

수학 우수아의 통계적 개념 이해도 조사

이 경 화* · 유 연 주** · 홍 진 곤*** · 박 민 선**** · 박 미 미*****

통계학은 학교수학의 일부분으로 포함되어 있지만 전통적인 수학과는 본질적으로 다른 점을 많이 가지고 있다는 연구결과가 보고되어 왔다. 그러나 통계 고유의 특징에 대한 교육 연구, 특히 학교수학의 다른 영역과 차별되는 통계적 개념 이해에 대한 실증적인 자료와 논의가 매우 부족하다. 그러므로 수학적 사고 능력과 통계적 개념 이해 능력이나 통계적 사고 능력 사이의 관계에 대한 논의가 거의 이루어지지 않았다. 이 연구에서는 통계적 사고의 근간을 이루는 몇 가지 핵심 개념들을 추출한 후, 수학적으로 우수한 능력을 갖춘 학생들이 이 통계적 개념들을 이해하는 정도를 조사하였다. 조사 결과, 수학적으로 우수한 능력을 갖춘 학생들이 자연스럽게 발달시킨 개념과 발달시키지 못한 개념이 있었다. 수학적 능력과 통계적 개념 이해 수준 사이에는 낮은 상관관계가 나타났다.

1. 서론

우리나라의 초, 중등 교육과정에서 통계학은 수학 교과목의 일부이며, 확률론과 함께 ‘확률과 통계’라는 영역으로 편성되어 있다. 실제로 통계적 개념과 이론을 구축하기 위해서는 수열, 급수, 함수, 그래프, 적분 등과 같은 수학 이론이 필수적으로 요구되며, 통계학은 이와 같은 수학으로부터 매우 위계적인 이론 체계를 이루기 때문에 통계학을 수학의 일부분으로 이해하는 것도 많은 경우에 있어서는 자연스러운 일일 것이다. 그러나 한편으로는 통계학이 전통적인 수학과는 본질적으로 다른 점을 많이 가지고 있다는 것 또한 간과할 수 없는 문제이다. Moore(1997)가 지적하였듯이 “통계학이 다

루는 대상은 구체적인 의미를 가지고 있는 자료이며 정보를 전달하고 변이성을 가지고 있는 불확실한 자료”이다. 이 지적은 통계학의 연구 대상이 학교수학의 다른 영역, 곧 기하나 대수의 대상인 도형이나 수와는 대비된다는 점을 분명히 하고 있다. 그 밖에도 자료를 해석하는 과정에서 나타나는 귀납적인 근거에 기반하여 추론하고, 경험이나 직관적인 판단을 적절히 활용하는 것을 강조한다는 점에서 학교수학의 다른 영역과는 다른 점이 있다.

수학 교과 내에서 그 체계를 갖추고 있지만 수학과는 구별되는 통계학의 특성은, 학교수학에서 통계교육의 방향을 논의하는 데 중요한 자료로 활용될 수 있다. 그러나 국내 수학교육 연구에서는 통계 영역이 다른 영역과 구별되는 점에 관련된 실증적인 자료, 특히 학생들의 개

* 이경화 (khmath@snu.ac.kr)
** 유연주 (yyoo@snu.ac.kr), 교신저자
*** 홍진곤 (dion@konkuk.ac.kr)
**** 박민선 (dpdlx103@snu.ac.kr)
***** 박미미 (gump28@snu.ac.kr)

념 이해 수준이나 양상, 사고 수준 등에 대한 구체적인 조사 자료가 매우 부족하다. 본 연구에서는 통계적 사고의 근간을 이루는 몇 가지 핵심 개념들을 도출한 후, 수학적으로 우수한 능력을 갖춘 학생들이 이 통계적 개념들을 어느 정도로 이해하고 있는지 조사한다. 또한 통계적 개념 이해와 수학의 다른 영역에 대한 성취도 사이의 상관관계를 알아본다. 이를 통해 통계적 개념 이해에 대한 실증적인 자료에 기반한 통계교육적 시사점을 얻고자 한다.

II. 통계적 개념의 이해

통계학은 불확실성 및 변이성을 가지는 자료를 다루는 학문이다. 따라서 통계학에서 나타나는 개념은 상황 및 맥락을 고려하여 이해해야 할 필요가 있으며, 복합적인 논의를 필수적으로 요구한다는 점에서 본질적으로 다중적인 측면(multifaceted)을 가진다. 그 동안 통계교육 연구에서는 통계적 개념의 이해를 이루는 핵심적인 개념들을 분석해왔다. 핵심적인 통계 개념들은 교육과정과 수업, 평가를 설계하고 실행함에 있어 근간을 이루어왔다. Friel(2008)은 통계교육에서 다루어야 할 핵심 개념으로 자료, 분포, 그래프, 중심경향치, 변이성, 퍼짐의 측도, 연관성, 표본과 표집, 경향성, 통계적 추리, 통계적 모델 등을 제시하였다. 이들 개념은 초·중·고등학교에 걸쳐서 다루어져야 하며, 각각의 개념이 어떤 방식으로 도입되고 발전되도록 해야 하는가에 대한 연구가 지속적으로 수행되고 있다. 본 연구에서는 수학적으로 우수하다고 판단되는 초등학생들을 대상으로 개념 이해 정도를 조사할 것이므로, 이 중 분포, 분포의 특성 중 하나인 특이점, 표본, 연관성 개념을 세부적으로 분석하고, 이를 이해 수준

조사에 포함시키고자 한다.

분포(distribution)는 낱말의 자료가 아니라 자료집합을 하나의 개체로 또는 사고 대상으로 볼 수 있어야 파악되는 개념이다. 자료집합에서 중심적인 경향이나 전반적인 형태, 자료의 밀도와 퍼짐 등을 기준으로 그 특성을 파악해야 한다. 초등학생들은 형식 언어로 표현된 분포의 특징을 다룰 수 없으므로, 시각적인 표현 양식인 그래프에서 분포를 파악하는지 여부를 확인할 수 있다. 실제로 그래프는 기호와 식 등 형식 언어와 더불어 분포의 핵심적인 특징을 드러내는 중요한 표현 양식이다(Friel, 2008, p.320). 그래프에서는 국소적인 경향뿐만 아니라 전체적인 경향도 해석할 수 있으며, 이를 통해 중심경향과 퍼짐에 대한 정보를 추론할 수 있어야 한다(Garfield, 2003, p.25).

