대한수학교육학회지 <학교수학> 제 12 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.12, No.4. 455-471. Dec. 2010

예비교사들의 무작위성 개념 이해 조사

고 은 성* · 이 경 화**

무작위성 개념에 대한 이해는 확률과 통계 영역의 교수와 학습에서 필수적인 것으로 다루어져왔다. 무작위성 개념은 자연현상, 사회현상을 수학적인 안목에서 이해하도록 하며, 합리적인 해석에 기초하여 이들 현상을 판단한다는 것이 무엇을 의미하는지 이해하는 토대가 된다. 본 연구에서는 예비교사들이 이와 같은 기회를 이해하고 다양한 문제 맥락에 포함되어 있는 무작위성 개념을 적절하게 이해하고 있는지 조사하였다. 연구결과 우연현상의 단순사건과 복합사건에 내재된 무작위성 개념은 쉽게 파악하는 반면, 측정과 관련된 맥락에서는 무작위성을 적절하게 인식하지 못하는 것으로 나타났다. 이는 측정상황의 본질인 변이성 개념의 인식이 부족함을 시사한다. 그러므로 예비교사를 대상으로 확률과 통계 관련 지도 관점을 다룰 때 측정상황을 도입할 필요가 있으며, 특히 변이성 개념에 비추어 이를 분석해야 한다는 점을 제안하였다.

Ⅰ. 도입

Moore(1990)에 따르면 자료 집합에 내재해 있는 변이성(variability)에 대한 경험은 확률과 통계의 관계를 조직화하는 첫 번째 단계이며, 이후 자료 산출을 위한 통계적 설계에서 이루어지는 계획적인 무작위 추출은 이러한 관계의 조직화를 강화해준다. Ballman(1997)과 Biehler (1994) 역시 통계적 사고와 확률적 사고의 통합을 위한 필수적인 요소로 변이성에 대한 이해를 꼽고 있다. Gal(2005)에 따르면 무작위성과 변이성은 확률과 통계에서 그들 나름대로 중요한 의미를 지니지만, 이뿐만 아니라 예측가능성(predictability)과 불확실성(uncertainty)을 이해하기 위한 토대를 제공한다.

그 동안 무작위성에 대한 관심은 주로 확률교육에서 부각되어왔으며, 무작위성에 대한 연구 역시 주로 확률적 관점에서 이루어져왔다 (Batanero, Henry, & Parzysz, 2005; Batanero & Serrano, 1999; Batanero, Green, & Serrano, 1998; Bennett, 2004; Gal, 2005; Green, 1989; Jones, Langrall, Thornton, & Mogill, 1997; Jones & Thornton, 2005). 지금까지 확률교육에서 이루어진 무작위성에 대한 연구는 주로 전형적인 우연현상에서 학생들의 이해를 조사하고 있다. 그러나 확률을 세상을 바라보는 도구로, 그리고 통계적 사고를 위한 도구로 사용할 수 있기 위해 학생들은 무작위성 개념을 우연현상에 국한하여 받아들여서는 안 되며, 우리를 둘러싼 자연현상과 사회현상에까지 확장하여 적용할 수 있어야 한다. 이를 위해 무작위성과 변이성이 서로 어떻게 관련되는지에 대해 주목할 필요가 있는데, 그 동안 무작위성과 변이성의 관

* 서울대학교 대학원 (kes-7402@hanmail.net)
** 서울대학교 (khmath@snu.ac.kr)

계에 주목한 연구는 거의 없다. 본 연구에서는 이러한 문제점을 보완하기 위해 다음을 논의한다. 첫째, 무작위성 개념을 확률적 관점에서뿐만 아니라 통계적 관점까지 확장하여 살펴보는데, 특히 무작위성과 변이성의 관계에 대해 분석한다. 둘째, 확률과 통계 영역의 배경이 되는 무작위성 개념에 대한 예비교사들의 이해도를 조사한다. 이를 통해 예비교사교육에서 무작위성 개념을 어떻게 다루어야 할지에 대한 시사점을 도출한다.

II. 이론적 배경

1. 무작위성 개념의 의미와 발달

우리는 보통 개별적인 결과들은 불확실하지만 여러 번의 반복 시행 결과는 일정한 패턴을 지니는 현상을 가리켜 무작위 사건이라 한다 (Moore, 1990). 그러나 무작위성이라는 개념은 다양한 아이디어들이 결합된 것으로(Batanero et al., 1998), 전문가들 역시 무작위성에 대해 매우 다양한 시각을 가지고 있다(Bennett, 2004; Falk & Konold, 1997). 이하에서는 무작위성 개념이 역사적으로 어떠한 아이디어와 결합하면서 발달해 왔는지 살펴볼 것이며, 이를 통해 무작위성 개념의 의미가 어떻게 변화되어왔는지 파악한다.

가. 외부영향의 배제

무작위성에 대한 개념은 이미 고대에서부터 사용되었는데, 이는 고대인들이 사용한 동물의 복사뼈나 수 막대들을 통해 알 수 있다(Hald, 2003). 당시 고대인들이 지닌 무작위성 개념이란 원인을 지닌 어떤 것과 반대되는 것으로 간주되었다(Batanero & Serrano, 1999). 고대의 사람들은 인간의 의지와 지식 등을 완전히 배제한 상태에서 무언가를 선택하는 방법을 개발하였고, 의사결정을 하거나 공정한 게임을 위한 수단으로 이를 이용하였다(Bennett, 2004). 그들이 원했던 것은 외부의 영향을 배제하는 것이었다. 고대인들은 각 근원사건이 나타날 가능성이 같다는 동등한 확률이라는 개념은 이해하지 못하였다. 그들이 사용했던 동물의 복사뼈와 같은 우연게임 도구들은 오늘날의 주사위나 동전과 같이 대칭적 구조를 갖고 있지 않았다. 이는 어느 특정 결과가 나올 확률이 항상 높다는 것을 의미한다. 단지 고대인들은 복사뼈 주사위를 던질 때 모든 면들이 동일한 확률로 나오지 않는다는 것을 어렴풋이 알고 있었을 것이다. 각 면에 대하여 확률을 계산하는 일은 그들의 능력을 크게 벗어나는 일이었다(Bennett, 2004). 지금은 너무나도 당연하게 생각하는 우연게임의 대칭성과 빈도의 안정성을 고대인들은 무작위성을 사용하는데 있어 필수적인 요소로 생각하지 않았던 것이다(Hald, 2003).

나. 등확률 개념과 무작위성

확률의 이론적 발달과 함께 무작위성 개념은 등확률과 밀접하게 연결된다. 왜냐하면 확률의 발달은 등확률의 원리가 필수적이었던 우연게임과 밀접한 관련이 있기 때문이다(Batanero & Serrano, 1999). 1600년대 초에 갈릴레오는 '동일한 확률'이라는 개념을 이해하고 이로부터 공정한 주사위 모형을 제안하였는데, 이것이 오늘날 우리가 사용하는 주사위의 모체이다. 정육면체 주사위는 각 방향에 대해 대칭적 구조를 가지고 있을 뿐만 아니라 균일한 재질로 만들어져 있어 바닥에 굴렸을 때 각 면이 나올 확률은 같다. 즉 모든 가능한 결과들은 1부터 6까지의 숫자들로 이루어진 균일확률 표본공간을 형성한다. 이렇게 모든 가능한 결과들이 같

은 확률로 나타나는 확률분포 상태를 가리켜 ‘균일분포’라 부르기도 한다(Bennett, 2004).

