

예비 수학 교사 교육에서 시각적 자료를 이용한 문제 해결 지도 사례

김 남 희*

본 연구에서는 사범대학 수학교육과의 ‘수학문제해결방법론’ 강좌 시간을 이용하여 학교 수학의 효과적인 교수-학습을 위한 교육 활동을 실행하였다. 예비 수학 교사들을 대상으로 수학의 내용 이해와 지도에 도움을 줄 수 있는 시각적 자료를 탐구하도록 하고, 조별로 동료 학생들에게 그 내용을 지도하는 발표 수업을 진행하였다. 본 연구의 실행 과정을 통해 예비 수학 교사들은 자신의 수학 학습에 대한 인지적, 정의적 측면의 긍정적인 변화를 경험하였고, 수학 학습에 대한 인식의 변화, 자신의 수학 학습에 대한 반성, 교사로서 준비해야 할 점 등에 대해 깊이 생각해 보는 학습의 기회를 가지게 되었다. 본 연구에서 실행한 바와 같은 지도 사례는 학교 수학의 문제 해결 지도를 위한 예비 수학 교사들의 실천 지향적인 활동을 통해 그들의 교수 내용 지식의 성장을 도울 수 있다. 또한 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 제공해야 한다는 2007 개정 교육과정의 교수-학습 제안을 예비 수학 교사들이 실제 수업의 현장에서 구체화하는 데에도 도움을 줄 수 있다.

1. 서론

사범대학의 예비 수학 교사 교육은 이론적 접근 못지않게 실천적 실행의 접근 과정도 필요하다. 학교 수학에서 요구되는 바람직한 지도 과정은 수학교육의 이론적 수준에서만 논의되는 것이 아니라 그러한 지도가 실제 학교 수업에서 효과적으로 구현될 수 있도록 하는 구체적인 실행 수준에서의 논의도 요구되는 것이다.

학교 수학의 교수-학습 과정에서는 추상적이고 형식적인 수학 내용에 대한 의미있는 이해를 돕기 위해 학습자의 심리적인 요인을 고려한 지도가 필요하다. 학습자의 심리를 고려한 지도는 여러 가지 형태로 구현될 수 있겠지만 형식화된 수학 내용의 의미와 이해를 뒷받침하는 구체적인 자료를 찾아 학습 내용에 대한 직

관적 확신을 제공하는 방법도 교육적으로 의미 있는 지도 방법 중의 하나이다. 우정호(2000)는 학교수학의 지도에서 학생들의 수학적 사고를 촉진시키기 위해서는 명제에 대한 증명 학습 뿐만 아니라 수학에 대한 신념과 기대, 문제 해결과 관련된 그림, 개념을 내포하는 전형적인 예 등을 동원한 심리학적인 요소를 포함하는 교육적 자극을 제공해야 한다고 하였다. 특히 학년이 올라갈수록 중등수학의 문제는 문자와 식을 이용한 기호적인 표현으로 해결되는 경우가 대부분이어서 교수-학습의 과정에서는 대수적 결과에 대한 내재적 확신을 주는 직관적인 자극이 필요하다. 우리나라 2007 개정 교육과정에 제시된 수학 교수-학습의 제안에서도 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해하고, 형식이나 관계를 발견하는 과정에서는 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학

* 전주대학교 수학교육과 (nhkim@jj.ac.kr)

적 경험을 제공해야 함을 강조하고 있다. 이를 위해 아이디어를 말과 글로 설명하는 것 뿐 만 아니라 시각적으로 표현하는 활동도 수학적으로 효율적인 의사소통 수단이 될 수 있음을 언급하고 있다(교육인적자원부, 2007: 2, 45, 54, 62, 71, 79, 86, 94). 수학 문제 해결 교육자인 폴리아(G. Polya)는 그림은 기하 문제의 대상일 뿐 만 아니라 처음에는 기하적인 것과 무관하던 문제에서도 중요한 도움을 주는 경우가 많으므로 쉬운 기하적 표현을 찾아보는 것이 수학 학습에 도움이 될 수 있다고도 하였다. 이에 본 연구에서는 예비 수학 교사들의 과제 수행 활동으로 시각적 자료를 이용한 문제 해결 지도의 수행을 계획하였다. 예비 수학 교사들에게 대수적 해결에 대한 의미와 이해를 뒷받침할 수 있는 직관적 접근의 방법을 탐구하고 이를 동료 예비 수학 교사들에게 지도하는 과정을 수행하도록 하였다. 아래에서는 본 연구의 설계와 실행 과정을 설명하고, 연구자의 강의 시간에 실행된 예비 수학 교사들의 발표 사례를 분석하고자 한다. 또한 이러한 실행을 통해 예비 수학 교사들이 얻은 교육적 경험은 무엇인지, 본 연구에서의 지도 사례가 예비 수학 교사 교육에 주는 시사점이 무엇인지를 살펴보고자 한다.

II. 연구 설계 및 실행

1. 연구 문제

예비 수학 교사들이 학교수학의 교수-학습을 위한 지도 과정을 실행해 보는 수행 활동이 수학 교사 교육에 주는 의미가 무엇인지를 탐색하는 것이 본 연구의 목적이다. 이를 위해 본 연구에서는 중등 수학 교사 양성 과정에서 수

학 교육의 실천적 접근을 염두에 두고 시각적 자료를 이용한 문제 해결 지도 활동을 계획하였다. 본 연구에서 설정한 연구 문제는 첫째, 예비 수학 교사들이 시각적 자료를 이용한 문제 해결 과정을 탐구하고 발표(지도)해 보는 활동에서 그들이 얻은 교육적 경험은 무엇인가? 둘째, 본 연구에서의 지도 사례가 예비 수학 교사 교육에 주는 시사점은 무엇인가? 이다.

2. 연구 대상

본 연구는 연구자의 담당 강좌인 ‘수학문제 해결방법론’을 수강하는 사범대학 수학교육과 2학년 학생들을 대상으로 실행하였다. 연구 대상 학생들은 중등학교 현장에서 실시하는 교육 실습 과정을 아직 이수하지 않은 예비 수학 교사들로서 수학 교수 능력 향상을 위한 별도의 지도 과정이 필요한 학생들이다. 본 연구의 실행은 2007년 1학기부터 2010년 현재까지 매년 1회 씩 총 4회에 걸쳐서 진행되고 있다. 2007년과 2008년의 예비 수학 교사들의 과제 수행에서는 연구자의 관찰 내용만을 수집하였고, 2009년에는 연구자의 관찰 자료와 함께 학생들의 과제 수행 자료와 과제 수행 후 작성한 후기를 기록물 자료로 수집하여 연구 결과를 분석하였다. 따라서 본 논문에 기록된 ‘예비 수학 교사들의 활동 사례’에 대한 연구 대상은 2009년 1학기 ‘수학문제해결방법론’강좌를 수강한 예비 수학 교사 47명이라고 할 수 있다.