특이점(outlier)은 분포를 해석할 때 매우 유의해야 하는 자료이다. Konold와 Pollatsek(2004, p.188)은 특이점을 가진 경우에는 중심경향치, 곧 평균과 같은 값에 의해 분포를 설명할 때 유의해야 한다는 점을 지적하였다. 만약 측정 오류 등으로 인해 다른 자료들과 상당한 차이가 있는 값을 얻으면, 그 값을 단지 하나의 자료로 인정할 것인지 여부를 결정해야 한다. 특이점의 존재를 인식하고 어떻게 처리할 것인지 적절하게 판단할 수 있어야 분포를 적절히 파악할 수 있다. 특히, 특이점이 포함되면 평균보다는 중앙값이 자료의 중심경향치로 적절하다는 것을 파악할 수 있어야 한다(Konold & Pollatsek, 2004, p.188).

표본(sample)을 이용하여 모집단의 특성을 파악하는 것은 통계학의 매우 중요한 사고방법이다. 표본은 모집단 전체가 아니라 일부분이므로 어떻게 추출한 것인지, 어떻게 추론의 근거로 활용할 것인지 이해해야 한다. Garfield(2003)는 표본과 모집단의 관계, 표본에 대한 정보를

모집단에 대한 추정에 활용하는 방법, 표본의 크기와 추정 방법, 모집단을 대표하는 표본을 추출하는 방법 등에 대해 파악하는 것을 강조하였다(p.25). 이는 많은 연구들이 지적인 바와 같이, 크기가 작은 표본 또는 편의 표본의 위험성을 인지해야 함을 의미한다. 예를 들어, 일기예보에서 비가 올 확률이 70%라고 할 때 어떤 자료집합이 표본인가를 생각하지 않고, 어떤 특정한 날 하루에 대한 정보라고 판단하는 학생들이 많다는 연구가 보고되었다(Konold, 1989; Garfield, 2003, p.26에서 재인용). 이와 같이 일련의 사건들을 누적하여 자료집합 전체에 대한 확률을 고려하지 않고 단일 사건 하나하나에 대한 정보로 해석하는 것은 표본으로부터 모집단의 특성을 추정한다는 기본적인 생각을 이해하지 못하는 것을 의미한다.

여러 변량 사이의 연관성은 통계학의 기본적인 관심사 중의 하나이다. 이 연구에서는 초등학생들이 변량 사이의 연관성을 파악하는지 알아볼 예정이므로, 기본적으로 두 변량 사이의 특수한 관계를 파악한다는 의미에 주목한다. 두 변량 사이의 연관성은 하나의 변량을 기준으로 다른 변량의 변화를 파악하고 이로부터 다른 변량에 대한 예측을 시도하기 위한 것이다(Garfield & Ben-Zvi, 2004, p.400). 두 변량을 2×2 분할표나 산점도(scatter plot)로 제시하였을 때, 상관관계와 인과관계 등을 파악하도록 할 수 있다. 선행 연구에서는 학생들이 종종 상관관계와 인과관계를 혼동하거나 부적절하게 파악한다는 것을 보고하고 있다(Konold, 2002; Zieffler & Garfield, 2009, pp.9-10에서 재인용). 예를 들어, 학생들은 자신의 신념이나 경험에 비추어 두 변량 사이의 상관관계나 인과관계를 파악할 수 있다.

지금까지 살펴본 바와 같이, 학생들의 일상 언어, 비형식적 추론, 학교수학의 여러 영역에

서 학습한 수학적 지식, 형식적 추론 등은 통계적 개념 이해 수준에 직·간접적으로 영향을 미친다. 국외에서 이루어진 선행연구에서는 학생들이 네 개념에 대해 충분히 이해하지 못하고 있으며, 특히 변이성 개념을 이해하는 데 필요한 통합적이고 관계적인 사고 능력이 부족하다는 점을 지적하였다. 본 연구에서는 우리나라 학생들, 특히 수학적으로 능력이 우수한 학생들을 대상으로 이들 네 개념에 대한 이해 정도를 파악하고자 한다. 이는 향후 통계교육 과정 또는 교과서 개발에 참고할 수 있는 기초 자료가 될 것으로 기대한다.

III. 통계적 개념 이해도의 조사 방법

1. 조사 대상 및 방법

본 연구에서는 통계 영역이 다른 영역과 다르다는 국내외 연구 결과를 실증적인 자료를 토대로 확인하고, 통계 교육적 시사점을 도출하고자 한다. 이를 위해 수학적으로 능력이 우수하다고 알려진 학생들이 통계 영역의 핵심적 개념에 대해 어느 정도 이해하고 있는지 알아 보았다. 조사 대상은 서울시 교육청에서 2010년 서울대학교 영재교육원 입학 전형자로 추천한 초등학교 6학년 530명이었다. 이들은 수학반 입학을 위한 선발고사에 참여하였으며, 통계 문제 외에 대수, 기하 등의 수학 영역에서 고도의 사고력을 요구하는 6개의 복합 과제를 해결하였다.

통계적 개념 이해도를 조사하는 방법으로는 문장 형태로 제시된 통계 명제에 대해 참, 거짓을 표시하도록 하는 것이었다. 참, 거짓을 표현하도록 하면 사지선다형 문항에 따른 조사가 가지는 약점인 우연적으로 정답을 선택하는 경

우를 배제하도록 한다. 무응답한 경우도 있었기 때문에 문항에 따라 응답자 수가 달랐으며, 그 범위는 482명에서 493명까지였다(<표 IV-2> 참고). 연구를 위한 검사 문항은 Garfield(2003)를 참고하여 우리나라 학생들에게 친숙한 상황과 용어로 재구성하여 제작하였다. 아직 통계적 개념 이해도를 위한 표준화된 국내 검사지가 없으므로, 외국에서 다년간의 연구에 따라 개발된 문항을 활용하였다.

