

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-A.2010.34.6.731

구성방정식에 따른 고무 분기점 거동 비교 연구

박 문 식*† · 송 승*

* 한남대학교 기계공학과

Comparative Study of Bifurcation Behavior of Rubber in Accordance with the Constitutive Equations

Moon Shik Park*† and Seung Song*

* Dept. of Mechanical Engineering, Hannam Univ.

(Received January 4, 2010 ; Revised April 21, 2010 ; Accepted April 22, 2010)

Key Words: Rubber(고무), Constitutive Equation(구성방정식), Continuum-Based Model(연속체기반 모델), Chain Molecular Model(체인분자모델), Bifurcation(분기), Treloar Patch(트렐로어 패치), Cylindrical Balloon Stick(원통형 막대풍선)

초록: 설계 또는 해석을 위해 고무를 모델링할 때, 쓸 수 있는 구성방정식이 너무 많음으로 말미암아 종종 당황하거나 수수께끼 같은 일을 경험할 때가 있다. 어떤 모델들은 몇 개의 재료상수만을 갖지만 또 다른 모델들은 많은 수의 재료상수를 갖는다. 연구자들은 광범위한 실험데이터를 준비하여 신중하게 피팅을 하여야 한다. 본 논문에서는 먼저 8배 정도까지 큰 신장 영역에 대해 대표적인 고무재료의 구성방정식들을 비교해 보았다. 대부분의 공학적 응용에서처럼 상대적으로 변형이 적은 경우에는 연속체기반모델 또는 체인분자모델이 유사하게 쓰일 수 있지만, 대부분 생체적 거동에서 볼 수 있는 큰 변형의 경우에는 체인분자모델들이 더 유용함을 알 수 있었다. 구성방정식에 따른 분기점의 존재 여부를 알아보기 위하여 트렐로어 패치와 원통형 막대풍선에 대한 분기점 해석을 이론적 및 수치적으로 수행하였다. 키슬리의 조건식으로부터 트렐로어 패치에서의 분기점은 연속체기반 모델에서는 존재하였으나 체인분자모델에서는 존재하지 않음을 보였다. 원통형 막대풍선은 축신장 허용의 경계 조건에 대해서는 모든 모델들이 분기점 거동을 보여주었다. 따라서 고무의 분기점 거동을 구하고자 할 때는 분기점의 존재유무 자체가 재료모델의 선정에 의존적이라 할 수 있다.

Abstract: Modeling of rubber for design or analysis often requires confusing or complex work because there are a large number of constitutive models to be considered. Some models have few material constants, while others have many. Researchers have to prepare and fit extensive experimental data with caution and discretion. In this paper, we first compared some typical rubber models in which deformation was carried out by stretching up to around eight times the original size. We conclude that continuum-based models and chain molecular models can be used in the study of the small deformation in most engineering applications, but chain molecular models are preferred in the study of the large deformations in most biomaterial applications. As discrimination problems, Treloar's patch and cylindrical balloon stick are tested theoretically and numerically for studying bifurcation. In the case of Treloar's patch, by using the Kearsley's equation, we show that bifurcation exists for continuum-based models but not for chain molecular models. Both models show bifurcation in the cylindrical balloon stick. Therefore, in the analysis of the bifurcation of rubber showed that its existence also depends on the constitutive model selected.

1. 서 론

고무의 가장 큰 특성은 높은 신축성과 낮은 강성이다. 고무의 변형에 있어서 하중-변위 곡선은 상당한 비선형성을 보이며 큰 변형에도 불구하고

하중이 제거되면 원형으로 돌아오는 초탄성(hyperelasticity)을 보인다. 또한 고무는 열적 또는 열탄성적 특성을 보인다.⁽¹⁾ Gough-Joule 효과라고 불리는 이 특성은 고무가 일정 하중으로 인장된 상태에서 열을 받으면 수축하고, 반대로 인장시킬 때는 열을 발산하는 것을 말한다. 고무와 중합체들은 분자 구조상에 전기적 쌍극자(dipole)들

† Corresponding Author, ms.park@hnu.kr

이 존재하는 유전체(dielectric) 인데 이로 말미암아 어떤 중합체들은 전기장 작용에 의하여 변형하는 전기탄성(electrostriction)을 보인다.⁽²⁾ 절연체가 전기장을 받아 변형을 일으키는 고무 중합체는 소형 센서 또는 구동자로서 의료용, 에너지수집용 또는 제어용으로 쓰일 수 있다.⁽³⁾