3. 연구 방법

학기 초 첫 강의 시간에 [그림 II- 1]과 같은 주별 세부 강의계획서를 배부하고 5주차 강의 시간의 학습 내용인 ‘그림 그리기’에 대한 교재

내용을 설명한 후 수학의 내용을 함의한 그림 자료를 탐구하는 조별 발표를 진행하였다. Polya(1945)의 저서 ‘어떻게 문제를 풀 것인가(How to solve it)?’에 제시된 발견술의 소사전 목록 중 24번째 내용인 ‘Ⅲ-24: 그림’에 대한 기본 강의를 진행 한 후 Nelsen(1993, 2000)의 저서 ‘Proofs Without Words I, II’에 소개된 그림 자료들 중에서 중등학교 수학 학습 내용과 관련된 자료 22개를 발췌, 이를 예비 수학 교사들에게 배부하였다. 그림 자료는 학기 초에 미리 별도로 준비한 복사물로 배부하였다. 이는 수강생들이 수업 전에 충분한 시간을 두고 발표 준비를 할 수 있도록 배려한 것이다. 예비 수학 교사들에게 주어진 과제는 각 조별로 배당된 2개의 자료를 탐구하여 발표하는 것이다. 4-5명을 한 조로 하여 총 11개의 조를 구성하고 모든 조가 발표에 참여하여 수강생들 앞에서 자신의 조가 탐구한 내용을 설명하도록 하였다. 이는 발표 수업을 통해 모든 수강생들이 제시된 22개 그림 자료에 대해 이해할 수 있도록 하기 위함이다.

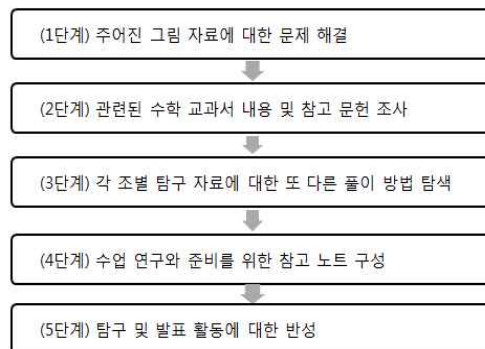
차수	소영역(주별강의주제)	수업내용	과제 및 준비	교재
초기 탐구 이론	1주	반갑습니다 수학교육학이란?	교수소개 수업 진행을 위한 안내 성공적인 수업을 위한 약속 강의계획서 배부/안내	자기소개 및 강의에 관한 질문 및 의견서 작성
문제 해결 론	2주	문제해결의 목적	교사의 발문, 권고 교사와 학생간의 상호작용	(조별활동) 교사가 학생을 돕는 방법(5) 3가지로 요약 발문과 권고란 무엇인가?
	3주	문제해결의 4단 계/ 주요 발문	문제해결의 4단계(구체화) 유연발문과 나쁜 발문	(조별토론) 좋은 발문의 조건은?
	4주	문제해결의 예 어떻게 문제를 풀 것인가?	리도, 증명, 비유 문제 문제해결의 방법	지도문제, 증명문제, 비유문제에 서 좋은 발문의 사례 찾기(발표)
	5주	발견술의 소사전 (1)	현대적 발견술 미지의 것 살피기 조건, 그림 그리기(그림, 기호, 좋은 기호의 조건 11주 내용 출판)	아르키메데스의 구의 겹넓이 계 산법 탐구(조별학습 및 발표, 레 포트) 시각화에 의한 증명분석(발도 발보) 해보한 도전도들: 초등교과서 의 색연사제 찾기 (레포트)
	6주	발견술의 소사전 (2)	조건외 문제 탐색 문제의 재진술, 자료 분석 예상 검토, 또 다른 방법, 결과 검증	Ⅲ-15(수업후) p.311 문제 12줄기 Ⅲ-15(수업전) p.96<그림 10>원 볼테의 열쇠이 구하기

[그림 II- 1] 강의계획서: 주별 세부 계획 일부

4. 지도 과정

연구자는 먼저 예비 수학 교사들에게 강의

자료에 제시된 그림 자료를 조별로 분담해주고, 각 조에서 맡은 그림 자료를 탐구해 해석하고 수학적으로 바르게 설명할 준비를 하도록 안내하였다. 해결된 과제를 전체 수강생들이 이해할 수 있도록 설명하는 발표 수업을 계획하도록 하여 예비 수학 교사들의 교수 능력을 향상시키고 더불어 모든 수강생들이 22개 그림 자료의 내용을 숙지할 수 있는 기회를 갖게 하였다. 한편 예비 수학 교사들에게는 제시된 그림 자료를 단지 설명하는 것에 그치지 말고 관련된 수학 교과서 내용이나 참고 자료를 수집하여 정리하도록 하는 별도의 안내를 하였다. 각 조에서 담당 자료의 문제 해결을 마치고 나면 또 다른 풀이 방법을 찾아보도록 하여 조별로 독창적인 문제 해결을 창안해 보도록 유도하였다. 이는 본 과제 수행도 일종의 문제 해결의 과정이므로 예비 수학 교사들이 반성 단계의 활동을 체험할 수 있도록 의도한 것이었다. 발표를 마친 후에는 모든 자료를 복사해서 공유하고 관련된 자료끼리 수합해 참고 자료 노트로 정리하도록 하였다. 이는 장차 수학교사가 되었을 때 수학 수업에 직접 활용할 수 있는 교재 연구 자료로 보관할 수 있도록 지도하기 위함이었다. 조 발표를 하고 난 후에는 느낀 점, 배운 점, 이러한 활동이 교사가 되었을 때 어떤 도움이 될지 생각해 보도록



[그림 II- 2] 탐구 및 발표 실행의 과정

하는 후기 작성을 통해 자신의 학습 활동을 되돌아 볼 수 있도록 하였다. 본 연구를 위해 연구자가 실행한 지도 과정을 정리하면 [그림 II-2]와 같이 5단계로 요약해 볼 수 있다.

5. 예비 수학 교사들의 활동 사례

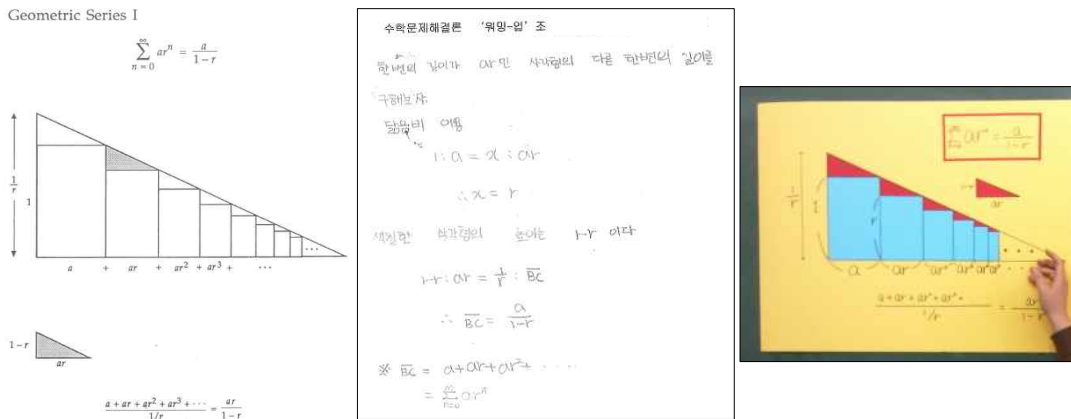
연구자가 실행한 5단계의 지도 과정에 따라 예비 수학 교사들이 주어진 과제를 수행하면서 각 단계별로 보여준 구체적인 활동을 그 사례와 함께 요약하여 제시한다.