2. 문항 범주 및 내용

<표 III-1> 통계적 개념 이해 수준 검사 문항의 내용과 약어

문항	구성 요소	개념 구성 요소의 이해도 검사 내용	약어
A	분포	A-1 히스토그램에서 백분위값을 찾을 수 있다.	백분위
		A-2 비대칭 분포의 중앙값을 추측할 수 있다.	비대칭
		A-3 대표값을 이용하여 두 분포를 비교할 수 있다.	분포비교
		A-4 두 분포를 합성한 결과를 추측할 수 있다.	합분포
B	표본	B-1 무작위 표본의 독립성을 이해한다.	표본독립성
		B-2 무작위 표본의 우연성을 이해한다.	표본우연성
		B-3 무작위 표본의 적합성을 이해한다.	표본적합성
		B-4 무작위 표본에서 표본크기의 영향을 이해한다.	표본크기
C	특이점	C-1 특이점이 평균에 미치는 영향을 이해한다.	특이점평균
		C-2 특이점이 분포에 큰 영향을 미치지 않음을 이해한다.	특이점분포
		C-3 특이점은 측정오류로 인해 일어날 수 있음을 이해한다.	측정오류
		C-4 특이점은 중앙값에 큰 영향을 미치지 않음을 이해한다.	특이점중간
D	두 질적 변수의 연관성	D-1 질적변수의 조건부확률을 구분한다.	조건부확률
		D-2 질적변수 사이의 연관성을 유추할 수 있다.	연관성
		D-3 질적변수의 주변확률을 구할 수 있다.	주변확률(질)
		D-4 표본선택의 방법을 고려하여 행과 열의 비율을 해석한다.	행열비율
E	두 양적 변수의 상관성	E-1 통계적 상관관계를 유추할 수 있다.	상관관계
		E-2 선형관계로부터 목적변수의 값을 유추할 수 있다.	선형유추
		E-3 양적변수의 주변확률을 유추할 수 있다.	주변확률(양)
		E-4 산점도의 특이점에 대해 올바른 판단을 할 수 있다.	상관특이점

문항은 <표 III-1>에 제시한 바와 같이 분포(A), 표본(B), 특이점(C), 두 질적 변수 사이의 연관성(D), 두 양적변수 사이의 상관성(E)의 다섯 가지 범주로 구성하였다. 각각의 범주마다 다시 4개의 하위 문항을 개발하였다. 다섯 가지 범주의 각 세부 문항의 내용은 분석의 편의를 위해 약어로 표현하였으며, 이를 <표 III-1>에서 확인할 수 있다. 문항의 자세한 내용은 <부록 1>에 제시하였다.

분포에 대한 이해를 살펴보는 문제 A는 평균, 중앙값, 백분위 등을 매개로 하여 자료의

전체적인 분포를 해석하는 능력 그리고 이를 통해 서로 다른 집단에서 얻어진 자료의 분포를 비교하는 능력을 확인하기 위한 세부 문항으로 구성되어 있다. 평균만 학습한 학생들이 중앙값과 백분위 개념을 자연스럽게 발전시키고 이를 이용하여 분포를 파악하는지 살펴볼 것이다. 표본에 대한 이해를 살펴보는 문제 B는 모집단에서 무작위로 추출한 표본이 가지는 성질 가운데 선택의 독립성, 우연성, 적합성 등을 이해하는지 확인하기 위한 세부 문항으로 구성되어 있다. 모집단에서 무작위로 표본을 선택한다는 의미를 직접적으로 다루지 않은 상태에서 학생들이 무작위성으로 인한 여러 가지 성질을 이해할 수 있을지 살펴볼 것이다. 특이점에 대한 이해를 살펴보는 문제 C는 주어진 자료들과 극단적으로 다른 값이 왜 발생하고 어떻게 다루어야 하는지에 대한 개념 수준을 확인하기 위한 세부 문항으로 구성되어 있다. 특히, 측정오류나 입력오류 등 특이점이 만들어지게 되는 가능성과 더불어 특이점과 평균 사이의 관계를 어떻게 규정해야 할지 생각해볼게 하고 그 결과를 살펴볼 것이다. 두 질적 변수의 연관성(association between qualitative variables)에 대한 이해를 살펴보는 문제 D는 조건부확률과 주변 확률(marginal probability) 개념을 적절히 구분하여 파악하는지 확인하기 위한 세부 문항으로 이루어져 있다. 또한 두 양적 변수의 상관성(correlation between quantitative variables)에 대한 이해를 살펴보는 문제 E는 각 변수의 주변 분포(marginal distribution)를 적절히 고려할 수 있는지 확인하기 위한 세부 문항

으로 구성되어 있다.

문항 개발 과정에서는 초등학생들이 이해하기 쉽고 명확한 언어적 표현을 사용하기 위하여 노력하였다. 또한, 히스토그램, 분포표, 2x2 분할표, 산점도 등의 시각적인 표현 도구를 활용하여 문제 상황을 직관적으로 이해하고 다룰 수 있도록 하였다.

IV. 조사 결과 분석

이 장에서는 영재 선발 평가 응시자들의 통계적 개념 이해도 검사의 자료 분석 결과를 제시한다. 앞서 선행 연구 분석을 통해 알아본 바와 같이 통계적 개념 이해를 위해 필요한 능력 요소 또는 개념 요소가 있으나 이것이 일상적인 경험에 따른 신념의 영향 때문에 이해를 가로막는다. 본 연구에서는 수학적으로 우수한 능력을 갖춘 학생들이 세부 개념별로 어느 정도의 이해 수준에 있는지 알아보고, 개념별 이해 수준 사이의 상관관계, 통계를 제외한 수학 문제해결력과의 상관관계를 알아본다. 이는 수학적으로 우수한 능력을 갖춘 학생들이 통계적 개념에 대해 전반적으로 어느 정도의 이해 능력을 갖추고 있는지, 특별히 이해에 어려움을 보이는 개념이 어떤 것인지, 수학적 능력 수준과의 차이는 무엇인지 파악하기 위해서이다.