게임의 우승자가 결정되기 전에 게임이 중단되었을 때 공평하게 상금을 분할하고자 하는 상황에서 파스칼과 페르마는 게임에 참여한 사람들의 우승 가능성을 양화하고자 하였는데, 이때 그들이 첫 번째 규준으로 삼았던 것 역시 모든 가능한 결과들의 확률이 동일하다는 가정이었다(Batanero et al., 2005). 이와 같이 등확률 상황은 무작위성의 전제조건으로 다루어졌다.

다. 복합사건으로의 확장

주사위가 1, 1, 1, 2, 3, 4의 숫자들로 이루어졌다면 각 면이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$로 모두 같지만, 1이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이 되며, 5가 나올 확률과 6이 나올 확률은 0이 된다. 이런 경우 각 숫자 1, 2, 3, 4가 나올 확률은 균일분포를 이루지 않지만 각 면이 나올 확률은 여전히 $\frac{1}{6}$로 동일하기 때문에 단순사건이다. 그러나 하나의 사건에 여러 개의 결과가 존재하는 복합사건의 경우 상황은 더욱 복잡해진다.

세 개의 주사위를 동시에 던졌을 때 나타나는 모든 가능한 결과들은 216가지로 이루어진 균일확률 분포공간을 형성한다. 즉, 세 주사위를 동시에 던졌을 때 나타나는 결과에서 1, 2, 3과 3, 2, 1은 분명히 다른 경우로 근원사건의 확률은 모두 같다. 그러나 이때 세 눈의 수의 합은 3부터 18까지의 수로 모두 16가지인데, 세 주사위의 눈의 합은 균일분포를 이루지 않는다. 이것은 세 개의 주사위가 한데 묶여 복합적인 확률계를 형성하기 때문으로, 16가지의 수들은 216가지의 다양한 경로를 통해 나타난다. 그런데 주사위를 던지는 사람은 오직 눈의 수의 합에만 관심이 있기 때문에 16가지의 경우의 수만 인식하게 될 뿐 그 속에 숨어 있는 실제 경우의 수는 간과하게 된다. 즉 주사위 눈의 합이 관심의 대상이기 때문에 그 결과가 어떤 경로를 통해 나왔는지는 중요하지 않은 것이다. 그러나 확률을 계산할 때 가장 중요한 것은 하나의 동일한 결과를 낳을 수 있는 여러 가지 경우의 수를 정확하게 파악하는 것이다. 주사위 세 개를 동시에 던졌다면 최종 결과 속에 숨어 있는 여러 개의 경우의 수를 간파하는 것은 쉽지 않다. 동일한 결과를 주는 여러 가지 다양한 경우들은 쉽게 구별되지 않는다. 그러나 이것이 명확하게 규명되지 않은 상태에서는 결코 올바른 확률을 계산할 수 없다(Bennett, 2004).

확률문제를 수학적인 시각에서 최초로 분석한 사람은 카르다노로, 그는 주사위가 정직하다면 주사위 각 면이 나타날 가능성은 같다고 하였으며, 또한 우연(chance)을 초점이 되는 경우의 수와 가능성이 같은 가능한 모든 경우의 수의 비로 정의하였다. 이를 바탕으로 카르다노는 세 개의 주사위로 얻어지는 겉보기 경우의 수 56가지와 실제 경우의 수 216가지를 올바르게 규명하였다. 그는 세 개의 주사위를 동시에 던지는 시행에서 세 주사위의 눈이 모두 같은 경우는 6가지, 두 주사위의 눈이 같고 나머지 하나가 다른 경우는 30가지, 세 주사위의 눈이 모두 다른 경우는 20가지로 겉보기 경우의 수 56가지를 얻었다. 그리고 각각에 대해 조합의 수를 계산하여 실제 경우의 수 $6\times1+30\times3+20\times6=216$을 얻었다(Hald, 2003, pp.36-41에서 재인용). 세 개의 주사위를 던졌을 때 나타나는 56가지의 겉보기 경우의 수로부터 216가지의 실제 경우의 수를 유추해 내는 과정은 확률체계를 수학적으로 이해하는데 결정적인 실마리를 제공한다(Bennett, 2004). 무작위성 개념은 이와 같은 복합사건의 해석을 가능하게 하는 하위 요소로 확장되었다.

라. 큰 수의 법칙과 무작위성 개념

주사위 세 개를 동시에 던지는 무작위 사건의 확률분포를 정확하게 알아낸 것은 카르다노뿐이 아니었다. 갈릴레오 역시 주사위 세 개를 던졌을 때 동일한 확률을 갖는 216가지의 경우가 나타나는 이유를 자세히 설명하였다. 그는 주변 사람들로부터 주사위 세 개를 던져서 나오는 경우들 가운데 어떤 특정한 경우들은 거의 같은 확률로 나오는 것 같은데, 왜 전문 도박사들은 이들을 다른 확률로 취급하는지에 대한 질문을 종종 받았다고 적고 있다. 갈릴레오가 특별히 예로 든 것은 주사위 세 개의 합이 9와 10인 경우로서, 이런 결과를 줄 수 있는 겉보기 경우의 수는 6가지로 서로 같지만, 당시의 도박사들은 10이 나올 확률이 9보다 높다는 사실을 잘 알고 있었다고 한다. 9와 10은 겉보기 경우의 수는 같지만 실제 경우의 수가 다르기 때문이다. 갈릴레오가 지적한 것도 바로 이 점이었다. 주사위 세 개의 눈금을 더한 값이 9와 10인 경우는 모두 겉보기 경우의 수가 6으로 동일하여 확률이 같은 것처럼 보이지만, 실제 경우의 수는 각각 25와 27로 분명히 다른 확률로 나타난다. 제아무리 도박사라 해도 $\frac{27}{216}$의 확률과 $\frac{25}{216}$의 확률을 자신의 경험만으로 구별하는 것은 거의 불가능했을 것이다. 아마도 수백 년에 걸쳐 누적된 선배 도박사들의 경험이 도박사들 사이에 계속적으로 누적되어 왔을 것이다(Bennett, 2004, p.71; Hald, 2003, p.41에서 재인용).

카르다노는 각 눈금이 나올 확률이 동일하지 않은 주사위에 대하여 여러 번 던지다 보면 확률이 작은 눈금도 반드시 나오게 된다고 주장하였다. 다시 말해 시행 횟수가 충분히 많아지면 각각의 눈금이 나올 확률은 수학적으로 예상되는 확률과 거의 같아진다는 뜻이다. 아무리 발생 확률이 작은 사건이라 해도 여기서 예외가 될 수는 없다. 시행 횟수가 많아지면 발생 가능한 모든 사건들은 언젠가 반드시 일어난다. 이것이 바로 큰 수의 법칙이다. 카르다노는 또한 단 한 번의 무작위 추출로 얻어진 결과와 무작위 추출을 여러 번 반복하면서 습득된 경험적 확률 사이에는 커다란 차이가 있을 수 있다는 점을 강조했다. 여섯 개의 면을 갖고 있는 정육면체 주사위를 여섯 번 던진다면, 어떤 눈금도 두 번 이상 나올 수도 있고 아예 나오지 않는 눈금도 있을 수 있다는 것이다. 시행 횟수가 적을 때에는 눈금의 빈도수를 예측할 수 없지만, 주사위를 여러 번 던지면 각각의 눈금들은 여섯 번 시행에 한 번꼴로 나타

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	2	3	4	5	6					
1	1	1	1	1	1	1					
2		1	1	1	1	1	1				
3			1	1	1	1	1	1			
4				1	1	1	1	1	1		
5					1	1	1	1	1	1	
6						1	1	1	1	1	1
경우의 수	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

[그림 Ⅱ-1] 눈의 수의 합에 대한 몽모르의 분포표(Hald, 2003, p.205)

나게 된다는 것이다(Bennett, 2004). 이와 같이 많은 수의 자료를 대상으로 사고하면서 그 분포의 특성에 주목하는 과정에서 무작위성은 기본 가정이면서 각 분포의 특성을 설명하는 개념 요소로 발달하였다.