가. 주어진 그림 자료에 대한 문제 해결

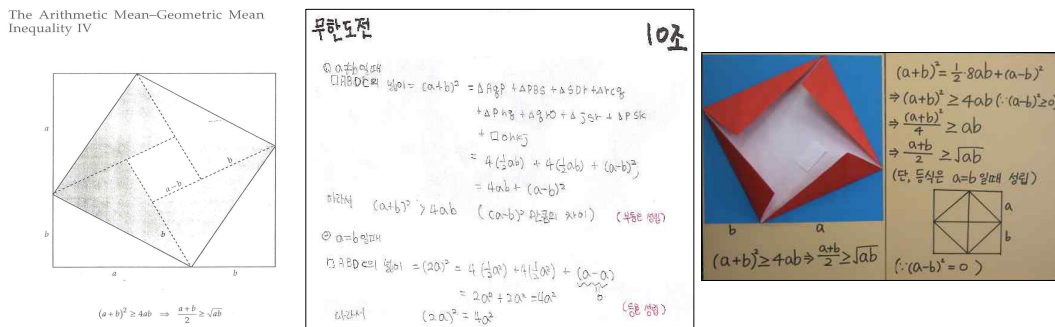
각 조는 먼저 자신의 조에 배당된 그림 자료 2개를 탐구하여 전체 수강생들 앞에서 수학적

으로 의미있게 설명해야 한다. [그림 II-3]은 고등학교수학 I에서 학습하는 ‘무한등비급수의 합’ 공식에 대한 그림 자료를 해당 조에서 다텔음을 이용해 설명한 자료의 예이다.

[그림 II-4]는 고등학교 1학년 수학의 방정식과 부등식 단원에서 학습하는 ‘절대부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ’에 대한 그림 자료를 설명한 예이다. 우리나라 교과서에서는 동일한 내용을 완전제곱식을 이용한 대수적 증명으로 지도하지만, 이 그림 자료를 이용하면 도형의 넓이를 이용해 기하적으로도 설명이 가능하여 수업 중에 교사는 대수와 기하의 연결성을 드러낸 지도 과정을 실행해 볼 수 있게 된다. 발표를 하는 조에서는 등호가 성립하는 조건을 설명하기

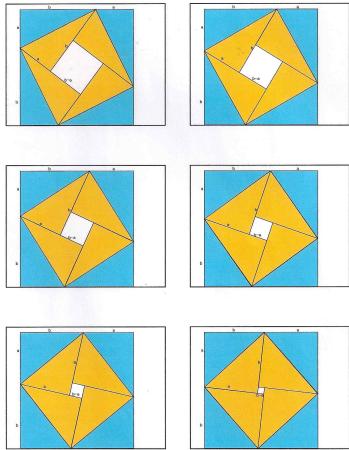


[그림 II-3] 그림 자료를 이용한 ‘무한등비급수의 합’ 공식

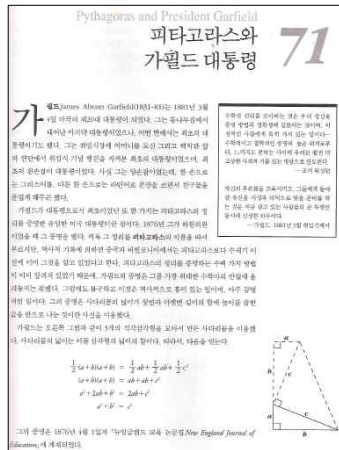


[그림 II-4] 그림 자료를 이용한 ‘절대부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ’

위해 [그림 II- 5]와 같이 수학프로그램 Geometers' SketchPad(이하 GSP)를 이용해 역동적인 설명을 보충하기도 하였다.



[그림 II- 5]
GSP를 이용한 역동적 시각화

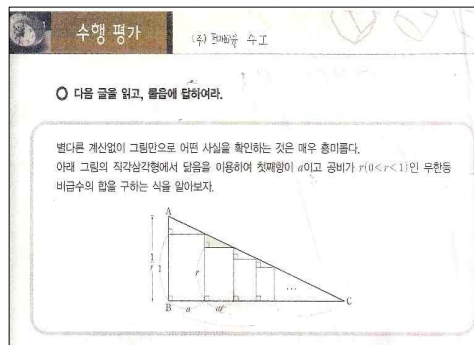


[그림 II-6] 피타고라스 정리
(황선욱 역, 2002, p.143)

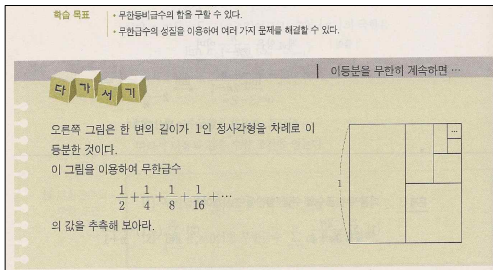
나. 관련된 수학 교과서 내용 및 참고 문헌 조사

각 조는 그림 자료에 대한 수학적 설명과 함께 현재 다루고 있는 그림과 관련된 수학 교과서 내용을 찾고, 관련된 참고 자료를 찾아 같이 발표해야 한다. 수학 교과서와 참고 자료를 찾

아보도록 한 이유는 예비 수학 교사들에게 수학 수업 준비를 위한 연구 방법의 예를 지도하기 위함이었다. 자료를 찾아보면서 예비 수학 교사들은 본 수업에서 다루는 그림 자료들이 수학 교과서에서 그대로 다루어지는 경우도 있고([그림 II- 7] 참조), 그림을 다소 특수한 경우에 한정하여 다루는 경우도 있으며([그림 II- 8] 참조), 전혀 다루고 있지 않은 경우도 있다는 것을 확인하게 된다. 만약 자신이 교사라면 수업 시간에 현재 지도하는 내용에 대한 보충 지도를 하고자 할 때, 학생들의 수준을 가늠해 가면서 본 연구 과정의 실행에서 다룬 시각적 자료들을 재깍껏 활용해 볼 수 있을 것이다. 예를 들어, 교과서에서 무한등비급수의 합을 특수한 경우에만 다루었다면 문자를 이용해 일반화한 그림 자료를 제시해 심화된 탐구 활동을 안내할 수도 있고, 교과서에 등차수열의 합을 구하는 다양한 그림을 설명한 후에([그림 II- 9] 참조), 때로는 또 다른 접근 방법을 탐구하도록 안내하면서 또 다른 그림 자료들을 소개해 볼 수도 있다. 피타고라스 정리를 지도한다면 정리의 내용과 형식적인 증명 과정만 지도하기보다는 수학을 사랑한 미국 대통령의 일화를 소개하면서 현재 학습하는 내용에 대한 흥미를 불러일으킬 수도 있다([그림 II- 6] 참조).