조사 문항은 분포, 표본, 특이점, 두 질적 변수의 연관성, 두 양적변수의 상관성에 관한 A-E 번까지의 문제, 그리고 각각의 문제마다 4개의 세부문항들로 이루어졌다. 세부문항별 정/오답

<표 IV-1> 문제별 평균 및 표준편차

	문제 A	문제 B	문제 C	문제 D	문제 E	총점
평균	2.90	2.65	1.99	3.69	2.88	14.13
표준편차	0.95	0.92	1.03	0.69	1.00	2.66

* 각 문제는 4점 만점

결과는 1점/0점으로 처리하여 분석하였기 때문에 각 문제별 득점은 0~4의 정수로 표현되었다. <표 IV-1>는 각 문제별 평균과 표준편차를, <표 IV-2>은 각 세부분항별 정답률 결과를 보여준다.

1. 분포 이해 수준 분석 결과

문제 A의 평균 정답률은 2.90, 표준편차는 0.95였다. 4개의 하위 문항 중에서 A-1 문항의 정답률이 가장 낮았으며(44%), A-3 문항의 정답률이 가장 높았다(98%). A-2 문항과 A-4 문항에 대해서는 각각 85%와 71%의 정답률을 보였다. A-1 문항은 히스토그램으로 제시된 자료를 보고 백분위 값을 계산할 수 있는지 알아보는 것이었다. 히스토그램에 제시된 자료를 정확하게 읽고 해석하여 상위 30% 백분위 값에 대한 정보를 얻어야 하는데, 30%라는 정보와

70점이라는 점수 사이의 관계를 정확하게 파악하지 못한 학생들이 많은 것으로 보인다. 그런데 50%에 해당하는 값에 대한 A-2 문항의 정답률이 85%로 높았던 것을 고려하면, A-1 문항의 ‘약 70점’이라는 언어적 표현이 낯설었기 때문에 낮은 정답률이 나왔을 가능성도 있다. 이 결과는 상당수 학생들이 자료집합 내에서 맥락을 적절히 고려하지 못하였음을 드러낸다.

2. 표본 이해 수준 분석 결과

문제 B의 평균 정답률은 2.65, 표준편차는 0.92였다. B-4 문항의 정답률이 가장 낮았으며(38%), B-3 문항의 정답률이 가장 높았다(94%). B-1 문항과 B-2 문항의 정답률은 각각 61%와 78%였다. B-4 문항은 10명의 표본과 1000명의 표본의 평균이 가지는 분포에 대한 중심극한정리 개념을 직관적으로 파악하는지 알아보는 것

<표 IV-2> 세부분항별 정답률과 신뢰구간

	문제 A. 분포				문제 B. 표본			
	백분위	비대칭	분포비교	합분포	표본독립성	표본우연성	표본적합성	표본크기
응답자	491	488	489	485	485	488	487	486
정답자	215	414	477	343	298	380	458	187
퍼센트	44%	85%	98%	71%	61%	78%	94%	38%
(신뢰구간)	(0.39, 0.48)	(0.82, 0.88)	(0.96, 0.99)	(0.67, 0.75)	(0.57, 0.66)	(0.74, 0.82)	(0.92, 0.96)	(0.34, 0.43)

	문제 C. 특이점				문제 D. 두 질적변수의 연관성				문제 E. 두 양적변수의 상관성			
	특이점 평균	특이점 분포	측정 오류	특이점 중간	조건부 확률	연관 관계	주변확률(질)	행열 비율	상관 관계	선형 유추	주변확률(양)	상관 특이점
응답자	482	483	485	483	491	491	490	491	492	492	492	493
정답자	276	387	142	190	466	482	444	451	432	320	310	377
퍼센트	57%	80%	29%	39%	95%	98%	91%	92%	88%	65%	63%	76%
(신뢰구간)	(0.53, 0.62)	(0.77, 0.84)	(0.25, 0.33)	(0.35, 0.44)	(0.93, 0.97)	(0.97, 0.99)	(0.88, 0.93)	(0.89, 0.94)	(0.85, 0.91)	(0.61, 0.69)	(0.59, 0.67)	(0.73, 0.80)

이었다. 이에 대해 상당수 학생들은 표본의 크기와 상관없이 표본의 평균이 일정한 분포를 가진다고 파악하여 오답을 선택한 것으로 보인다. 수학적으로 우수한 성취를 보이는 학생들이지만 표본의 평균을 표본의 크기와 관련지어 파악하고 다루어야 함을 이해하는 수준에 도달하지 못하고 있음을 확인할 수 있다.

3. 특이점 이해 수준 분석 결과

문제 C의 평균 정답률은 1.99로 5개 문제 중 가장 낮았다. 특히, C-3 문항과 C-4 문항의 정답률은 각각 29%와 39%로 매우 낮았다. C-2 문항과 C-1 문항의 경우, 정답률은 각각 80%와 57%였다. C-3 문항에서는 발길이가 340mm라는 비현실적인 자료가 측정오류의 결과라고 추측하여 이를 제외하고 분석하는 자료정제(data cleansing) 개념을 형성하고 있는지 파악하기 위한 것이었다. 자료를 생성할 때는 언제나 측정이나 관찰 또는 입력 오류가 발생하는데, 상당수 학생들은 이러한 경우를 고려하지 못한 것으로 보인다. 한편, 이 문항에는 ‘제외하고 평균을 구하는 것이 좋다’와 같은 비결정론적인 관점이 반영되어 있는데, 이와 같은 관점에 익숙하지 않아서 적절하게 대처하지 못하였다고도 해석할 수 있다. 학생들이 경험하지 못한 모호한 언어적 표현의 영향인지 여부는 후속 연구에 의해 확인되어야 한다. C-2 문항과 C-4 문항은 모두 특이점이 백분위수에 영향을 줄 것인지 파악하는 능력을 살펴보는 것이었으나 정답률은 매우 달랐다. 이는 상위와 하위 백분위수에 특이점이 다르게 영향을 미치는 것으로 파악하고 있다는 가능성을 보여주고 있다. 문제 C에 대한 낮은 정답률은 학생들이 백분위수, 중앙값, 평균을 직접 구하지 않고, 직관이나 언어적 해석에 기초하여 해석하였을 것이라

는 추측을 가능하게 한다. 이는 특이점 개념에 대한 이해 수준이 다른 개념에 대한 것보다 더 낮은 이유가 될 수 있다.