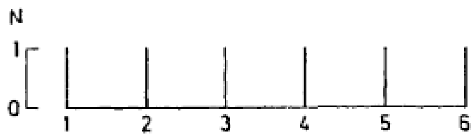
마. 중심극한정리와 무작위성

주사와 2개와 주사위 3개에 대한 문제는 카르다노와 갈릴레이에 의해 해결되었다. 그 이상의 주사위에 대한 문제는 매우 복잡한데 몽모르는 많은 노력 끝에 2~9개의 주사위를 이용했을 때 눈의 수의 합의 분포표를 만들었다. [그림 Ⅱ-1]은 두 개의 주사위를 이용했을 때 눈의 수의 합에 대한 분포표이다. 이 이원표는 첫 번째 주사위의 눈의 수와 두 번째 주사위의 눈의 수를 연속적으로 결합해서 얻어지는 36가지의 경우의 수에 대한 분포를 나타낸다. 각각의 열에 있는 경우의 수를 더하면 각각의 합에 대한 경우의 수를 얻게 된다. 주사위 2~9개에 대한 몽모르의 이러한 발견은 중심극한정리를 설명하는 최초의 수치적 예가 된다(Hald, 2003).

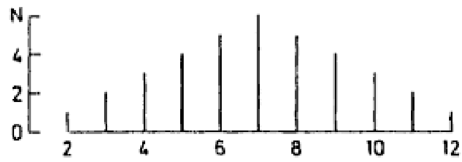
[그림 Ⅱ-2]는 주사위 1, 2, 4, 8개를 사용했을 때 눈의 수의 합에 대한 분포표를 그래프로 나타낸 것이다. 이후 드 므아브르는 이것을 생성함수로 발전시켰으며(Hald, 2003), 심슨은 이로부터 무작위 사건을 오차분포와 연관시킬 수 있는 아이디어를 얻게 된다(Stigler, 2002). 이로써 무작위성은 단지 각각의 자료가 아니라 자료집합 전체가 갖는 특성으로 이론화되었다.

바. 오차와 무작위성

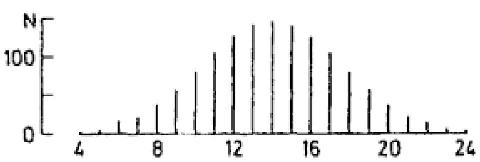
우연게임 외의 상황에서 무작위성 개념이 나타난 것은 천문학을 연구하는 과학자들에 의해서이다. 심프슨은 측정시에 나타나는 오차의 분포가 주사위 두 개를 동시에 던졌을 때 나타나는 눈의 수의 합의 분포와 비슷하다는 가정을 세웠다(Bennett, 2004). 즉 측정오차로 이루어진 자료집합을 주사위를 던졌을 때 나타나는 특징을 갖는 집합으로 간주하게 된 것이다. 이것은 측정오차의 자료집합에 내재해 있는 변이



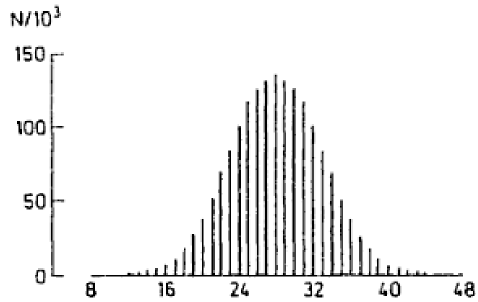
[그림 Ⅱ-2-a] 주사위를 1개 던졌을 때



[그림 Ⅱ-2-b] 주사위를 2개 던졌을 때



[그림 Ⅱ-2-c] 주사위를 4개 던졌을 때



[그림 Ⅱ-2-d] 주사위를 8개 던졌을 때

[그림 Ⅱ-2] 눈의 수의 합에 대한 확률분포(Hald, 2003, p.210)

성을 우연현상에서 발생하는 우연변이성의 특징으로 설명하려는 시도로, 무작위성 개념이 설명되지 않는 변이성의 특징을 기술하는 도구로 사용됨을 의미한다. 심프슨은 오차분포에 대한 그의 가설이 상당히 제한적임을 알고 있었지만 그의 결과가 일반화될 수 있다는 것에 대해서는 강한 확신을 가지고 있었다.

> 제 가설이 다른 것들처럼 잘 들어맞지 않는다 할지라도 해결하려 하는 문제에 대해 답을 제공하는 데는 충분할 것입니다(Stigler, 2002, p.224에서 재인용).

적당한 범위의 오차 내에서 각각의 측정값이 어떤 측정 오차를 가질 확률이 모두 동일하다면 측정 결과들은 동일한 분포로 나타날 것이며, 따라서 특정한 크기의 오차가 발생할 확률도 모두 같아지게 된다는 것이다. 이것은 [그림 Ⅱ-2-a]와 같이 하나의 주사위를 던졌을 때 나타나는 분포와 비슷한 분포를 갖게 된다. 그런데 동일한 측정을 반복하여 얻어진 오차들은 균일분포가 아니라 [그림 Ⅱ-2-b]~[그림 Ⅱ-2-d]와 같이 자료 값들이 중앙으로 모이는 분포를 갖게 된다. 심프슨은 특정한 크기의 오차가 발생할 확률은 오차 자체의 크기에 비례하며, 따라서 오차의 확률분포는 주사위 두 개를 던졌을 때 나타나는 확률분포와 비슷한 성질을 갖는다고 가정한 것이다. 이러한 가정으로부터 측정오차의 확률분포를 나타내는 그래프를 얻을 수 있었으며 해당 영역과 그래프로 둘러싸인 면적의 계산을 통해 어떤 특정 범위의 오차가 나올 확률을 구할 수 있었다(Bennett, 2004). 이러한 심프슨의 아이디어는 이후 다니엘 베르누이, 베이즈, 라플라스, 가우스에 의해 임의의 측정오차는 일종의 무작위 사건으로 간주할 수 있으므로 반복적인 측정에 의해 얻어진 오차들은 정규분포 곡선과 같은 분포를 보이게 된다는 아이디어로 발전된다(Bennett, 2004; Stigler, 2002). 이제 무작위성은 자연현상과 사회현상에 내재된 본질이며 동시에 현상을 이해하게 하는 도구로 확장되었다.