고무해석에 있어서 기계적 성질의 규명에는 그 단순한 화학적 조성에도 불구하고 매우 독특하고 수수께끼 같은 어려움에 직면하였다. 보통의 액체 또는 고체인 유사한 다른 탄화수소 물질들과도 다르며, 결정구조를 갖는 고체의 탄성 변형기구에 비하여 수백 배나 되는 고무의 탄성은 매우 특이하였다. 많은 오해와 시행착오를 거쳐 지금 인정되고 있는 고무의 탄성역학 이론이 제안된 것은 1932년 Meyer 등에 의해서이다.⁽⁴⁾ 이 이론은 더 실험하기 쉽고 쓰기 편한 이론들에 비해 상대적으로 주목받지 못하다가 합성고무들이 널리 응용되기 시작하면서 부터 통계적 탄성론으로 귀결되는 중요한 과학적 진보로 인정되기에 이르렀다. 이러한 체인분자모델에 의한 역학이론은 Treloar⁽¹⁾에 의해 잘 정리되었고 연속체 역학에 의한 모델과의 비교를 포함하여 최근에 Boyce와 Arruda⁽⁵⁾에 의해 취합 정리된 바 있다.

다양한 고무류의 개발과 그 광범위한 소비재, 산업, 의료 분야 응용에 비하여 거동해석에 관하여는 아직도 신뢰할만한 수준에는 이르지 못하였다. 비록 유한요소법이 거의 모든 설계 및 시뮬레이션 분야에 응용되고 있다고는 하나 아무리 정교한 해석법을 쓴다 할지라도 고무류는 소재 특성의 복잡한 거동 및 비선형성으로 인하여 많은 점에서 한계에 봉착한다. 특히 적합한 재료상수를 규명하였다 하더라도 그러한 모델이 실제 설계나 시뮬레이션에 이용 될 때는 다른 어떤 수치해석적 특이성을 가져다줄지 모르기 때문이다. 특히 고무 형상품의 대부분은 변형거동 중에 재료 특성에 의한 분기현상(bifurcation phenomena)들이 나타나는 것으로 알려져 있는데 이를 규명코저 많은 논문들이 발표되고 있다. 대표적인 것들로 는 고무풍선들의 비대칭 부풀림,⁽⁶⁾ 고무 블록의 불안정성,⁽⁷⁾ 고무 막대를 비틀 때 꼬임현상,⁽⁸⁾ 그리고 생체조직들의 경우⁽⁹⁾를 들 수 있다. 그러나 논문들 마다 서로 다른 결과를 제시하는 경우가 있고 과연 실험적으로 관찰 가능한 현상인가가 의문시 되는 결과도 볼 수 있다. 그런데 이러한 분기현상들의 정확한 예측은 산업용

은 물론이고 의료용이나 제어용으로 개발되는 고무류의 제품의 신뢰성 및 안정성에 있어서 매우 중요해 질 수 있으며 심도 있는 연구가 필요한 실정이다. 특히 고무 재료 모델의 비선형성으로 말미암아 분기현상 자체가 재료모델에 따라 달라질 수 있다는 가능성이 제기되어 왔다. 따라서 본 논문에서는 지금까지 발표된 대표적인 고무재료 모델을 대상으로 하여 몇 가지의 분기점 해석을 실시하여 고무형상품들의 분기현상을 예측해 보고 각 모델의 상이한 점과 그 적합성을 규명하고자 한다.

2. 본 론

2.1 구성방정식

앞으로 기술되는 구성방정식은 다음과 같이 비압축성 변형조건을 적용하기로 한다.

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1 \quad (1)$$

여기서 λ_i 는 주방향별 신장 값이다. 연속체역학적 기술에서는 신장(stretch)으로 표현하거나 변형텐서의 불변양(invariant)으로 표현한다. 신장과 불변양 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + (\lambda_1\lambda_2)^{-2} \quad (2a)$$

$$I_2 = (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + (\lambda_3\lambda_1)^2 = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} \quad (2b)$$

$$I_3 = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 = 1 \quad (2c)$$

여기서 불변양은 Finger 변형텐서 또는 Cauchy-Green 변형텐서의 불변양이다.

탄성고체에 대한 후크의 법칙을 대변형에 적용할 수 있도록 확장한 것을 Neo-Hookean 모델이라고 부르는데 이는 1948년 Rivlin에 의해 제안되었다. 변형에너지는 제 1 불변양으로 표현되어 다음과 같다.

$$W_{NH} = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) \quad (3)$$

여기서 μ 는 전단계수(shear modulus)이다. Neo-Hookean 모델은 1952년 Mooney와 Rivlin의 각각 독립적인 논문에 의해 제 2 불변양을 포함하는 것으로 다음과 같이 확장되었다.