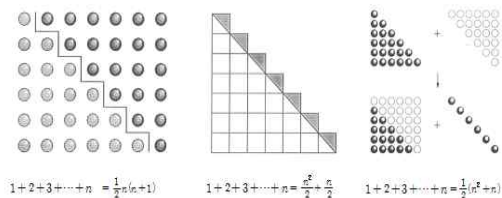
[그림 II- 7] 무한등비급수의 합(1)
(최용준 · 신현성, 2002, p.167)



[그림 II- 8] 무한등비급수의 합(2)
(우정호 외, 2002, p.198)

자연수의 합 $1+2+3+\dots+n$ 을 구하는 공식을 여러 가지 시각적 자료에 의해 탐색해 보도록 지도하다 보면 학생들로 하여금 주어진 공식을 서로 다른 의미로 해석해 볼 수 있는 안목을 키워주는 교육적 장점도 있다(Nelsen, 1993, pp.9-70; 2000, p.83). 폴리아는 문제 해결의 반성 단계에서 또 다른 풀이 방법을 탐색해 보게 함으로써 풀이 과정과 결과를 개관하고 음미하는 과정을 가질 필요가 있음을 강조하였다. 시각화된 자료의 해석에서 공식의 세부적인 의미를 점검해 봄으로써 공식의 의미를 ‘한 눈에’알 수 있게 되는 것은 교육적으로 매우 중요한 과정이다(우정호, 1998, p.85; 2000, p.318). [그림 II- 10]을 이용하면 $1+2+3+\dots+n$ 을 $\frac{1}{2}n(n+1)$, $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$, $\frac{1}{2}(n^2+n)$ 과 같이 서로 다른 구조의 식

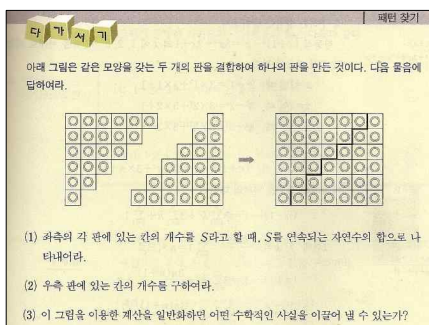
으로 바라보게 되면서 공식의 의미가 달라짐에 주목하게 되고 현재 다루고 있는 식을 새로운 관점에서 바라볼 수 있게 되는 것이다(김남희 외, 2010, p.25).



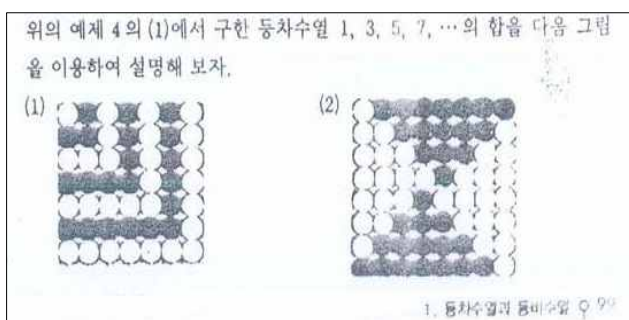
[그림 II- 10] 자연수의 합 공식: 서로 다른 방법으로 해석

다. 각 조별 탐구 자료에 대한 또 다른 풀이 방법 탐색

연구자는 예비 수학 교사들에게 배당된 그림 자료를 설명하고 그와 관련된 수학 교과서 내용과 참고 자료를 찾은 후에, 가능하다면 자신들만의 독특한 풀이를 창안해 보도록 안내하였다. 이러한 과제를 제시한 이유는 주어진 문제를 해결하고 난 후, 나아가 또 다른 풀이방법은 없는지, 문제 해결의 과정과 결과를 새로운 시각에서 생각하고 검토해 보는 습관을 갖도록 하기 위함이었다. 이 과제는 창의적이고 오랜 시간을 필요로 하는 과제여서 모든 조에서



[그림 II- 9] 등차수열의 합: 교과서에 제시된 시각화 예
(우정호 외, 2002, p.141; 임재훈 외, 2002, p.99)

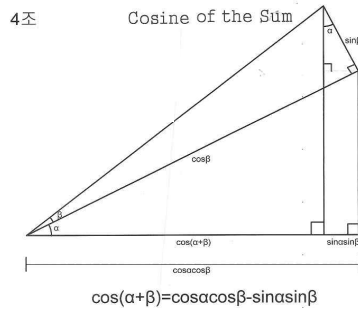


결과를 산출하지는 않았지만 일부 조에서 보여준 몇 개의 사례를 소개해 보고자 한다.

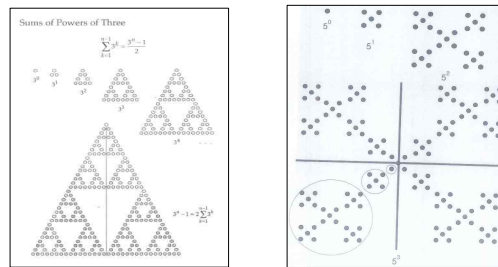
삼각함수의 덧셈정리를 유도하는 그림 자료는 좌표평면 위의 단위원을 이용하는 방법, 회전이동에 의한 합성변환을 이용하는 방법 등과 더불어 삼각함수의 덧셈정리를 유도할 수 있는 또 다른 해결 방법을 제공한다. [그림 II- 11]은 삼각형의 넓이 비교를 이용하여 사인함수의 덧셈정리 공식을 한눈에 파악할 수 있는 그림들이다(Nelsen, 1993, p.30; 2000, p.39).

위 그림 자료의 탐구를 맡은 조에서는 삼각함수의 덧셈정리를 설명하고 난 후 [그림 II- 12]와 같이 자신의 조에서 새롭게 창안해 본 그림을 소개하고 그 그림을 이용한 문제 해결의 과정을 설명하였다. 앞서 다룬 그림 자료에서 가장 단순한 도형인 삼각형을 이용한 것에 주목하고, 이를 토대로 삼각형과 몇 개의 보조선을 이용해 코사인 함수의 덧셈정리를 설명하였다.