2. 무작위성과 변이성

우리 주위의 다양한 자연현상과 사회현상을 무작위 사건으로 간주한다는 것은 이러한 현상을 우연게임 상황과 유사한 것으로 생각할 수 있어야 함을 의미한다. 이를 위해 우리는 변이성에 주목해야 한다. 변이성이 어떻게 발생한 것인지, 각 유형의 변이성은 어떠한 특징을 갖고 있는지, 맥락 지식에 비추어 다양한 변이성에 어떻게 대처하는 것이 바람직한지에 대한 이해가 필요하다(고은성 · 이경화, 2010).

Franklin과 Garfield(2006)는 학생들이 학교교육을 통해 경험하고 학습해야하는 변이성을 그 특성에 따라 측정변이성, 고유변이성, 유도변이성, 표집변이성, 우연변이성으로 구분하고 있다. 측정변이성은 반복된 측정값들 사이에 존재하는 것으로 측정도구, 측정을 하는 사람, 측정방법 등에 의해 발생한다. 고유변이성은 어떤 체계에 내재해 있는 변이성으로, 예를 들어 사람들은 당연히 키, 태도, 능력이 다르며, 또한 의견, 감정적 반응 등도 서로 다르다. 이러한 속성들 중 하나를 측정한다고 할 때, 측정결과에서 반드시 변이성을 얻게 되는데 이것은 인간에 내재해 있는 고유의 변이성에 의한 것이다. 유도변이성은 처치에 의해 생기는 것으로 어떠한 요인이 어떠한 영향을 주는지 조사하기 위해 세심한 실험설계를 통해 의도적으로 발생시키는 경우가 많다. 표집변이성은 표집을 통해 모집단의 특성을 파악하는 과정에서 중요하게 고려되는 요소이다. 우연변이성은 우연현상에서 나타나는 변이성으로 확률과 통계를 연

결해 주는 중요한 요소이다. 우연변이성을 임의변이성(random variability)으로 명명하기도 한다(Torok & Watson, 2000).

통계학의 가장 큰 공헌은 소음이 존재하는 곳에서 신호를 분리해내 그것을 모델링했다는 것이다. 통계에서 자료집합을 다룰 때 가장 기본적인 문제는 세세한 것들을 고려함으로써 발생하는 복잡함을 어떻게 이해 가능한 상태로 만드는가이다. 이러한 문제를 해결하는 통계적 접근은 자료 속에 있는 소음들로부터 패턴을 발견하려고 노력하는 것에서부터 시작된다. 여기에서 설명되는 변이성과 설명되지 않는 변이성을 구별하는 것이 중요하다. 일반적으로 설명되는 변이성은 일시적인 것으로 무시될 수 없는 패턴들, 즉 신호가 된다. 현재의 지식 상태에서 설명되지 않는 변이성은 모든 패턴들을 제거했을 때 남겨지는 것으로 예측불가능하다는 특징을 갖고 있다. 그래서 우리는 설명되지 않는 변이성을 무작위 과정에 의해 생성된 것으로 모델링하게 된다. 사실 이 변이성이 무작위인지 아닌지 우리는 알지 못한다. 실제로 무작위 과정에 의해 일어났다면 소음에 무작위 요소가 존재하게 될 것이다. 그러나 측정 오차에 의한 변이성, 과정에 내재해 있는 고유의 변이성 등의 요소들은 전형적으로 설명되지 않는 변이성에 기여를 하게 되는데 이것들이 무작위적으로 행동할 것인지 아닌지에 대해 알 수 있는 방법은 없다. 무작위성은 압도적인 복잡성을 다루려는 인간의 시도의 전부이며, 패턴을 볼 수 없는 변이성을 모델링하기 위해 인간이 발명한 추상적인 모델일 뿐이다. 우리는 다양한 모델을 통해 추정을 하는데, 자료가 그 모델에 따라 무작위적으로 생성되었다고 가정을 하고 모집단과 자료를 연결하기 위해 확률을 사용한다. 이것이 바로 확률과 통계의 핵심이다. 무작위 요소를 포함하는 우리가 사용하는 모델들이 얼마나 유용한지는 그것들이 산출한 답들이 얼마나 실용적인지에 달려있다(Wild & Pfannkuch, 1999).

과학 시간에 9명의 학생이 동일한 물체를 저울로 측정하여 다음과 같은 측정값을 얻었다고 한다.(단위: g)

6.3	6.0	6.0	15.3	6.1	6.3
6.2	6.15	6.3			

이 물체의 무게는 얼마라고 생각하는가? 왜 그렇게 생각하는지 그 이유도 함께 설명하시오.

[그림 Ⅱ-3] Ko와 Lee(2011)의 연구에서 학생들에게 제시한 문제

[그림 Ⅱ-3]은 Ko와 Lee(2011)가 학생들이 변이성에 어떻게 대처하는지 알아보기 위해 제시한 문제이다. 연구결과에 따르면 변이성의 근원을 고려한 학생은 타당한 방법으로 물체의 질량을 구한 반면, 그렇지 못한 학생은 타당하지 못한 값을 물체의 질량으로 제시하였다. 동일한 물체를 9명의 학생이 각자 저울로 측정하고 이를 바탕으로 하나의 자료집합을 구성하는데, 이때 얻어진 자료집합 내에는 다양한 종류의 변이성이 존재한다. 우선 측정을 통해 얻어진 자료집합이므로 측정변이성이 존재하는데, 여기에서 그것의 원인이 측정도구에 의한 것인지 측정방법에 의한 것인지는 중요하지 않다. 그리고 서로 다른 9명의 학생이 측정을 했으므로 고유변이성 역시 존재하며, 9개의 측정값에 한정하여 물체의 무게를 구해야 하므로 표집변이성 역시 존재한다. 이제 중요한 것은 물체의 무게를 구하기 위해 변이성을 어떻게 처리하느냐이다. 일단 15.3이라는 자료 값은 다른 자료 값들과 너무 차이가 나기 때문에 제외하는 것이 바람직하다. 그렇다면 6.3과 6.15 사이의 차이는 어떻게 고려해야 하는가? 6.0과 6.15 사이

의 차이는 어떻게 해석해야 하는가? 물론 여기에서 변이성의 원인은 측정에 의한 것일 수도 있고, 학생에 의한 것일 수도 있고, 표집에 의한 것일 수도 있다. 그러나 현재 우리의 지식 상태에서 그 근원을 찾아 제어하는 것은 불가능한 것으로 우리는 이제 설명되지 않고 남아 있는 변이성을 우연현상에서 나타나는 변이성과 유사한 것으로 취급하는 방식을 택하게 된다.

Ⅲ. 조사 내용 및 방법

1. 조사 내용

본 연구의 목적은 예비교사들의 무작위성 개념에 대한 이해를 조사하는 것이다. 무작위성 개념의 역사적 발달에 대한 조사를 토대로 먼저 무작위성 개념이 단순사건 및 복합사건과 연결됨을 확인할 수 있었다. 그리고 무작위 개념은 시행 횟수가 충분히 많아지면 사건의 확률은 수학적으로 예상되는 확률과 거의 같아진다는 큰 수의 법칙과 연결되며, 또한 무한 시행의 결과는 정규분포와 유사한 형태를 따른다는 중심극한정리와도 밀접한 관련이 있음을 확인하였다. 마지막으로 이러한 모든 아이디어들은 우연현상에만 국한된 것이 아니라 우연현상 외의 자연현상, 사회현상 등에 확장되어 적용될 수 있음을 살펴보았다.