$$W_{MR} = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (4)$$

여기서 C_1 과 C_2 는 실험에 의해 결정되는 계수로서 전단계수와는 $\mu = 2(C_1 + C_2)$ 의 관계가 있다. 이 모

델은 Mooney-Rivlin 모델이라 불린다. 1972년 Ogden은 신장의 다항식으로 표현되는 다음과 같은 변형에너지를 제안하였다.⁽¹⁰⁾

$$W_{OG} = \sum_p \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (5)$$

여기서 α_p 와 μ_p 들은 실험에 의해 결정되는 계수이며 전단계수와는 $\mu = \frac{1}{2} \sum \alpha_p \mu_p$ 와 같은 관계가 있다. 만약 Ogden 모델에서 p 의 개수를 2로 하고 $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2$ 로 정한다면 이는 Mooney-Rivlin 모델이 되며 p 의 개수를 1로 하고 $\alpha_1 = 2$ 로 놓으면 Neo-Hookean 모델이 된다.

대표적인 체인분자모델에 의한 구성방정식으로 1993년에 발표된 Arruda-Boyce 모델을 들 수 있다. 이들은 8개의 체인이 단위입방체의 대각선에 걸쳐 존재한다고 보고 변형을 고려하고 변형에너지를 유도하였다.⁽¹¹⁾ 이 변형에너지 식은 I_1 의 다항식으로 변환할 수 있는데 5개의 항까지를 정리한다면 다음과 같은 식이 된다.

$$W_{AB} = \mu_0 \sum_{i=1}^5 \frac{C_i}{\lambda_m^{2i-2}} (I_1^i - 3^i) \quad (6)$$

여기서 μ_0 와 λ_m 는 실험에 의해 구해야 하는 상수이다.

1996년에 발표된 Gent 모델은⁽¹²⁾ 연속체 역학적 배경에서 제안된 매우 단순한 모델이면서도 체인분자모델과 비슷한 정도로 정확한 것으로 밝혀졌다. 특히 Gent 모델은 아주 큰 신장에서 나타나는 변형경화 즉, 신장한계를 Arruda-Boyce 모델과 마찬가지로 잘 나타내는 것으로 알려져 있다.^(13,14) 이는 변형에너지를 I_1 의 로그 값으로 표현하는 것에서 기인하는 것으로서 다음의 식으로 나타낸다.

$$W_{GE} = -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left(1 - \frac{J_1}{J_m} \right) \quad (7)$$

여기서 실험계수로서 μ 는 전단계수이고 J_m 은 I_1 이 신장한계에 이를 때 $J_1 = I_1 - 3$ 과 같은 값이다. 즉, 단순인장 실험에서는 한계신장 λ_m 과 J_m 은 $J_m = \lambda_m^2 + 2\lambda_m^{-1} - 3$ 과 같은 관계가 있다.

한편 비압축성 변형에서 전단계수와 탄성계수와는 $\mu = E/3$ 의 관계에 있다. Gent 모델은 I_2 항을 포함할 수도 있는데 보편적으로 단순형을 선호하

므로 여기서는 생략하였다.

이와 같은 구성방정식의 계수를 구하기 위해서는 실험데이터를 사용하여 회귀분석 알고리즘을 사용하게 되는데, 이 때 어떤 결과들은 모든 범위의 변형해석에 적용하는 데 있어서 안정하지 않으므로 수렴된 결과를 주지 않는다는 점을 주의하여야 한다. 특히 고차의 다항식을 사용하게 되는 Ogden 모델의 경우에는 모든 p 에 대해서 $\mu_p \alpha_p > 0$ 을 만족하는 제한된 범위에서만 안정한 것으로 알려져 있다. 반면에 Arruda-Boyce 모델과 Gent 모델은 무조건적으로 안정된 것으로 알려졌다.⁽⁵⁾

여기에서 언급한 고무류에 대한 구성방정식을 포함하여 그 외에 여러 가지 구성방정식에 대한 비교 검토는 여러 논문에서 나오고 있으며 대표적으로는 Boyce 와 Arruda의 논문을 들 수 있다.⁽⁵⁾ 여러 실험 데이터와 구성방정식에 관한 논문들을 종합하여 볼 때, 대변형의 범위와 특히 고무류의 한계신장(limiting stretch)을 나타내는 데 있어서는 Gent 모델과 Arruda-Boyce 모델이 단지 2개의 재료상수 만을 가지고도 그 회귀능력이 우수한 것으로 보인다. 그 밖에 이러한 변형경화를 나타내주는 의료 및 생체분야에 널리 쓰이는 모델에는 다음과 같은 Fung 모델이 있다.⁽¹⁵⁾

$$W_{FU} = \frac{\mu}{2b} (e^{bI_1} - 1) \quad (8)$$

Fung 모델은 비록 분명한 한계신장값은 보이지 않지만 지수함수적으로 변형경화를 나타낸다. Ogden 모델은 다양한 재료의 실험 결과를 피팅할 수 있는 자유도는 많으나 결정해야 할 재료상수의 개수가 많아지고 안정성의 문제가 있으므로 사용에 있어서 용이하지 않을 수 있다. 고무류의 구성방정식의 규명에는 확실히 많은 진보를 보이고 있다. 그러나 아직도 단축인장 실험과 이축인장 실험, 순수전단 실험 결과들을 모두 피팅할 수 있는 포괄적이면서도 정확한 구성방정식과는 어느 정도 거리가 있음은 자명해 보인다.