[그림 II- 13]은 예비 수학 교사들이 공비가 주어진 등비수열의 합의 의미를 여러 가지 그림 자료로 해석해 본 사례이다. [그림 II- 13]의 첫 번째 그림은 본래의 과제에 주어졌던 그림이었고 두 번째 그림은 예비 수학 교사들이 주어진 그림 구성의 규칙을 찾아 그 규칙을 나머지 그림에 적용하여 새롭게 창안한 것이다.

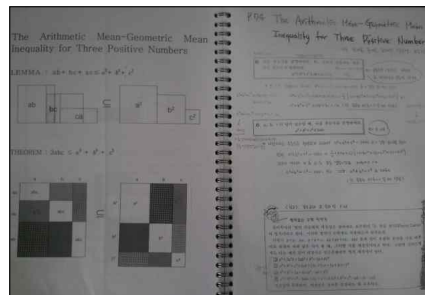


[그림 II- 12] 조 발표 자료

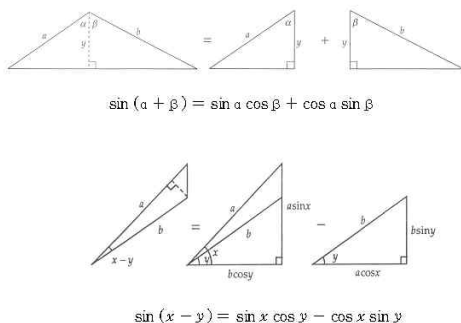


[그림 II- 13]

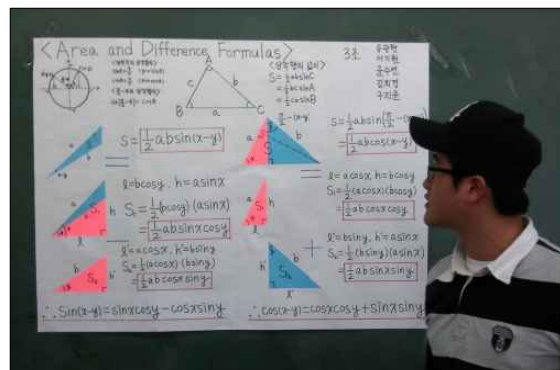
구체적 상황과 의미를 다룬 등비수열의 합



[그림 II- 14] 참고 노트 구성 예



[그림 II- 11] 여러 가지 그림 자료를 이용한 삼각함수의 덧셈 정리



일반적으로 수학 시간에 학생들은 등비수열의 합을 구하는 문제를 공식을 단순히 적용해서 결과를 구하는 문제로만 경험하기 쉽다. 이 사례를 이용하면 주어진 결과를 산출하는 문제 상황이나 맥락을 구성하면서 등비수열의 합을 구하는 공식에 상황과 연결된 구체적인 의미를 부여할 수 있게 된다. 이러한 활동은 구성주의에서 강조하는 학습 활동인 ‘의미지향적 활동’이 될 수 있다. 뿐만 아니라 맥락을 살린 그림을 통해 교사는 현재 다루고 있는 학교수학의 내용을 수학의 다른 연구 분야와 관련지어 설명해 볼 수도 있게 된다. 이를테면, [그림 II-13]은 프랙탈 도형을 등비수열의 관점에서 생각해 보게 할 수 있다.

위와 같은 그림 자료를 다룬 예비 수학 교사들은 중등 수학의 수업에서 등비수열의 합을 지도할 때, 프랙탈 도형을 수열의 합 지도를 위한 동기 유발 소재로 활용할 수 있게 된다. 이때 학습자는 주로 초항과 공비를 공식에 대입하여 계산에 의해 구한 결과와는 달리 문제의 내용을 이미지로 구체화할 수 있게 되면서 학습하는 수학의 내용들을 친근한 문제 상황 속에서 이해할 수 있게 되는 것이다.

라. 수업 연구와 준비를 위한 참고 노트 구성
각 조의 발표가 끝난 후에는 그림 자료의 설명을 담은 내용, 해당 수학 교과서의 내용, 관련된 참고 자료 등을 복사해서 서로 공유하도록 하였다. 그리고 이를 장차 중등학교 수학 수업 준비에 도움이 되는 교재 연구 자료로 보관하도록 지도하였다. [그림 II-14]와 같이 전체 조의 탐구 자료를 모아서 관련 내용을 적절한 순서로 배치하여 참고 노트를 만들도록 하였다. 이는 본 강의 시간에 한 조별 활동을 단지 일회적인 과제 발표 활동에 그치는 것으로 생각하지 않도록 하기 위함이다. 각 조의 탐구

및 발표 활동은 졸업 후 수학 교사가 되었을 때 자신의 수업 연구를 위한 구체적인 방법과 긍정적인 태도를 학습한 과정이었으며 그 수행 내용은 앞으로 언제든지 쉽게 참고할 수 있는 참고 노트를 구성한 산출물이다.

문제 해결을 통해	다른 조들이 문제를 어떻게 풀었는지 발표를 들어 보고, 또한 저 스스로 저희가 맡은 문제들을 풀어보면서 세상에는 관 여러 가지의 방법들이 있다는 것을 다시 한번 깨닫게 되었습니다. 지금까지는 수학공부를 하면서 겪어 나온 방식, 즉 주어진 방식만을 사용하여 그 방법만을 고수해왔었는데 이런 Proof without words 활동을 통해서 앞으로는 문제를 다양한 방법으로 생각해 보는 것이 공부할 하는데 있어서 얼마나 도움이 되는 지를 깨닫게 되었습니다. 또한, 나중에 수학교사가 되어서 이러한 다양한 문제풀이 방식을 학생들에게 가르쳐 주면 학생들이 이해하는데 있어서 정말 훌륭한 방법이 될 것 같다고 생각하였습니다.
배운 점 또는 알게 된 점	특히 가장 기본적인 도형인 삼각형으로서 수많은 문제들을 풀어 보았는데, 삼각형을 어떻게 작도하느냐에 따라서 수많은 공식들이 만들어지는 것을 보고 수학은 세상에서 가장 아름다운 학문이라는 것을 새삼 느끼게 되었습니다.
문제 해결과 발표를 보고(하고) 느낀 점	문제 해결을 하면서 사람들의 독특한 아이디어 하나가 다른 시선을 얼마나 흥분시킬 수 있는가를 알 수 있었습니다. 실생활에 접해 있는 것들을 활용하여서 문제풀이를 이해시키는 모습들을 많이 보게 되었는데, 특히 물의 계수를 나열해서 섀던던지, 아니면 간단한 계산식을 도형의 넓이를 이용해서 설명할 수 있는 것들을 보고, 저도 그러한 기발한 아이디어를 어떻게 하면 알아낼 수 있을지에 대해 생각할 수 있도록 해 주었습니다. 앞으로는 어떠한 문제가 나오더라도 그 문제를 해결하는 것에만 급급해서 지나쳐버리는 것이 아니라, 어떻게 하면 더 쉬운 방법으로 풀 수 있고, 어떻게 하면 더 쉽게 다른 사람들 앞에서 설명을 할 수 있을까? 하는 생각을 해보아 저 자신을 더욱 발전시킬 수 있을 것 같다고 생각하게 되었습니다.
이러한 배움이 교사가 되었을 때 학생들에게 도움이 될 만한 점	사람은 요점을 이용하여 기억하려 하면 기억을 더 잘한다는 말이 있습니다. 학생들도 내가 지금까지 해왔던 것과 마찬가지로 공식을 쪼개 나와 있는 방법으로 외울 텐데 눈을 통해 쉽게 이해하고 나서 문제를 풀려면 좀 더 쉽게 풀 거라 생각이 듭니다. 특히 가장 신기했던 무한 등비급수의 합 구하는 공식의 그림이 가장 신기했습니다. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 의 그림은 정말 생각조차 할 수 있었는데 탄성이 절로 나올 정도였습니다. 이 내용을 학생들에게 설명한다면 학생들도 우리가 반응했던 것과 똑같은 반응을 할 것 같습니다. 무관심 위우라는 방법이 아닌 이렇게 다른 각도에서 보면 우리가 일어난 그림으로 보여주면 좀 더 수학을 쉽게 다룰 수 있게 도움이 될