이러한 선행 연구를 토대로 선정한 조사 내용은 <표 Ⅲ-1>과 같다. 조사 문항은 [그림 Ⅲ-1]에 제시된 바와 같으며, 전문가의 자문을 거쳐 개발되었다. 과제 1-(1)번과 1-(2)번은 우연현상의 단순사건과 복합사건에서 무작위성을 인식하는지 알아보기 위한 것이고, 과제 2번은 무작위 사건이 큰 수의 법칙을 만족함을 인식하는지 알아보기 위한 것이다. 그리고 무작위 개념을 우연현상이 아닌 곳까지 확장하여 적용할 수 있는지 조사하였는데, 과제 1-(3)번은 이를 위해 측정상황에서 무작위성을 인식하는지 조사하기 위한 것이며, 과제 3번은 반복적인 측정결과가 중심극한정리를 만족함을 인식하는지 알아보기 위한 것이다. 과제 1에서 세 사건은 모두 무작위성을 반영하는 실험으로, 주사위를 던지는 실험뿐만 아니라 측정상황에도 무작위성이 반영됨을 인식하는 것이 필요하다. 2번 과제에서는 1이 나올 확률을 토대로 자료 값들이 일정한 값을 중심으로 분포함을 인식하는 것이 필요하다. 3번 과제에서는 측정을 통해 얻어진 자료 값들이 평균을 중심으로 분포함을 인식하는 것이 필요하다. 조사 문항에서 다룬 자료는 이산량이었으나 연속형 그래프의 개형을 제시한 것은 분포의 경향성을 파악하도록 하는 데 초점을 두도록 하기 위한 것이었으며, 예비교사들은 조사 과정에서 이에 대한 의문을 제기하지 않았다.

2. 조사방법 및 자료 분석

<표 Ⅲ-1> 조사 내용 및 과제 번호

조사 내용		과제 번호
우연상황	단순사건에서 무작위성을 인식하는가?	1-(1)번
	복합사건에서 부작위성을 인식하는가?	1-(2)번
	큰 수의 법칙을 인식하는가?	2번
측정상황	측정상황에서 무작위성을 인식하는가?	1-(3)번
	중심극한정리를 인식하는가?	3번

본 연구의 참여자는 모두 57명으로 이들 중 23명은 서울시 소재 대학에서 수학교육을 전공하고 있는 대학 3학년의 예비교사들로 검사가 이루어지는 시점까지 대학에서 확률과 통계 과목을 이수하지 않아, 확률과 통계에 대한 지식은 정규교육과정의 고등학교 과정까지에서 학습한 경험에 기반한다. 나머지 34명은 청주시 소재 대학에서 수학교육을 전공하고 있는 대학 3학년의 예비교사들로, 2학년 과정에서 통계학 관련 과목을 이수하였다. Garfield와 Chance (2000)는 통계교육에서 유용하게 사용할 수 있는 다양한 평가방법을 소개하고 있는데, 그 중에서 간단하게 자신의 생각을 기술하거나 에세이를 쓰도록 하는 퀴즈 형식의 평가는 다양한 주제를 다룰 수 있으며, 또한 학생들이 이해하고 있는 것과 이해하지 못한 것을 파악할 수 있는 방법에 해당된다. 본 연구에서는 예비교사들의 무작위성 개념에 대한 이해를 조사하기

1. 다음의 각 실험이 무작위성을 반영하는지 결정하고, 그렇게 생각하는 이유를 설명하시오.

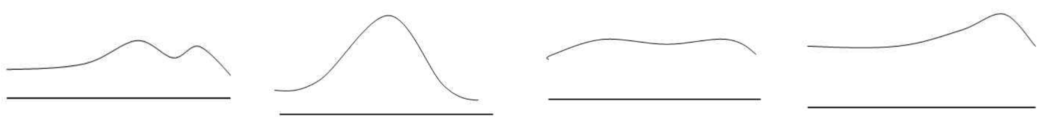
(1) 주사위 1개를 여러 번 던져 1의 눈이 나오는 횟수를 조사하는 실험

(2) 주사위 2개를 동시에 여러 번 던져 두 눈의 합이 9가 되는 횟수를 조사하는 실험

(3) 장난감 자동차의 속력을 알아보기 위해 여러 번 측정하는 실험

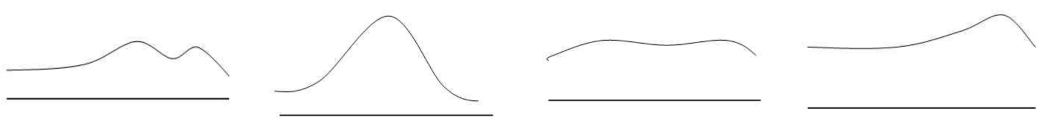
2. 100명의 학생을 대상으로 주사위 1개를 120번씩 던지게 한 후 1의 눈이 나온 횟수를 조사하였다. 다음 중 그 결과를 나타낸 그래프의 개형에 해당된다고 생각하는 것을 고르고, 그렇게 생각하는 이유를 설명하시오.(가로축은 학생을, 세로축은 1의 눈이 나온 횟수를 나타낸다.)

① ② ③ ④



3. 민수는 조별 과제로 조원들과 함께 하나의 장난감 자동차를 조립하여 만든 후 속력에 대한 보고서를 써야 한다. 조원 10명이 각각 10번씩 자동차의 속력을 측정한 후 모든 측정값을 그래프로 나타내었다. 다음 중 민수네 조가 만든 그래프의 개형에 해당된다고 생각하는 것을 고르고, 그렇게 생각하는 이유를 설명하시오.(가로축은 속력을, 세로축은 빈도를 나타낸다.)

① ② ③ ④



[그림 Ⅲ-1] 무작위성 개념 조사 과제

위해 학생들이 자신의 생각을 기술하도록 하는 과제를 개발하였다([그림 Ⅲ-1] 참조). 연구에 참여한 57명의 학생을 대상으로 연구자가 개발한 과제를 해결하도록 하였으며, 해결하는데 소요된 시간은 약 20~30분으로 시간에 제한을 두지는 않았다.

자료의 분석은 두 단계를 거쳐 이루어졌다. 우선 첫 번째 단계에서 학생들이 사용한 용어나 표현을 바탕으로 학생들의 반응을 범주화하였다. 이때의 범주들은 기존의 틀을 사용한 것이 아니라 학생들의 반응을 토대로 귀납적인 과정으로 얻어진 결과들이다(Denzin & Lincoln, 1994; Goetz & LeCompte, 1984). 두 번째 단계에서는 첫 번째 단계에서 얻어진 범주들 사이에서 유사점이 발견되는 것을 다시 그룹화하여 새로운 범주화를 시도하였다. 예를 들면, <표 IV-1>의 '외부영향과 무관'이라는 범주는 분석의 첫 번째 단계에서 나타난 범주 '인위적 조건에 영향을 받지 않음', '의도적이지 않음', 그리고 '의지와 상관이 없음'을 그룹화하여 새롭게 범주화한 결과이다. 이러한 두 단계의 분석은 도출된 범주들의 정교화를 가능하게 해준다(Makar & Confrey, 2003).