먼저 위에서 다루어진 모델들 간의 상호 비교를 위해 피팅 결과들을 구하고 그 거동을 서로 비교해 보기로 한다. 사용할 재료로서는 Ogden으로부터 기원하여⁽¹⁶⁾ 그 이후 분기점 해석의 여러 문헌에서 자주 등장하고 있는 재료상수를 선택하였다. 그 재료상수들은 Table 1에서 Ogden 으로 나타낸 값들이

Table 1 Rubber material constants derived from the Ogden model

Model	Ogden	Arruda-Boyce	Gent	Mooney-Rivlin	Neo-Hookean	
Constants	$\alpha_1 = 1.3$ $\alpha_2 = 5.0$ $\alpha_3 = -2.0$	$\mu_1 = 1.491$ $\mu_2 = 0.003$ $\mu_3 = -0.023$	$\mu_0 = 0.80582$ $\lambda_m = 5.40153$	$\mu = 0.83628$ $J_m = 120.705$	$C_1 = 0.42602$ $C_2 = 0.01233$	$\mu = 1.0$
Source	Reference ⁽⁶⁾	Package ⁽¹⁸⁾	least square fit eqn.(9)	Package ⁽¹⁸⁾	Reference ⁽⁶⁾	

다. 이 재료는 전단계수를 정규화한 것이므로 실제 재료의 특성은 전단계수 값을 곱해주면 된다. 반면 특정 고무재료에 대해 실험을 하고 실험데이터를 기준으로 한 재료 모델들의 비교 연구는 이미 여러 문헌에서 확인할 수 있다.⁽¹⁷⁾

Table 1에서 Arruda-Boyce와 Mooney-Rivlin 상수들은 Ogden 모델에 의한 단축인장응력, 등축인장응력 및 순수전단응력들을 생성하여 상업용 패키지⁽¹⁸⁾ 이산 데이터 형식으로 입력하고 피팅하여 결과를 얻은 것이다. Gent 모델에 대한 상수들은 다음의 예리의 정의에 의하여 최소자승법에 의해 얻은 결과이다.

$$E(\mu, J_m) = \int_a^b \left(1 - \frac{f_{uni}(\lambda, \mu, J_m)}{f_{uni}^{OG}(\lambda)}\right)^2 d\lambda + \int_a^b \left(1 - \frac{f_{bi}(\lambda, \mu, J_m)}{f_{bi}^{OG}(\lambda)}\right)^2 d\lambda + \int_a^b \left(1 - \frac{f_{sh}(\lambda, \mu, J_m)}{f_{sh}^{OG}(\lambda)}\right)^2 d\lambda \quad (9)$$

여기서 f_{uni}^{OG} 등은 공칭응력(nominal stress)으로서 Ogden 모델에 의한 단축인장 응력 값이고 f_{uni} 등은 미정 재료상수 항으로 된 Gent 모델에 의한 단축인장 응력식이다. 그리고 uni 는 단축인장을, bi 는 등축인장응력을, sh 는 순수전단 응력을 의미한다. 피팅을 위한 신장값의 범위는 모두 $\lambda=1\sim6$ 까지 사용하였다. Neo-Hookean 모델의 전단계수 값은 Ogden 모델의 전단계수 값을 사용하였다. 앞으로의 기술에서 기호 ‘OG’, ‘AB’, ‘GE’, ‘MR’ 및 ‘NH’는 각각 Ogden, Arruda-Boyce, Gent, Mooney-Rivlin, Neo-Hookean 모델을 의미한다.

Table 1과 Fig. 1의 결과에서 각 모델의 차이점을 잘 볼 수 있다. 단축인장과 등축인장 및 순수전단의 모든 경우에서 Neo-Hookean 모델은 변형경화(strain-stiffening)를 표현하지 못할 뿐만 아니라 등축인장에서는 신장이 커짐에 따라 다른 모델들과 급격한 차이를 보인다. Mooney-Rivlin 모델도 Neo-Hookean 모델과 비슷한 양상을 보이지만 독특하게도 등축인장의 경우에는 다른 모델들과 비