[그림 II-15] 탐구 및 발표 활동에 대한 후기 사례

마. 탐구 및 발표 활동에 대한 반성

모든 조의 발표가 끝나고, 각 조의 탐구 자료를 정리한 후에, 예비 수학 교사들은 과제 준비와 발표 활동에 대해 되돌아보면서 각자가 느낀 점을 후기로 적었다. 후기 작성을 통해 예비 수학 교사들은 문제 해결을 통해 배운 점, 각 조의 발표를 보고 느낀 점, 이러한 활동이 장차 교사가 되었을 때 학생 지도에 어떤 도움이 될 것인가 등에 대해 생각해 보는 반성의 시간을 갖게 되었다. [그림 II-15]는 예비 수학 교사들이 기록한 후기의 구체적인 사례이다.

6. 자료 수집

2007, 2008년의 연구 과정에서 연구자가 관찰한 것은 예비 수학 교사들이 위와 같은 과제를 수행하면서 여러 가지 의미있는 교육적 경험을 하였다는 것이다. 이에 2009년 연구에서는 학생들이 과제 수행 과정에서 구성한 자료(발표 자료, 참고 노트 산출물)와 과제 수행 후 예비 수학 교사들이 작성한 후기를 기록물 자료로 수집하여 그들의 교육적 경험을 분석하고자 하였다. 2009년 1학기에 실행된 연구 과정에서 총 47명의 예비 수학 교사들로부터 과제 준비와 발표 활동 후에 작성한 후기를 기록물 자료로 수집하였다.

III. 연구 결과

본 연구에서 예비 수학 교사들이 시각적 자료를 이용한 문제 해결 과정을 탐구하고 발표(지도)해 보는 활동에서 그들이 얻은 교육적 경험이 무엇인지를 살펴보기 위해 기록물 자료를 분석하였다. 예비 수학 교사들이 작성한 후기는 문제 해결을 통해 알게 된 점, 발표를 하고 느낀 점 그리고 과제 수행이 장차 교사가 되었을 때 자신에게 어떤 도움이 될 것인가에 대해 생각한 바를 자유롭게 쓴 기록물 자료의 형태이기 때문에 그 내용을 정량화할 수는 없다. 그러나 동일한 부류의 내용으로 볼 수 있는 의견을 분류하고, 분류된 내용에서 47명의 의견 중 50% 이상의 빈도로 제시된 공통 의견에 주목하였다. 공통된 의견에서 연구자가 수업 중 관찰한 내용에 상응하는 자료를 추출하여 그 내용을 구체적인 기록물 자료의 사례와 함께 정리하였다.

첫째, 예비 수학 교사들은 제시된 자료를 탐

구하고 발표하는 문제 해결을 통해 학습 내용에 대한 인지적 영역의 발전 뿐만 아니라 수학 학습에 대한 정의적 영역의 신장을 경험하였다. 나아가 수학을 학습하는 자세, 습관, 태도에 있어서 긍정적인 변화도 있었다. 다음은 예비 수학 교사들이 시각화를 통해 추상적인 학습 내용을 구체화하여 내용의 이해, 기억 등 인지적인 면에서 많은 도움이 되었음을 표현한 의견들이다.

- 그림을 통해 이해하니까 훨씬 오랫동안 기억할 수 있는 장점이 있다.
- 추상적, 형식적이기만 했던 공식들이 한 눈에 들어오게 되었다.
- 그 동안 우리가 배운 공식들이 그림으로 확인되니 신기했다. 배운 공식을 다른 방법으로도 생각하면서 그 공식을 깊이 생각하는데 도움이 되었다.
- 새로운 발상과 생각을 엿보고 배울 수 있는 기회가 되었다.

다음 의견들에서는 수학에 대한 흥미, 집중, 자신감 등의 정의적 영역의 신장이 확인된다.

- 자칫 지루해지기 쉬운 수학 문제의 해결에 도형을 사용함으로써 흥미도 생기고 재미도 느낄 수 있었다.
- 그림으로 표현되는 것이 신기하기도 했고 그림을 따라 그리면서 주의집중도 잘 되었다.
- 삼각형을 어떻게 활용하느냐에 따라 수많은 공식들이 설명되는 것을 보고 수학은 참 아름다운 학문이란 것을 느꼈다.
- ‘학생들도 깊이 생각하면 이러한 문제 해결을 창안해 볼 수 있다’는 교수님 말씀에 한편으론 의아함과 뭉치 모를 자신감이 생기기 시작했다.
- 문제를 새로운 각도에서 접해 보는 것은 신기하고 흥미로웠다. 수학이 참 흥미로운 과목이란 생각을 하게 되었다.

또한, 예비 수학 교사들은 본 연구의 실행을

통해 문제를 다루는 자세와 태도가 변화되었고, 수학에 대한 새로운 생각과 깨달음을 얻게 되었다.

- 문제를 접하는 자세가 바뀌었다.
- 한 문제를 다양한 관점에서 해결할 수 있고, 여러 방법으로 해결하려는 노력을 해야겠다는 생각을 하였다
- 문제를 접했을 때 조금해 하지 않고 그림을 그려보는 습관을 가지게 되었다.
- 문제를 다양한 방법으로 생각해 보는 것이 학습에 얼마나 도움이 되는지를 깨닫게 되었다.
- 기하적 접근을 통해 틀에 박힌 사고에서 벗어나 문제를 바라보는 새로운 안목이 생겨났다.
- 삼각형만 있어도 많은 증명을 할 수 있는 것을 확인하고 보니 삼각형이 정말 대단하다고 생각한다.
- 문제 해결은 복잡하고 어려운 접근보다도 아주 단순한 사고로부터 시작된다는 것을 절실히 깨달았다.
- 하나의 공식이라도 접근하는 방법에 따라 다양한 해석이 가능하다는 것을 알게 되었다.
- 우리가 다룬 것은 극히 일부 예이므로 중고등학교수학 교과서에서 다루는 다른 내용들에 대해서도 기하적 접근 방법을 더 탐구해야겠다.
- 얼마나 많은 사람들이 우리가 흔히 보고 넘기는 공식들에 대해 생각했고, 느꼈고, 그것을 명확하게 설명하려 노력했는지를 느꼈다.