<표 Ⅳ-1> 단순사건과 복합사건이 무작위 사건이라고 판단한 근거

판단 근거	빈도(%)	
	단순사건	복합사건
근원사건의 등확률	9(17.0%)	7(13.5%)
예측불가능성	9(17.0%)	9(17.3%)
외부영향과 무관	17(32.1%)	17(32.7%)
수학적 확률의 존재	6(11.3%)	6(11.5%)
독립시행	3(5.7%)	3(5.8%)
큰 수의 법칙 성립	3(5.7%)	3(5.8%)
기타	4(7.5%)	5(9.6%)
무응답	2(3.8%)	2(3.8%)
합 계*	53(100.0%)	52(100.0%)

* 판단의 근거로 여러 가지를 제시한 경우가 있어 각각 49와 48을 초과할 수 있음

Ⅳ. 조사결과

1. 단순사건과 복합사건에서 무작위성 인식

57명의 학생 중 49명(86.0%)이 주사위 1개를 여러 번 던져 1의 눈이 나오는 횟수를 조사하는 실험이 무작위성을 반영한다고 생각한 반면, 8명(14.0%)의 학생은 단순사건이 무작위성을 반영하지 않는다고 생각하였다. 그리고 57명의 학생 중 48명(84.2%)이 주사위 2개를 동시에 여러 번 던져 두 눈의 합이 9가 되는 횟수를 조사하는 실험이 무작위성을 반영한다고 생각한 반면, 9명(15.8%)의 학생은 복합사건이 무작위성을 반영하지 않는다고 생각하였다. <표 Ⅳ-1>은 단순사건과 복합사건이 무작위 사건인지 여부를 결정하는데 학생들이 판단의 근거로 제시한 내용을 정리한 것이다. 학생들은 근원사건의 확률이 같다는 것, 다음 시행에서 어떠한 결과가 나올지 예측할 수 없다는 것, 결과가 외부의 영향과 무관하게 나타난다는 것, 확률을 수학적으로 계산할 수 있다는 것, 독립시행이라는 것, 큰 수의 법칙이 성립한다는 것을 판단의 근거로 제시하였다. 가장 많은 학생들이 외부의 조건이 결과에 영향을 미치지 않는 사건을 무작위 사건이라고 생각하고 있었으며, 그 다음으로 다음 시행에서 나타나는 결과를 예측할 수 없는 사건과 근원사건의 확률이 모두 같은 사건, 수학적 확률이 존재하는 사건을 무작위 사건으로 인식하고 있었다.

2. 측정상황에서 무작위성 인식

57명의 학생 중 16명(28.1%)이 장난감 자동차의 속력을 알아보기 위해 여러 번 측정을 하는 상황이 무작위성을 반영한다고 생각한 반면, 41명(71.9%)의 학생들은 측정상황이 무작위성을 반영하지 않는다고 생각하였다. <표 Ⅳ-2>와 <표 Ⅳ-3>은 학생들이 측정상황이 무작위성을 반영한다고 결정하는데 판단의 근거로 제시한 내용과 측정상황이 무작위성을 반영하지 않는다고 결정하는데 판단의 근거로 제시한 내용을 각각 정리한 것이다.

학생들은 측정상황이 무작위 사건이라고 결정하는데 있어 판단의 근거로 다음 시행에서 어떠한 결과가 나올지 예측할 수 없다는 것(즉, 예측불가능성), 결과가 외적인 조건에 영향을 받지만 그것을 무시하고 속력을 구해야 한다는 것(즉, 외부의 영향을 무시), 각 측정값이 나올 확률을 계산할 수 있다는 것(즉, 확률의 존재), 매번의 측정이 서로 무관하게 이루어진다는 것(즉, 독립시행), 측정값이 불규칙적으로 나타나지만 측정을 많이 하면 할수록 실제속력에 가까운 값을 얻을 수 있다는 것(즉, 큰 수의 법칙 성립)을 제시하였다. 측정상황에서 학생들이 무작위 사건에 대한 판단의 근거로 제일 많이 제시한 것은 예측불가능성과 독립시행이었으며, 그 다음으로 외부의 영향을 무시할 수 있다는 것이었다.

<표 Ⅳ-2> 측정상황이 무작위 사건이라고 판단한 근거

판단 근거	빈도(%)
근원사건의 등확률	0(0.0%)
예측불가능성	5(26.3%)
외부의 영향을 무시	4(21.1%)
확률의 존재	2(10.5%)
독립시행	5(26.3%)
큰 수의 법칙 성립	2(10.5%)
무응답	1(5.3%)
합 계*	19(100.0%)

* 판단의 근거로 여러 가지를 제시한 경우가 있어 16을 초과할 수 있음

반면 측정상황이 무작위 사건이 아니라고 결정하는데 있어 학생들은 매번 나오는 측정값의 확률이 서로 다르다는 것(즉, 근원사건의 확률이 같지 않음), 측정결과가 특정범위에 존재할 것이므로 어느 정도 예측이 가능하다는 것(즉, 예측이 가능함), 건전지 성능이나 바닥의 상태 등과 같은 외적인 조건에 의해 측정결과가 달라질 수 있다는 것(즉, 외부의 영향을 받음), 각 측정값에 정해진 확률이 없다는 것(즉, 확률이 존재하지 않음) 등을 판단의 근거로 제시하였다. 학생들이 측정상황이 무작위 사건이 아니라고 결정하는데 판단의 근거로 외부의 영향을 받는다는 것을 제일 많이 제시하였으며, 그 다음으로 많은 학생들이 근원사건의 확률이 서로 다르다는 것을 판단의 근거로 제시하였다.

<표 Ⅳ-3> 측정상황이 무작위 사건이 아니라고 판단한 근거

판단 근거	빈도(%)
근원사건의 확률이 같지 않음	7(16.3%)
예측이 가능함	6(14.0%)
외부의 영향을 받음	16(37.2%)
확률이 존재하지 않음	5(11.6%)
기타	6(14.0%)
무응답	3(7.0%)
합 계*	43(100.0%)

* 판단의 근거로 여러 가지를 제시한 경우가 있어 41을 초과할 수 있음

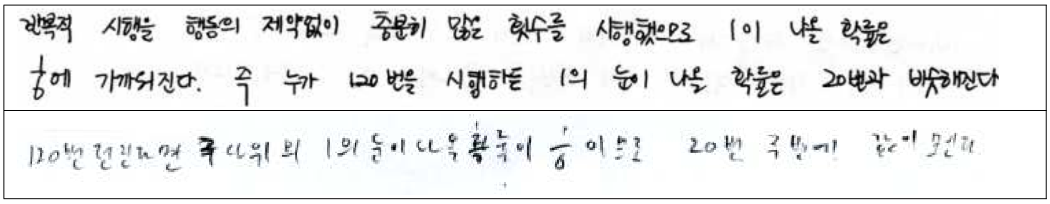
3. 큰 수의 법칙과 중심극한정리의 인식

57명의 학생 중 51명(89.5%)이 주사위 1개를 던지는 시행 결과에서 큰 수의 법칙이 성립함을 인식하였다. [그림 Ⅳ-1]은 과제 2번에 대한 학생들 반응의 예이다. 반복적으로 여러 번 시행을 하면 수학적 확률인 $\frac{1}{6}$에 가까워짐을 인식하고 있다. 이는 학생들이 고등학교 과정까지의 교육과정에서 학습한 것으로 주사위 1개

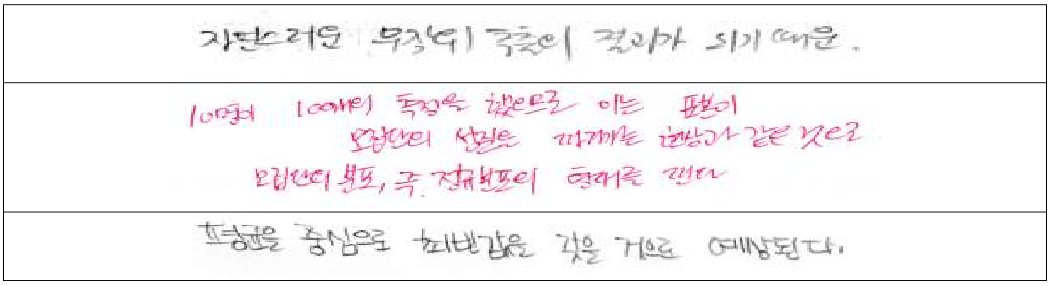
를 던지는 시행 결과에서 많은 학생들이 큰 수의 법칙을 어렵지 않게 인식함을 확인할 수 있었다.