4. 두 질적 변수의 연관성에 대한 이해 수준 분석 결과

문제 D의 평균 정답률은 3.69, 표준편차는 0.62였다. 이는 학생들이 2x2 분할표에 제시된 두 질적 변수의 관계와 그에 대한 결론에 대하여 옳은 판단을 할 수 있음을 나타낸다. 그러나 학생들이 문제 상황을 언어적으로, 직관적으로 해석하여 답을 하였을 가능성도 배제하기는 어렵다. 다시 말하여, 남학생이 더 많은 시간 동안 컴퓨터 게임을 할 것이라는 상식적인 판단에 기초하여 높은 정답률을 보였을 수도 있다.

5. 두 양적변수의 상관성에 대한 이해 수준 분석 결과

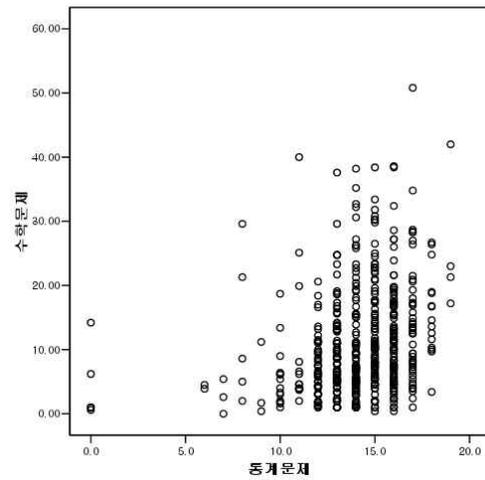
문제 E의 평균 정답률은 2.88, 표준편차는 1.00이었다. E-2 문항과 E-3 문항의 정답률은 각각 65%와 63%였고, E-1 문항과 E-4 문항의 정답률은 각각 88%와 76%로 높은 편이었다. 그러나 질적 변수의 연관성에 대한 이해 수준 보다는 낮은 수준을 보였다. 2x2 분할표에서의 주변 확률에 기초한 판단은 잘 하였지만(D-3), 산점도를 보면서 홈런의 수를 0으로 고정했을 때의 삼진의 평균에 대한 추론은 잘 해내지 못하였다(E-3). 이는 산점도의 전체적인 경향이 아니라 산점도의 자료를 토대로 홈런이 0이더라도 삼진의 수의 평균은 0보다 훨씬 큰 수가 될 수 있음을 생각하지 못한 결과로 보인다.

6. 상관관계 분석 결과

이하에서는 5개 문제에 대한 응답 사이의 상관관계, 각 문제의 세부 문항에 대한 응답 사이의 상관관계, 다른 수학 문제들에 대한 응답과 통계 문제들에 대한 응답 사이의 상관관계를 살펴본다. 먼저 <표 IV-3>에서 알 수 있는 바와 같이, 5개 문제 사이의 상관계수는 0.25 이하로 대체로 약한 상관을 보였고, 문제 C와 문제 E는 유의미한 상관관계가 없었다. 이는 본 연구에서 확인한 통계적 개념들이 독립적임을 나타내며, 선행연구 결과와도 일치하는 결과이다(Garfield, 2003).

다음으로 세부문항의 정답과 오답 선택 사이의 상관관계를 살펴보았다(<표 IV-4> 참고). 이중 -0.9 이하의 강한 음의 상관관계를 보인 경우는 사분상관계수(tetrachoric correlation coefficient) 결과를 신뢰하기에 양쪽의 정답률이 너무 높으므로(90% 이상) 그 의미를 해석하지 않기로 결정하였다. 그 외에도 한쪽의 정답률이 90%이상인 경우에는 의미 해석을 하지 않았다.

문제 E의 E-1 문항과 E-4 문항에 대해서는 0.77의 비교적 강한 상관관계를 보였다. 이는 흠런의 수와 삼진의 수가 양의 상관관계를 가지는가에 대한 종합적인 판단이 두 문항의 답을 결정하기 때문인 것으로 분석된다. 그럼에도 E-4 문항의 정답률이 E-1 문항에 비하여 떨어지는 것은 두 문항사이의 논리적 연관성이 되지 않음을 보여준다.



[그림 IV-1] 수학 문제와 통계 개념 이해 수준에 대한 산점도

V. 결론

이 연구에서는 수학적으로 우수한 성취를 보여 교육청으로부터 추천받은 학생들의 통계적 개념 이해도를 조사하였다. 앞 절의 분석결과에서 알 수 있듯이 총 20개 세부 문항 중 12개에 대해서는 70% 이상의 높은 정답률을 얻었지만, 4개 문항(A-1, B-4, C-3, C-4)에 대해서는 50% 미만의 낮은 정답률에 그쳤다. 특히 C-3의 경우 29%의 정답률밖에 얻지 못하였다. 이와 같은 결과로부터 다음과 같은 논점과 교육적 시사점을 도출할 수 있다.