둘째, 예비 수학 교사들은 조별 탐구 과정과 발표 활동을 통해 자신의 수학 학습에 대해 반성하게 되었을 뿐 만 아니라 교사가 되기 위해 준비할 점에 대해서도 깊이 생각해 보는 경험을 하게 되었다. 발표를 하기도 하고 다른 조의 발표 내용을 듣기도 하면서 그 동안 자신의 학습 방법의 문제점을 파악하고 반성하는 내용들이 많이 확인되었다.

- 한 번도 이렇게 공식을 다루어 본 적이 없었다. 좀 더 다양한 사고로 문제에 접근해보도록 노력해야겠다.
- 교과서를 유심히 살펴보니 그 동안 책에 있는 그림도 무심코 쉽게 지나쳐 버린 것이 아쉽기만 하다.
- 수학 공부 할 때 공식만 외우려고 했던 나 자신을 반성하게 되었다.

예비 수학 교사들은 장차 교사가 되었을 때 학생들에게 좋은 수업을 제공하기 위해서 어떤 준비를 하면 좋은지에 대해 다음과 같은 생각을 드러내었다.

- 교사로서 저를 발전시키기 위해서는 어떤 문제라도 또 다른 방법은 없는지, 어떻게 하면 더 쉬운 방법으로 다른 사람들에게 설명할 수 있을까를 생각해 봐야겠다.
- 배우는 입장을 생각하면서 어떤 점에 주의해야 할 지, 어떻게 말할 때 학생들이 더 잘 알아듣는 지 등에 대해 많이 생각하게 되었다.
- 자주는 못해도 기회가 생긴다면 가끔이라도 이런 수업을 계획해서 학생들에게 즐거운 수업을 만들어줘야겠다.
- 미래의 교사가 되려면 수학만 배우는 것이 아니라 수학을 어떻게 효과적으로 가르쳐야 하는가에 대한 공부가 필요함을 느꼈다.

셋째, 예비 수학 교사들은 이러한 과제 수행의 과정과 결과들이 실제 자신이 교사가 되었을 때 학생 지도에 도움이 될 것이라고 생각하였다. 특히 본 연구의 큰 성과는 예비 수학 교사들이 실제 수학 학습-지도를 위해서는 교사의 사고실험이 필요함을 느끼고 깨달은 경험이라고 할 수 있다.

- 어떤 문제에 직면했을 때, 무조건 받아들이는 것이 아니라 우리가 먼저 그것을 이해하고 어떻게 학생들에게 가르칠 것인지를 계획하

고 그것의 실행에 대해 생각해보는 습관이 중요함을 알았다.

- 수업을 미리 준비하는 것의 중요성, 충분한 준비와 연습이 필요함을 느꼈다.
- 공식을 어떠한 방법으로 설명할 수 있는지에 대해 우리가 새로운 방법을 많이 배웠으므로 학생들에게 쉽게 이해시킬 수 있고 오래 기억할 수 있는 좋은 설명 방법들을 선택할 수 있을 것 같다.
- 오늘 발표한 자료, ppt들을 잘 보관해 두었다가 학생들에게 공식만 외우라고 하기 보다는 이해를 위해 이러한 그림 증명을 가르쳐야겠다.

예비 수학 교사들은 자신들이 탐구한 자료들을 수업에 잘 활용하면 학생들에게 수학에 대한 흥미, 관심, 친밀감을 갖게 하는데 도움이 될 것이라고도 생각하였다.

- 나중에 실제 지도과정에서 우리가 발표한 내용을 활용하면 학생들이 수학을 쉽게 학습하고 수학에 친밀감을 느낄 것이다.
- 말로 설명한 것에 보충하여 색다른 방법으로 접근하면서 수학에 대한 흥미를 높이고 학습 욕구를 자극할 수 있다. 학생들의 주의를 집중시키기에 좋을 것이다.
- 생각하는데 많은 시간이 드는 것은 사실이지만, 이러한 자료들을 통해 머리로 이미지를 그리면서 수학을 좋아하고 즐기는데 한 몫 할 수 있는 계기가 될 것이다.
- 오감을 이용하면 기억도 잘 되듯이 눈을 통해 학생들에게 쉽게 이해시킬 수 있을 것 같다.

이상의 내용을 종합해 보면, [그림 III-1]에 제시된 바와 같이 시각적 자료를 이용한 문제 해결 지도 과제를 수행하도록 한 본 연구의 실행을 통해 예비 수학 교사들은 수학에 대한 인지적, 정의적 영역에 있어서 신장을 보였을 뿐만 아니라 수학 학습 태도와 수학에 대한 생각에도 긍정적인 변화가 나타났음을 알 수 있다. 한편, 문제 해결의 과정을 지도하는 발표 활동을 통해서도 장차 교사가 되어 학생들을 지도하는데 도움이 되는 실제적이고도 실천적인 지식을 갖추게 된 것을 알 수 있다.

IV. 결론

본 연구에서는 예비 수학 교사들에게 학교 수학의 수업을 계획하고 운영하는데 도움이 될 수 있는 실천적인 수행 과제를 실행하도록 하였다. 사범대학 수학교육과의 2학년 학생들을 대상으로 수학 교육 강의 시간을 이용하여 중등수학 교과서에서 다루는 여러 가지 문제를 직관적 시각화에 의한 방법으로 접근하는 탐구 과정을 진행하였다. 제시된 그림 자료에 대한 탐구 결과를 조별로 발표하도록 하고 그 실행에 대한 예비 수학 교사들의 활동 후기를 분석하여 본 연구의 실행이 예비 수학 교사교육에 주는 의미를 생각해 보았다.

본 연구의 실행 과정을 통해 예비 수학 교사



[그림 III-1] 과제 수행을 예비 수학 교사들이 얻는 교육적 경험

들은 자신의 인지적, 정의적 측면의 긍정적인 변화를 경험하였고, 수학 학습에 대한 인식의 변화, 자신의 수학 학습에 대한 반성, 교사로서 준비해야 할 점 등에 대해 반성해 보는 훌륭한 학습의 기회를 가지게 되었다. 예비 수학 교사들에게 이러한 실천적인 실습의 과정을 지도하는 것이 사범대학의 예비 수학 교사교육에 주는 시사점을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 예비 수학 교사들에게 수학 문제 해결 지도를 위한 준비 및 실습 기회를 제공할 수 있다. 본 연구의 실행은 예비 수학 교사들에게 수업 연구에 도움이 될 수 있는 방법과 태도를 제공하였다. 다양한 문제 해결 방법과 참고 자료를 찾아보게 하는 실천적 행동을 지도하면 실제 중등 학생들의 수학적 문제 해결 지도에 도움이 될 이론적 지식 습득과 이를 효과적으로 활용하는 실제적인 행동들을 실습하는 기회를 제공할 수 있다.