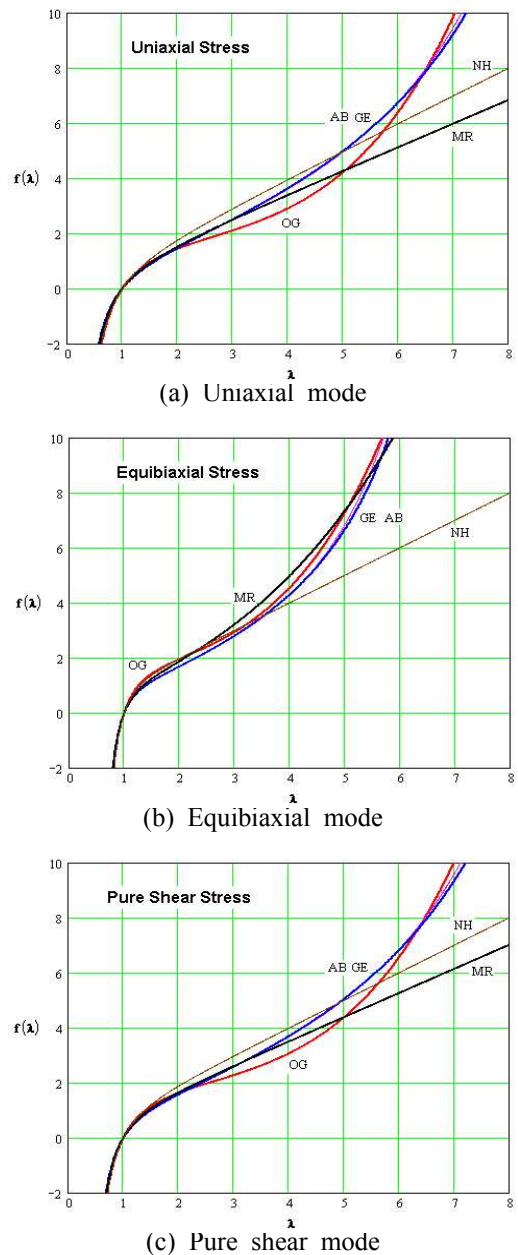


Fig. 1 Comparisons of the rubber models

슷한 정도로 변형경화를 나타내 주고 있다. 이 모델은 고무류의 해석에서 매우 오랫동안 채택되어 왔

던 모델이다. Ogden 모델은 우수한 피팅능력에도 불구하고 다른 모델에 비해 곡선의 굴곡이 심하다는 점이 드러난다. 이는 이 모델을 이용한 부품의 변형거동해석에서 그 만큼 비선형 요인이 된다는 점을 시사한다. Arruda-Boyce 모델과 Gent 모델은 모든 경우에서 그래프가 서로 붙은 것처럼 매우 근접한 결과를 주고 있다. 이는 이미 언급한 두 모델의 유사함 때문이다.

여기서 한 가지 더 언급할 것은 이 재료는 체인신장한계(chain extensibility limit)가 비교적 큰 고무류라는 점이다. 문헌에 의하면 고무류의 신장한계는 $5 \leq \lambda_m \leq 15$ 범위에 들며 생체피부, 근육, 동맥(asteries) 등 생체조직의 경우에는 $1.4 \leq \lambda_m \leq 2$ 범위라고 한다.⁽⁹⁾

따라서 신장한계가 큰 재료에 대해 나타나는 각 모델들의 차이보다는 신장한계 값이 작은 재료일수록 Arruda-Boyce 모델 또는 Gent 모델과 다른 모델들과의 차이는 매우 커짐을 유의하여야 한다. 즉, 넓은 변형영역에서 고무류와 생체조직에 널리 쓰일 수 있는 모델은 Gent 모델 또는 Arruda-Boyce 모델임을 알 수 있다.

2.2 Treloar 패치

정사각형 고무패치에 대한 이축인장 실험은 고무류의 구성방정식에 대한 Mooney-Rivlin 모델이 등장 할 무렵부터 자주 행해졌던 실험이었다. Muller 등의⁽¹⁹⁾ 문헌에 의하면 Treloar는 1947년 전형적인 이축인장 실험을 수행하였고 Mooney-Rivlin 모델과 적합함을 보였다. 그는 각 축방향의 인장력들을 같게 한 경우와 다르게 경우를 선정하여 신장값을 최대 2.48 까지 하여 실험값을 측정하고 Mooney-Rivlin 모델의 재료상수를 피팅에 의하여 구하였다. 그 후 1985년 Kearsley는 Treloar 패치가 대칭하중을 받을 때 비대칭 변형을 하는 수학적 조건식을 제안하였고 Treloar의 실험치가 그러한 사실을 보여준다고 발표하였다.⁽²⁰⁾ 즉, Treloar의 실험자료에는 같은 하중에 대해 나타나는 다른 두 개의 신장값들을 기록하였는데 이것이 Kearsley의 조건식에 의해 설명된다고 하였던 것이다. 그러나 비대칭 변형을 보이는 것은 신장값이 2.48 보다 큰 분기점 이상에서이며 원래 Treloar의 실험은 그 이하의 범위에서만 수행이 되었으므로 Treloar 실험이 Kearsley의 분기점을 보여준다고는 할 수 없었다. 따라서 Batra