<표 IV-3> 문제 A~E 결과의 상관계수

상관계수	문제 A	문제 B	문제 C	문제 D	문제 E
문제 A	1.00				
문제 B	0.20	1.00			
문제 C	0.18	0.17	1.00		
문제 D	0.20	0.24	0.16	1.00	
문제 E	0.12	0.14	0.07 *	0.25	1.00

(* p-value>0.05)

<표 IV-4> 세부문항 사이의 상관계수 (Tetrachoric Correlation Coefficient)

	문제 A. 분포				문제 B. 표본				문제 C. 특이점				문제D. 두질적변수의연관성				문제E. 두양적변수의상관성			
	A-1	A-2	A-3	A-4	B-1	B-2	B-3	B-4	C-1	C-2	C-3	C-4	D-1	D-2	D-3	D-4	E-1	E-2	E-3	E-4
A-1	1.00																			
A-2	0.45	1.00																		
A-3	-0.21	0.39	1.00																	
A-4	-0.02	0.35	-0.31	1.00																
B-1	-0.01	-0.01	0.12	0.22	1.00															
B-2	0.02	-0.17	0.33	-0.03	-0.12	1.00														
B-3	-0.03	0.24	0.40	0.19	0.21	0.14	1.00													
B-4	0.02	-0.01	0.16	-0.04	-0.07	-0.03	0.15	1.00												
C-1	0.16	0.07	0.08	0.14	0.08	0.12	0.11	-0.03	1.00											
C-2	-0.02	0.15	0.36	0.10	0.02	0.11	0.23	0.15	0.45	1.00										
C-3	0.00	-0.03	0.05	0.00	-0.08	0.12	0.26	-0.11	0.03	-0.16	1.00									
C-4	0.07	-0.07	0.17	-0.03	-0.09	0.06	0.07	-0.10	-0.18	0.16	0.27	1.00								
D-1	-0.05	0.09	0.11	0.14	0.21	0.09	-0.09	-0.12	0.11	0.24	-0.09	0.20	1.00							
D-2	0.11	0.11	-0.90	0.05	-0.06	0.14	-0.90	0.06	-0.23	0.29	-0.05	0.06	0.18	1.00						
D-3	-0.03	-0.11	0.15	-0.05	0.04	-0.19	-0.08	0.12	0.01	0.04	-0.09	-0.09	0.07	0.49	1.00					
D-4	0.09	-0.07	-0.94	-0.07	0.02	0.10	-0.05	-0.09	0.07	0.09	-0.05	-0.18	-0.01	0.52	0.16	1.00				
E-1	-0.19	0.15	0.08	0.12	0.13	-0.01	0.11	-0.13	0.14	0.11	0.02	0.01	0.23	0.31	0.13	0.13	1.00			
E-2	-0.14	-0.02	0.25	0.09	0.04	0.13	0.08	0.12	-0.09	0.06	0.12	0.02	0.16	-0.02	0.24	-0.08	0.21	1.00		
E-3	0.03	-0.03	-0.05	-0.06	0.03	-0.15	-0.08	-0.08	-0.06	-0.07	-0.11	-0.07	-0.18	-0.17	-0.03	0.01	-0.20	0.01	1.00	
E-4	-0.08	0.11	0.23	0.09	0.12	0.17	0.07	-0.11	-0.01	0.08	0.03	0.08	0.37	0.12	-0.08	-0.02	0.77	0.34	-0.34	1.00

첫째, 학생들이 자료 생성 맥락을 고려하여 통계적으로 판단하는 능력은 상대적으로 부족하였다. Krutetskii(1976)는 수학적 능력을 정보 수집, 정보처리, 정보파지의 각 단계로 구분하여 살펴보았다. 이에 비추어보면 수학적으로 우수한 능력을 갖추고 있는 학생들이라고 해도 통계적인 정보를 수집하여 맥락에 맞게 처리하는 능력은 충분히 발달시키지 못하였다고 볼 수 있다. 특히 C-3 문항에 대해 29% 그리고 B-4 문항에 대해 38%만 바르게 답한 것을 보면, 통계적인 자료를 주어진 맥락과 관련지어 해석하는 것에 대해 충분히 이해하지 못하고 있음을 알 수 있다. C-3 문항은 측정 오류로 인하여 잘못된 자료를 얻을 수 있으므로, 이를 배제하고 평균을 구하는 것이 적절하다는 것을 이해하는지 파악하기 위한 것이었다. 이와 같은 맥락은 학생들에게 생소한 것일 수 있으며, 일상적인 경험을 통해 자연스럽게 발달시키지 못하고 있음을 알 수 있다. B-4 문항의 경우, 표본의 크기가 클수록 표본의 평균이 모집단의 평균에 가까워진다는 것을 이해하는지 확인하기 위한 것이다. 이는 널리 알려진 오개념이며, 탐색적 자료 분석을 통한 의사결정을 강조하는 통계적 사고의 교육을 통해 극복할 수 있는 것으로 논의되고 있다(Garfield & Ben-Zvi, 2004).

둘째, 학생들의 그래프 해석 능력 또는 그래프에 포함되어 있는 정보를 적절히 다루는 능력이 부족한 것으로 판단된다. 수학과 교육과정에서는 초등학교 2학년부터 간단한 표와 그래프를 학습하도록 하고 있으며, 막대그래프, 그림그래프, 꺾은선그래프, 줄기와 잎 그림, 원 그래프, 띠그래프 등을 그리거나 해석하도록 하고 있다(교육과학기술부, 2007). 그러나 A-1에 대한 응답률이 44%인 것을 보면, 그래프에서 어떤 정보를 제공하는지 단순하게 파악하는 정도가 아니라, 그래프에 포함되어 있는 정보를

이용하여 계산하거나 관계성을 파악하는 수준까지 나아가지 못하고 있음을 알 수 있다. Sriraman(2008)의 연구에서는 사고의 가역성이 매우 중요한 능력임을 강조하고 있는데, 이 연구에서 조사한 것과 같은 통계적 문제 상황에 대해서는 상당수 학생들(56%)이, 그래프로 주어진 정보를 표 또는 수 값들로 바꾸어 적절하게 관련시키는 가역적 사고 능력을 보여주지 못하였다. 이는 수 값, 표, 그래프 등 통계적 표현 방법을 변환하는 과정에서 필요한 사고의 가역성이 자연스럽게 발달되지 않으며, 적절한 교육적 조치가 필요함을 시사한다.