57명의 학생 중 27명(47.4%)이 장난감 자동차를 측정하는 상황에서 중심극한정리를 인식할 수 있었다. [그림 Ⅳ-2]는 장난감 자동차를 측정하는 상황에서 중심극한정리를 인식한 학생들 반응의 예이다. 중심극한정리를 인식한 학생들은 측정상황을 자연스럽게 무작위 추출과 같은 상황으로 받아들이거나([그림 Ⅳ-2]의 첫 번째 학생), 측정값들의 분포가 정규분포를 형성한다고 생각하거나([그림 Ⅳ-2]의 두 번째 학생), 또는 평균값을 중심으로 대부분의 측정값들이 분포할 것이라 예상하였다([그림 Ⅳ-2]의 마지막 학생).

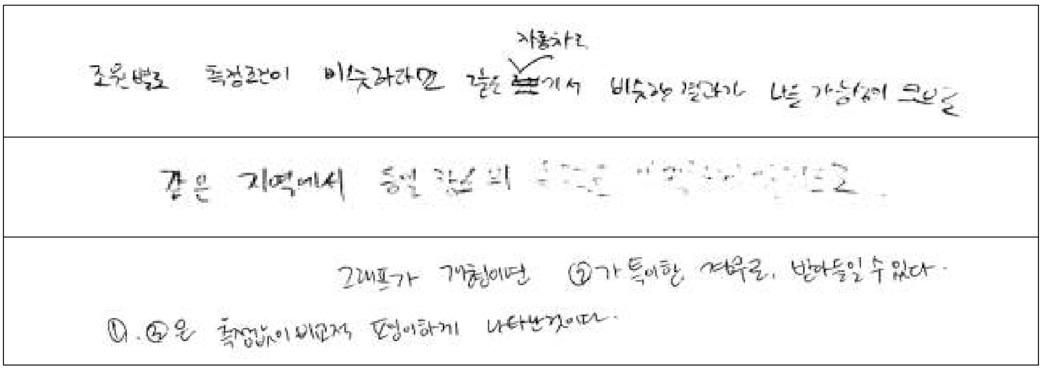
57명의 학생 중 30명(52.6%)은 장난감 자동차를 측정하는 상황에서 중심극한정리를 인식하지 못했다. [그림 Ⅳ-3]은 장난감 자동차를 측정하는 상황에서 중심극한정리를 인식하지 못한 학생들 반응의 예이다. 중심극한정리를



[그림 Ⅳ-1] 과제 2번에 대한 학생들 반응의 예



[그림 Ⅳ-2] 중심극한정리를 인식한 학생들 반응의 예



[그림 Ⅳ-3] 중심극한정리를 인식하지 못한 학생들 반응의 예

인식하지 못한 학생들은 문제를 정확하게 이해하지 못해 대부분의 측정값이 유사하게 나타날 것이라 예상하거나([그림 Ⅳ-3]의 첫 번째 학생), 변이성을 인정하지 않아 속력이 매번 동일하게 나타날 것이라고 생각하였다([그림 Ⅳ-3]의 두 번째 학생). 그리고 측정상황에서 얻어진 측정결과들을 전혀 중심극한정리와 연결시키지 못하는 학생들도 있었다([그림 Ⅳ-3]의 마지막 학생).

Ⅴ. 논의 및 결론

본 연구에서는 먼저 선행연구 분석을 통해 무작위성 개념이 등확률성 개념, 복합사건, 큰 수의 법칙, 중심극한정리 등과 밀접하게 관련되면서 발달되었음을 확인하였다. 그리고 무작위성은 시행의 결과가 외부의 영향을 받지 않는다는 아이디어, 그리고 측정오차의 자료집합이 이루는 분포와 관련이 있음을 확인하였는데, 이것은 통계의 핵심 아이디어인 변이성과 아주 밀접한 관련이 있음을 살펴보았다.

그리고 선행연구를 토대로 무작위성 개념 조사 과제를 개발하여 예비교사들의 무작위성 개념 이해를 조사하였는데, 특히 예비교사들이 문제 상황이 무작위성을 반영하는지 여부를 결정하는데 사용하는 판단의 근거를 조사하였으며 또한 우연현상이 아닌 측정상황으로 무작위성 개념을 확장하여 이해할 수 있는지 조사하였다. 조사결과 단순사건에서 86.0%의 학생들이, 그리고 복합사건에서 84.2%의 학생들이 무작위성을 인식한 반면 측정상황에서는 28.1%의 학생들만이 무작위성을 인식하였다. 이는 대부분의 예비교사들이 우연현상에서 무작위성 개념과 관련된 아이디어들을 이해하고 있음에도 불구하고 이를 우연현상이 아닌 다른 상황으로 확장하여 적용하고 있지 못함을 보여준다. 즉 무작위 사건이 갖는 특징에 대해 알고 있음에도 불구하고 어떤 상황이 무작위성을 반영하는지 판단하는데 어려움을 겪는 것으로 보인다. 특히 우연현상이 아닌 다른 상황이 무작위성을 반영하는지 판단하는데서 어려움을 겪는 것으로 판단된다. 이에 대한 원인은 학생들이 단순사건 및 복합사건, 그리고 측정상황에서 무작위성 반영 여부를 결정하는데 판단의 근거로 제시한 내용을 통해 살펴볼 수 있었다.

단순사건과 복합사건에서 무작위성의 판단 근거로 학생들이 가장 많이 제시한 것은 외부의 조건이 결과에 영향을 미치지 않는다는 것(약 32%)이었다(<표 Ⅳ-1> 참조). 그리고 가장 많은 학생들이 측정상황이 무작위 사건이 아니라고 결정하는데 판단의 근거로 제시한 것은 외부의 영향을 받는다는 것(약 37%)이었다(<표 Ⅳ-3> 참조). 이는 변이성의 이해와 관련된 것으로 장난감 자동차의 속력에 대한 측정값에서 변이성의 원인이나 변이성의 정도를 고려하여 어떠한 측정값들을 배재할 것인지 어떠한 측정값들을 받아들일 것인지 결정할 수 있다. 배재할 수 없는 변이성의 경우 그 원인을 알 수 없으므로 우연현상에서 나타나는 우연변이성에 대처하는 방식으로 대처할 수 있다. 즉 무작위성을 반영하는 사건으로 간주하고 통계적으로 처리할 수 있다.