등은 이러한 점을 간과하고 분기점 이후 까지를 실험하는 논문을 발표하였고 부가적으로 불안정 평형상태에 대한 열역학적인 설명을 덧붙였다.⁽²¹⁾ 따라서 본 논문에서는 Batra 등의 논문에서 언급된 실험자료를 여러 가지 재료모델들에 대해 적용해 보고 그 결과를 고찰해 보기로 한다. 사용된 Treloar 패치는 5cm×5cm 크기에 두께는 0.04cm이며 Mooney-Rivlin 재료상수는 Table 2와 같다. 다른 모델들의 재료 상수들은 전에 설명된 방법으로 얻었다.

이축인장을 받는 초탄성재료에 대한 변형에너지 식 W 로부터 공칭응력(nominal stress) f_α 및 Cauchy 응력 σ_α 를 얻는 식은 다음과 같다.

$$f_\alpha = \frac{\partial W}{\partial \lambda_\alpha}; \quad \sigma_\alpha = \lambda_\alpha \frac{\partial W}{\partial \lambda_\alpha}; \quad \alpha = 1, 2 \quad (10a,b)$$

식 (4)의 변형에너지 식과 불변양 식 (2) 및 식 (1)에서 이축인장에 대하여 $\lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}$ 을 대입하고 Cauchy 응력을 유도하면 다음과 같다.

$$\sigma_1 = 2(\lambda_1^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2})(C_1 + \lambda_2^2 C_2) \quad (11a)$$

$$\sigma_2 = 2(\lambda_2^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2})(C_1 + \lambda_1^2 C_2) \quad (11b)$$

이 식으로부터 공칭응력을 구하고 다음과 같은 하중의 대칭 조건을 대입하면,

$$f_1 - f_2 = 0 \quad (12)$$

아래의 Kearsley 조건식을 얻는다.

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \{C_1(1 + \lambda_1^2 \lambda_2^2) + C_2(\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^4 \lambda_2^4)\} = 0 \quad (13)$$

식 (13)은 Fig. 2(a)의 가는 선과 같이 두 가지의 해를 주는데 그 하나는 $\lambda_1 = \lambda_2$ 로서 대칭변형을 의미하고 다른 하나는 중괄호에 해당하는 비대칭 변형 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 을 의미한다. 그리고 그 분기점은 $\lambda_{cr} = 3.106$ 에서 형성되며 분기점의 공칭응력은 $f_{cr} = 115.5 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-2}$, 작용하중은 23.1 N 이다. 여기서 비대칭변형의 의미는 비록 대칭하중($\zeta = 1$)이 작용하더라도 분기점 이상의 하중에서는 대칭모드 뿐만이 아니라 비대칭모드가 존재함을 말해준다. 식 (13)의 해를 이용하여 (11a) 및 (10a)에 대입하면 각 방향으로 신장-응력의 그래프를 그릴 수 있는데 Fig. 2(b)의 가는 선과 같다. 초기 상태로 부터 하중을 작용시키면 대칭모드의 변형을 보이다가 분기점에서는 추가적인 하중 증가에 대해 3개의 경로로 분기가

Table 2 Rubber material constants derived from the Mooney-Rivlin model

Model	Ogden	Arruda-Boyce	Gent	Mooney-Rivlin	Neo-Hookean	
Constants	$\alpha_1 = 2.0$ $\alpha_2 = 4.0$ $\alpha_3 = -2.0$	$\mu_1 = 18.58$ $\mu_2 = 6.21 \times 10^{-6}$ $\mu_3 = 1.935$	$\mu_0 = 19.2167$ $\lambda_m = 5.54117$	$\mu = 20.515$ $J_m = 188$	$C_1 = 9.29$ $C_2 = 0.968$	$\mu = 20.515$
Source	Package ¹⁸⁾	Package ¹⁸⁾	least square fit eqn.(9)	Reference ²¹⁾	Reference ²¹⁾	

뒀을 보여준다. 어떤 경로로 변형이 일어날 것인가에 대한 물리적인 의미는 Muller and Strehlow에 의하여 열역학적으로 설명되었다.⁽¹⁹⁾ 이것의 더 직관적인 의미로는 미소 변위 증가에 대해서 대칭모드보다 비대칭모드가 더 하중증가가 적어 결국 에너지가 적게 소요됨을 말해준다.