셋째, 두 질적 변수의 연관성과 두 양적변수의 상관성에 대해서는 학생들의 이해 수준이 비교적 높았다. 특히 두 질적 변수의 연관성 이해 여부를 확인하는 문제 D의 각 문항의 정답률이 매우 높았다(91% 이상 98% 이하). 이는 수학적으로 우수한 능력을 갖춘 학생들이 관계적 사고에 익숙하기 때문에 통계적 개념 이해를 위해 필요한 하위 개념 사이의 관계 파악에도 우수한 능력을 보여주는 것으로 해석할 수 있다. 그러므로 통계적 사고와 수학적 사고가 본질적으로 다른 측면을 가지고 있다고 해도 관계적 사고 능력의 측면에서는 공통성을 가지고 있다고 볼 수 있다.

넷째, 통계적 개념 이해 수준과 수학적 능력은 상관관계가 매우 낮았다. 이 연구에 참여한 학생들이 통계 영역을 제외한 다른 영역에서 얻은 성적과 통계적 개념 이해 수준 사이의 상관계수는 0.27이었다. 이는 통계적 사고와 수학적 사고가 독립적인 특성을 가지고 있다는 선행연구들과 일맥상통하는 결과이다. 특히 수학적 능력 수준이 높은 학생들이 일부 통계적 개념에 대해 낮은 이해를 보인 것은 조사 문항들이 간결하지 않은 언어로 표현된 것과 무관하지 않은 것으로 판단된다. 이를 포함하여 수학

적 사고와 구분되는 통계적 사고 고유의 특성을 파악하지 못한다면, 통계교육은 적절하게 이루어지기 어렵다는 점을 확인하였다.

지금까지의 논의를 요약하면, 수학적으로 우수한 능력을 갖춘 학생들이 관계적 사고 능력을 필요로 하는 통계적 개념에 대해서는 비교적 높은 이해 수준을 보였다. 그러나 통계적 개념을 내재하고 있는 문제 상황에 적응하지 못한다거나, 그래프와 관련된 가역적 사고를 하지 못한다는 점을 확인하였다. 전반적으로 통계적 개념 이해 수준과 수학적 능력 사이의 낮은 상관관계도 확인하였다. 그러므로 통계적 개념 이해는 수학적 능력과 독립적인 측면을 필요로 하며, 이를 위한 교육적 조치가 필요하다는 결론을 얻었다. 특히 수학적 능력에 대한 관점에 의해서만 통계적 개념을 지도한다면, 통계교육은 적절하게 이루어지기 어려움을 확인하였다. 이 연구에서는 수학적으로 우수한 학생들을 대상으로 통계적 개념 이해도를 조사하였지만, 일반적인 수준에 있는 학생들로 대상을 넓혀서 조사할 필요가 있다. 다양한 학교급의 학생들을 대상으로, 다양한 통계적 개념 이해 수준도 조사할 필요가 있다. 또한 심층 면담을 통해 특정 개념을 이해하지 못하는 현상에 대한 세부적인 논의 역시 이루어져야 한다. 이러한 연구들을 바탕으로 새로운 통계교육의 방향을 정립하고, 교사교육에도 반영함으로써만 통계교육 개선을 기대할 수 있을 것이다.

참고문헌

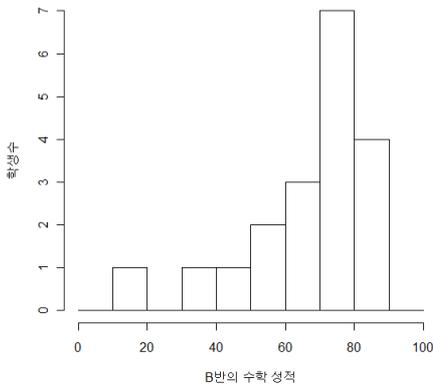
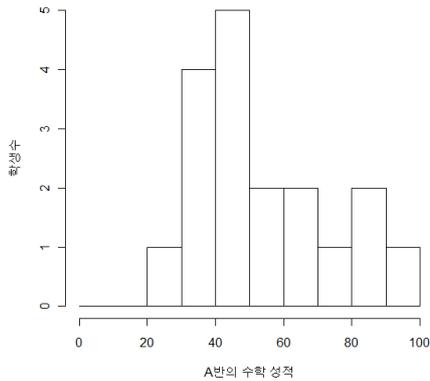
- 교육과학기술부(2007). **수학과 교육과정**. 서울: 교육과학기술부.
- Friel, S. N. (2008). The Research frontier: Where technology interacts with the teaching and learning of data analysis and statistics. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2. Cases and Perspectives* (pp. 279-331). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Garfield, J. (2003). Assessing statistical reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 2(1), 22-38.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2004). Research on statistical literacy, reasoning, and thinking: Issues, challenges, and implications. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 397-409). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Konold, C., & Pollatsek, A. (2004). Conceptualizing an average as a stable feature of a noisy process. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 259-289). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. The University of Chicago Press.
- Moore, S. D. (1997). New pedagogy and new content: the case of statistics. *International Statistical Review*, 65(2), 126-129.
- Sriraman, B. (2008). Gifted ninth graders' notions of proof: Investigating parallels in approaches of mathematically gifted students and professional mathematicians. In B. Sriraman (Ed.), *Creativity, giftedness, and talent development in mathematics* (pp. 61-84). Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Zieffler, A., & Garfield, J. (2009). Modeling the growth of students' covariational reasoning during an introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 7-31.

<부록 1> 통계 개념 이해 수준 검사지

다음 물음에 답하십시오.

문제 A. 다음은 어느 학교 A반과 B반의 수학 성적을 그래프로 나타낸 것이다.



다음 설명이 맞으면 ○표, 틀리면 x표 하시오.