Johnston-Wilder(2008)에 따르면 학생들이 실생활에서 일어나는 다양한 자연현상과 사회현상을 무작위 사건으로 인식할 수 있기 위해서는 인지적 이동을 필요로 한다. 본 연구에서 무작위성과 변이성의 관계에 대한 고찰을 통해 변이성에 대한 이해는 이러한 인지적 이동에 도움이 됨을 확인할 수 있었다. 따라서 학생들의 이러한 인지적 이동을 돕기 위해 변이성을 학생들에게 지도하는데 있어, 이것을 교육과정

에 어떻게 반영할 수 있을지에 대한 계속적인 연구가 필요하다.

학생들은 또한 측정상황이 무작위 사건이 아니라고 결정하는데 있어 판단의 근거로 근원사건의 확률이 같지 않다는 것(16.3%), 예측이 가능하다는 것(14.0%), 그리고 확률이 존재하지 않는다는 것(11.6%)을 제시하였는데 이에 대해서는 다양한 접근을 통해 좀 더 자세한 연구가 필요한 것으로 판단된다.

과제 1-(3)번에서 측정상황을 무작위 사건으로 인식한 학생들은 전체의 28.1%인 것으로 나타난 반면, 과제 3번에서 장난감 자동차의 속력을 여러 번 측정한 결과가 정규분포를 이룰 것이라 생각한 학생들은 전체의 47.4%로 나타났다. 이는 교육과정의 영향으로 판단되는데 학생들은 대부분의 사회현상이나 자연현상에서 상당히 많은 측정값을 얻을 때 그 결과가 정규분포 형태를 따른다는 것을 학습한다. 그럼에도 불구하고 많은 학생들이 이것이 우연현상에서 나타나는 무작위성과 유사하다는 것까지는 인식하지 못하는 것으로 간주된다.

학생들이 무작위성 반영 여부를 판단할 때 제시한 근거가 단순사건과 복합사건에서 매우 유사하게 나타났는데, 이것은 과제에서 제시한 우연현상이 모두 주사위를 소재로 하고 있어 유사한 근거를 토대로 무작위 사건인지 여부를 판단한 것으로 보인다. 단순사건과 복합사건의 소재를 달리했을 때, 예를 들면 단순사건으로 구슬뽑기 상황을 제시하고 복합사건으로 주사위 2개를 던지는 상황을 제시했을 때 학생들이 무작위 사건인지 여부를 판단하는 근거에 대한 비교를 통해 복합사건에서 학생들의 무작위성 개념에 대한 이해를 좀 더 살펴보는 연구도 필요할 것으로 보인다.

참고문헌

고은성, 이경화(2010). 변이성과 변이 추론 지도를 위한 지식. **수학교육학연구, 20**(4), 221-239.

Ballman, K. (1997). Greater emphasis on variation in an introductory statistics course. *Journal of Statistics Education, 5*(2). [http://www.amstat.org/publications/jse/v5n2/ballman.html]

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones(Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp.15-37). New York, NY: Springer.

Batanero, C. B. & Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 558-567.

Batanero, C., Green, D. R., & Serrano, L. (1998). Randomness, its meanings and educational implications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29*(1), 113-123. [http://pdfserve.informaworld.com/840182_758494928_746865523.pdf]

Bennett, D. J. (2004). **확률의 함정**. (박병철 역). 영림카디널: 서울(영어 원작은 1998년 출판)

Biehler, R. (1994). Probabilistic thinking, statistical reasoning, and the search for causes: Do we need a probabilistic revolution after we have taught data analysis? In J. Garfield(Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference On Teaching Statistics(ICOTS 4)*, Marrakech, Morocco: University of Minnesota. [http://lama.uni-paderborn.de/fileadmin/Mathematik/People/biehler/Homepage/pubs/BiehlerIcots19941.pdf]

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook* *of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Falk, R., & Konold, C. (1997). Making sense of randomness: Implicit encoding as a basis for judgment. *Psychological Review*, 104(2), 301-318.
[http://homepage.psy.utexas.edu/HomePage/Class/Psy355/Gilden/falk.pdf]

Franklin, C. A. & Garfield, J. B. (2006). The GAISE project: Developing statistics education guidelines for grades Pre-K-12 and college courses. In G. F. Burrill & P. C. Elliott (Eds.), *Thinking and reasoning with data and chance: Sixty-eight yearbook* (pp.345-375). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In G. A. Jones(Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp.39-63). New York, NY: Springer.

Garfield, J. & Chance, B. (2000). Assessment in statistics education: Issues and challenges. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1&2), 99-125.
[https://app.gen.umn.edu/artist/articles/Garfield02.pdf]

Goetz, J. P. & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. Orlando, FL: Academic Press.

Green, D. (1989). School pupils' understanding of randomness. In R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education: Vol. 7. The teaching of statistics* (pp.27-39). Paris: UNESCO.
[http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001248/124810eo.pdf#97806]

Hald, A. (2003). *History of probability and statistics and their applications before 1750*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 101-125.

Jones, G. A. & Thornton, C. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. In G. A. Jones(Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp.65-92). New York, NY: Springer.

Johnston-Wilder, P. (2008). Children''s understanding of randomness as a model. In Joubert, M. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 28*(3), 48-53.
[http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip28-3/BSRLM-IP-28-3-09.pdf]

Ko, E.-S. & Lee, K.-H. (2011, 출판중). Are mathematically talented elementary students also talented in statistics?. In B. Sriraman & K.-H. Lee, *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp.29-43). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Makar, K. & Confrey, J. (2003). Chunks clumps and spread out: Secondary preservice teachers' informal notions of variation and distribution. In C. Lee (Ed.), *Reasoning about Distribution: A collection of current research studies. Proceedings of the Fourth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy (SRTL-3)*. [CD-ROM, with video segments] Mount Pleasant, Michigan: Central Michigan University.

Moore, D. S. (1990). Uncertainty. In L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants* (pp. 95-137). Washington, DC: National Academy Press.

Stigler, S. M. (2002). **통계학의 역사**. (조재근 역). 서울: 한길사. (영어 원작은 1986년 출판)

Torok, R. & Watson, J. (2000). Development of the concept of statistical variation: An exploratory study. *Mathematics Education Research Journal, 12*(2), 147-169. [http://www.merga.net.au/documents/MERJ_12_2_Torok&Watson.pdf]

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265. [http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.104.376&rep=rep1&type=pdf]

Pre-service Teachers' Understanding of Randomness

Ko, Eun Sung (Graduate school of Seoul National University)
Lee, Kyeong Hwa (Seoul National University)

Understanding of randomness is essential for learning and teaching of probability and statistics. Understanding of randomness prompts to understand natural and social phenomena from the point of view of mathematics, and plays a role of base in understanding of judgments based on rational interpretation on these phenomena. This study examined whether pre-service teachers recognize this, and they understand randomness included in various contexts. According to results, they did not have a understanding of randomness in the context related to measuring, while they grasped randomness in simple and joint events. This implies that they lack the understanding of variability which is essential in the context of measuring. This study, therefore, suggests that the settings of measuring should be introduced into probability and statistics education, especially that data from measuring should be analyzed focusing on the variability in the data set.

* key words : randomness(무작위성), 예비교사(pre-service teachers), variability(변이성)

논문접수 : 2010. 11. 7
논문수정 : 2010. 11. 26
심사완료 : 2010. 12. 10