하중이 비대칭으로 작용하는 경우에도 동일한 절차를 거쳐 변형을 구할 수 있다. 만약 하중 즉, 공칭응력이 $f_2 = \zeta f_1$ 와 같이 다르고, 여기서 $\zeta < 1$ 로서 비대칭을 조절하는 계수라고 하면 식 (12) 및 다음의 식에 의하면

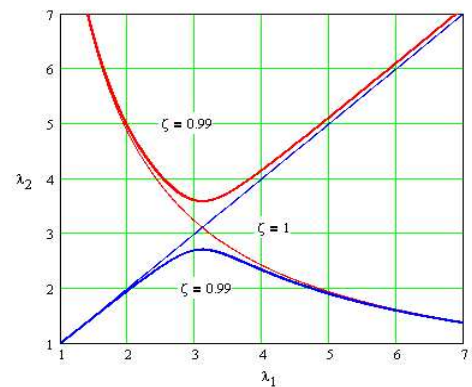
$$\zeta f_1 - f_2 = 0 \tag{14}$$

식 (13)과 같은 식은 다음과 같이 구해진다.

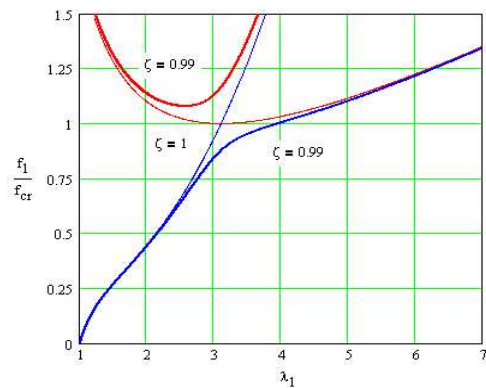
$$\begin{aligned} \lambda_1^5 - \zeta(\lambda_2 + \frac{K}{\lambda_2})\lambda_1^4 - (\frac{1}{\lambda_2^3} - K)\lambda_1^3 \\ - \frac{K}{\lambda_2^4}\lambda_1 + \zeta(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{K}{\lambda_2^3}) = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

여기서 계수는 $K = C_1/C_2$ 로서 Table 2의 재료에 대해서는 $K = 9.602$ 이다. 이 식에 대한 수치적 해를 $\zeta = 0.99$ 를 대입하여 구하면 Fig. 2(a~b)의 굵은 선과 같다. 그림에서 대칭하중에서 존재했던 분기점은 사라지고 Fig. 2(b)의 굵은 선에서 보는 바와 부드러운 비선형 곡선으로 바뀐 것을 알 수 있다. 그렇지만 비대칭하중에서도 분기점 근처를 지나면서 변형이 커지는 일종의 변형연화(strain softening) 현상처럼 거동함을 알 수 있다.

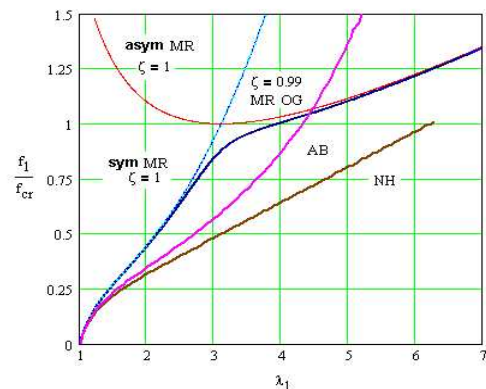
한편, Mooney-Rivlin 모델뿐만이 아니라 다른 모델들에 의한 거동을 알아보기 위하여 Treloar 패치를 유한요소로 모델링하여 분석하였다. 해석 툴로서는 패키지를⁽¹⁸⁾ 사용하였고 메시는 Treloar 패치의 1/4만을 평면응력요소로 5×5로 세분화하였다. 재료상수들은 Table 2를 사용하였으며 모든 재료모델들에 대해 해석 결과를 구하였고 Fig. 2(c)



(a) Stretch-stretch curve(MR)



(b) Stretch-stress curve(MR)



(c) Various models

Fig. 2 Behavior of the Treloar's patch for the symmetric (Kearsley's bifurcation) and non-symmetric loads

에 나타내었다. 먼저 Mooney-Rivlin 모델에 대해서는 대칭하중의 경우 대칭변형 결과를 얻었으며 해석 도중 분기점을 지나면서 강성행렬의 고유값의 부호가 변하는 것이 확인되었다. 이 결과는 Fig. 2(c)의 “sym MR”로 표시하였으며 이론값 즉, Fig. 2(b)의 가는 선과 정확히 일치하였다. 그러나 해석 틀의 특성상 분기점 이후의 비대칭변형에 대한 결과는 얻을 수 없다.

