 1999년 춘계 수학교육학연구발표대회 논문집**, 15-32.

Mathematical Thinking Based on the Image in the 'Splitting a Tetrahedron' Tasks by the Mathematically Gifted

Han, Dae Hee (Cheongju National University of Education)

This study is aimed at analysing the mathematical thinking processes based on image by the mathematically gifted. For this, the 'Splitting a Tetrahedron' Task was used and mathematical thinking of the two middle school students were investigated. One of them deduced how many tetrahedral and octahedral were there when a tetrahedra was splitted by the surfaces which were parallel to each face of the tetrahedra without using any physical material. The other one solved the task using physical material and invented new images. A concrete image, indexical image and symbolic image were founded and the various roles of images could be confirmed.

* key words : Mathematical Thinking Based on the Image(이미지에 기반 한 사고), Concrete Image(구체적 이미지), Indexcial Image(인덱스적 이미지), Symbolic Image(상징적 이미지)

논문접수 : 2010. 11. 4
논문수정 : 2010. 11. 25
심사완료 : 2010. 12. 10