- (1) A반에서 상위 30%에 해당하는 학생의 수학 성적은 약 70점이다. ()
- (2) B반에서 상위 50%에 해당하는 학생의 수학 성적은 대략 B반의 평균보다 높다. ()
- (3) B반의 최하 성적이 A반의 최하 성적보다 낮으므로, B반의 수학 성적은 A반의 수학 성적보다 대체로 낮다. ()

- (4) 두 반에 있는 학생들 모두의 수학 성적을 위와 같은 방식으로 그래프에 나타내면, 가장 많은 학생들이 포함된 성적의 범위에 평균이 포함된다. ()

문제 B. 다음은 통계청에서 조사한 우리나라 18~24세 남자의 키에 관련된 자료이다. 같은 시기에 보건원에서 같은 나이 범위의 남자들 중 일부를 임의로 선택하여 키를 조사하였다.

키 (cm)	백분율
155이상 ~ 160미만	1.9%
160이상 ~ 165미만	10.5%
165이상 ~ 170미만	26.1%
170이상 ~ 175미만	34.7%
175이상 ~ 180미만	21.6%
180이상 ~ 185미만	5.2%
계	100%

다음 설명이 맞으면 ○표, 틀리면 x표 하시오.

- (1) 10명을 선택했을 때, 10명이 모두 180cm 이상일 확률은 대략 5% 이다. ()
- (2) 100명을 선택했을 때, 그 키의 평균이 160 cm 미만일 수 없다. ()
- (3) 1000명을 선택했을 때, 그 키의 평균이 170cm 이상, 175cm 미만일 확률이 175cm 이상, 180cm 미만일 확률보다 크다. ()
- (4) 10명을 선택했을 때와 1000명을 선택했을 때를 비교하면, 그 키의 평균이 170cm 이상에서 175cm 미만일 확률은 각각 같다. ()

문제 C. 다음은 어느 반 학생들의 발길이를 조사하여 표에 나타낸 것이다.

발길이 (mm)	학생 수
210 이상 ~ 220 미만	**
220 이상 ~ 230 미만	****
230 이상 ~ 240 미만	*****
240 이상 ~ 250 미만	*****
250 이상 ~ 260 미만	*****
260 이상 ~ 270 미만	***
340 이상 ~ 350 미만	*

다음 설명이 맞으면 ○표, 틀리면 x표 하시오.

- (1) 발길이가 340mm 이상인 학생의 자료를 제외하면 평균이 8mm 정도 줄어든다. ()
- (2) 발길이가 340mm 이상인 학생의 자료를 제외해도 발길이 230mm가 하위 몇%인지는 별로 변하지 않는다. ()
- (3) 발길이가 340mm 이상인 학생의 자료를 제외하고 평균을 구하는 것이 좋다. ()
- (4) 발길이가 340mm 이상인 학생의 자료를 제외하면 상위 50%에 해당하는 발길이가 2~3mm 줄어든다. ()

문제 D. 다음은 초등학교 150명에게 매일 한 시간 이상 컴퓨터 게임을 하는지 조사하여 표에 나타낸 것이다.

	네	아니오
남	24	26
여	29	71

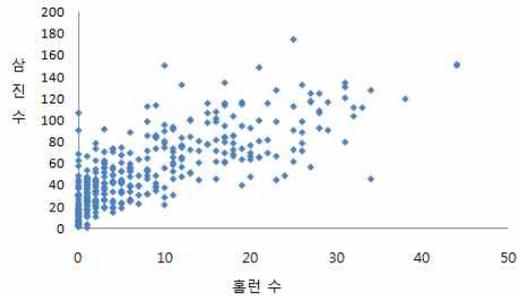
다음 설명이 맞으면 ○표, 틀리면 x표 하시오.

- (1) 조사 결과, 남학생들의 약 16%는 매일

한 시간 이상 컴퓨터 게임을 한다. ()

- (2) 조사 결과, 여학생들은 대략 매일 한 시간 이상의 컴퓨터 게임을 한다. ()
- (3) 조사 결과, 이 초등학교의 35% 정도는 매일 한 시간 이상의 컴퓨터 게임을 한다. ()
- (4) 조사 결과, 여학생들이 남학생들보다 컴퓨터 게임을 더 많이 한다. ()

문제 E. 다음은 어느 해 338명의 야구 선수의 홈런과 삼진의 수를 그래프로 나타낸 것이다.



다음 설명이 맞으면 ○표, 틀리면 x표 하시오.

- (1) 대체로 홈런을 많이 친 선수가 삼진도 많이 당하였다. ()
- (2) 홈런 수가 40개인 선수의 삼진 수는 140개 정도라고 볼 수 있다. ()
- (3) 홈런을 전혀 친 선수의 삼진도 거의 당하지 않았다. ()
- (4) 홈런을 많이 친 삼진은 별로 당하지 않은 선수가 있으므로 홈런과 삼진은 연관성이 없다. ()

An Investigation of Mathematically High Achieving Students' Understanding of Statistical Concepts

Lee, Kyeong Hwa (Seoul National University)

Yoo, Yun Joo (Seoul National University)

Hong, Jin Kon (Konkuk University)

Park, Min Sun (The Graduate School of Seoul National University)

Park, Mi Mi (The Graduate School of Seoul National University)

Even though statistics is considered as one of the areas of mathematical science in the school curriculum, it has been well documented that statistics has distinct features compared to mathematics. However, there is little empirical educational research showing distinct features of statistics, especially research into the understanding of statistical concepts which are different from other areas in school mathematics. In addition, there is little discussion of a relationship between the ability of mathematical thinking and the ability

of understanding statistical concepts. This study extracted some important concepts which consist of the fundamental statistical reasoning and investigated how mathematically high achieving students understood these concepts. As a result, there were both kinds of concepts that mathematically high achieving students developed well or not. There is a weak correlation between mathematical ability and the level of understanding statistical concepts.

* key words : Statistical concept(통계적 개념), Understanding of statistical concept(통계적 개념의 이해), mathematically high achieving student(수학 우수자), Mathematical ability and the level of understanding statistical concept(수학적 능력과 통계적 개념 이해 수준)

논문접수 : 2010. 11. 6

논문수정 : 2010. 12. 2

심사완료 : 2010. 12. 10