둘째, 학교 수학의 문제 해결 지도를 위한 실천 지향적인 활동을 통해 예비 수학 교사들의 교수 내용 지식(Pedagogical Content Knowledge, 이하 PCK)의 성장을 도울 수 있다. PCK는 이론적 논의를 위한 개념이기도 하지만 실천 지향성이 강한 개념으로서, 교실 수업을 통해서 습득되는 경험적 지식으로서 교사의 반성적 고찰을 통해 점진적으로 발달한다(박경미, 2009). NCTM(2000)에서 제시하는 학교수학의 6가지 원리 중 ‘교수의 원리’에 따르면 교사는 적절한 교수-학습 보조 자료와 교수 방법을 잘 알고 이를 수업에 적절히 사용해야 한다. 본 연구에서 제시한 과제 수행을 통해 예비 수학 교사들은 가르칠 내용 지식만 단순히 익혀서 전달하는 수준에 머무는 것이 아니라 학생의 관심과 흥미를 자극하고 수학을 이해시키는데 도움이 되는 효과적인 지도 자료를 고안하고 학습자가 보다 잘 이해하고 보다 더 집중하도

록 돕기 위해 어떤 점에 주의를 기울여야 하는지에 대한 실천적인 지식도 소유하게 되었다. 동일한 주제로 수업을 한다할지라도 교사에 따라 다양한 수업 유형이 존재할 것이고 동일한 교사의 수업이라 할지라도 교사의 교수 내용 지식이 성장함에 의하여 수업을 할 때마다 질적인 차이가 존재할 것이다(양성현·강옥기, 2009). 예비 수학 교사들은 수업 연구를 어떻게 해야 하는지, 어떤 방법으로 해야 하는지, 무엇을 준비해야 하는지 등 교사로서의 바람직한 연구 자세와 태도 뿐 만 아니라 자신이 가르칠 내용을 학습자에게 효과적으로 전달하는데 도움이 될 교수 내용 지식을 습득하게 되었다.

셋째, 예비 수학 교사들이 우리나라 수학 교육과정의 방향을 구현하는데 관심을 갖고 학교 수학 수업을 구성할 수 있도록 도울 수 있다. 본 연구의 과제 수행을 통해 예비 수학 교사들은 2007 개정 교육과정의 교수-학습 제안 사항에서 강조하는 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험 제공의 제안을 실제 수업에서 구체화하는 실천적인 지식을 습득할 수 있다. 한편, 본 연구에서 제시한 과제에서 다룬 시각화 자료들을 학생들의 개념 이해를 보조하는 측면에서 또는 심화 학습의 다양한 소재 제공의 측면에서 적절히 활용한다면 현실 적합한 수준별 수업 운영을 추구하는 교육과정의 방향을 뒷받침하는데에도 도움이 될 것이다. 2007 개정 교육과정의 새로운 방향은 현실 적합한 수준별 수업 지원, 학습 내용의 적정화, 수학적 사고력 신장, 수학의 가치 제고와 정의적 측면의 강조이다(황혜정 외, 2007, pp.96-97). 본 연구의 실행에서 문제를 다양한 관점에서 해결하거나 여러 가지 방법으로 해결하는 방법을 터득하고 개념이나 공식을 깊이 생각하는 경험을 제공한 것은 학습자의 수학적 사고력을 신장시키는데 도움이 될 것이

다. 한편 본 연구의 실행 과정을 통해 수학에 대한 흥미, 관심, 태도에 있어서 예비 수학 교사들의 긍정적인 변화가 확인되었듯이, 이러한 과제의 실행은 수학 교사들이 학교 수학의 가치 제고와 학생들의 정의적 측면의 신장을 꾀하는 효과적인 지도 방법을 구상하는데 적지 않은 도움이 될 것이다.

참고문헌

- 김남희 · 박성희 · 황화연 (2010). 학교수학의 지도에서 시각화 자료 활용의 교육적 의의. **교육과학연구** 23(3). 5-40.
- 교육인적자원부 (2007). **수학과 교육과정**. 교육인적자원부.
- 박경미(2009). 수학의 교수학적 내용 지식(PCK)에 대한 연구의 메타적 검토. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>** 제 48권 제 1호, 93-105.
- 양성현 · 강옥기 (2009). 기하와 대수의 연결성에 관한 적용 사례 연구. **수학교육학논총** 제 35집, 93-108.
- 우정호 외 5인 (2002). **고등학교 수학 I**. (주)대한교과서.
- 우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.
- 우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교 출판부.
- 임재훈 외 9인(2002). **고등학교 수학 I**. (주)두산.
- 최용준 · 신현성(2002). **고등학교 수학 I**. (주)천재교육.
- 황혜정 외 5인(2007). **수학교육학신론**. 문음사.
- NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics. 류희찬 외 5인 역 (2007). 학교수학을 위한 원리와 기준. 경문사.
- Nelsen, R. B. (1993). Proofs Without Words I - Exercises in Visual Thinking. MAA(The Mathematical Association of America).
- Nelsen, R. B. (2000). Proofs Without Words II - More Exercises in Visual Thinking. MAA (The Mathematical Association of America).
- Polya, G. (1945). How to Solve it. Princeton University Press. 우정호 역(2002). 어떻게 문제를 풀 것인가? -수학적 사고 방법-. 교우사.
- Sanderson, S. (1996). Agnesi to Zeno: Over 100 Vignettes from the History of Math. Key Curriculum Press. 황선욱 역(2002). 수학사 가볍게 읽기. 한승.

A Classroom Activities of the Problem Solving Using Visualized Materials In Pre-service Mathematics Teacher's Education

Kim Nam Hee (Jeonju University)

In this study, we conducted classroom activities that are exploring and explaining visualized materials for problem solving of school mathematics with pre-service teachers in 2007~2009. After finishing these classroom activities, pre-service teachers recorded an afternote that includes changes of their thinking about mathematics and mathematics education through these activities in this study. We collected various opinions of pre-service mathematics teachers. From the analysis

these data, we searched educational effects of our classroom activities. Through conducting the practice like these classroom activities of our study, pre-service mathematics teachers will have an opportunity of a practical training that supports the teaching of mathematical problem-solving. Moreover their PCK will be enhanced. Also, They will learn a good way to realize the aim of school mathematics curriculum.

* key words : visualized materials(시각적 자료), problem solving(문제해결), PCK, mathematics curriculum(수학 교육과정).

논문접수 : 2010. 11. 4

논문수정 : 2010. 11. 26

심사완료 : 2010. 12. 10