Fig. 2(c)에서 Mooney-Rivlin 모델과 Ogden 모델의 결과가 일치하고 있는데 그 이유는 Table 2에서 Ogden 상수들이 $\alpha_1=2$, $\alpha_2=-2$ 로서 Mooney-Rivlin 모델과 동일하기 때문이다. 그러나 Arruda-Boyce 모델과 Neo-Hookean 모델의 결과는 대칭하중에 대한 해석결과에서 강성행렬의 고유값의 부호가 변하지 않았으며 비대칭하중에 대한 결과도 Fig. 2(c)와 같이 나타났는데 Mooney-Rivlin 과 Ogden 모델에서처럼 변형연화 현상이 나타나지도 않았다.

그 이유를 이론적으로 알아보기 위해 Arruda-Boyce 모델과 유사한 거동을 보이는 Gent 모델 식 (7)을 식 (10)~(12)에 차례로 대입하고 Kearsley 조건식을 유도해 보면 다음과 같다.

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 \lambda_2 + 1)(\lambda_1^2 \lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + 1) = 0 \quad (16)$$

여기서 첫 번째 괄호는 대칭모드에 대한 해이며 두 번째 괄호는 이축인장이 아니므로 물리적 의미가 없다. 그리고 셋째 괄호에서 분기점이 있다면 다음 식이 된다.

$$\lambda^4 - \lambda^2 + 1 = 0 \quad (17)$$

그런데 이 식은 인장에 대해서 $\lambda=0$ 을 제외하고는 그 해가 존재하지 않는다. 그러므로 Gent 모델에 대해서는 분기점이 존재하지 않는다고 말할 수 있다.

비슷한 유도과정을 거친다면 Arruda-Boyce 모델과 Neo-Hookean 모델도 마찬가지로 할 수 있으며 이러한 현상은 Fig. 2(c)의 유한요소해석 결과에서 드러난 것이다. 즉, Mooney-Rivlin 모델과 Ogden 모델로는 Kearsley 분기점을 나타내 줄 수 있지만 다른 모델은 그 분기점을 나타내 줄 수 없다고 할 수 있다. 그렇다면 재료시험 데이터를 피팅하는 데 있어서 더 광범위하게 적합하다고 인정되는 Gent 모델과 Arruda-Boyce 모델이 왜 분기점 현상을 표현할 수 없는가? 이에 대한 분석을 위해 Kearsley 조건식 (13)의 비대칭변형 해의 분기점을 다음과 같이 고쳐 써 본다.

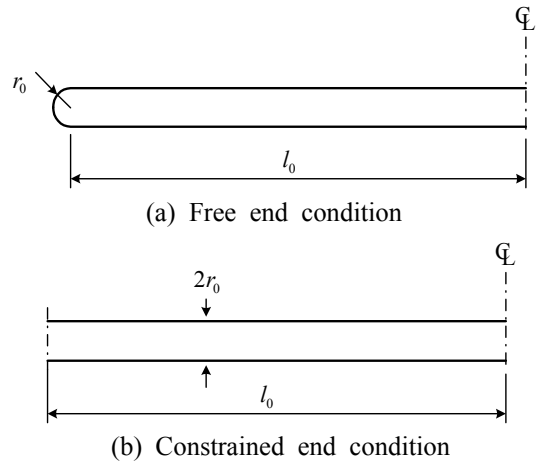


Fig. 3 Balloon stick's geometries and end conditions

$$(1 + \lambda^6) + \frac{1}{K}(3 - \lambda^6)\lambda^2 = 0 \quad (18)$$

그리고 식 (18)의 해를 고찰해 본다. 즉, C_2 값이 C_1 값보다 매우 작아지는 경우 분기점 λ_c 은 급격이 증가하는 반면, C_2 값이 C_1 값보다 매우 커지는 경우 분기점은 $\lambda_c \rightarrow \sqrt[6]{3}$ 으로 점근함을 보여준다. 그리고 식 (4)로부터 $C_1 = \partial W / \partial I_1$ 및 $C_2 = \partial W / \partial I_2$ 임을 감안한다면 변형에너지 포텐셜에서 I_1 및 I_2 의 연관성이라고 보아야 할 것이다. 따라서 I_2 항을 포함하고 있지 않은 Neo-Hookean 모델, Gent 모델과 Arruda-Boyce 모델은 Treloar 패치에서 분기점 현상을 보이지 않는다고 판단된다.

2.3 원통형 막대풍선

원통형 막대풍선에 대한 부풀림 및 분기점 해석은 Haughton⁽²²⁾ 및 Gent⁽¹²⁾ 의해 발표되었다. 물론 이들은 재료모델을 각각 Ogden 모델 및 Gent 모델을 사용하여 해석적인 방법으로 서로 다른 경계조건에 대해 구하였기 때문에 결과를 직접 비교할 수는 없다. 여기서는 Fig. 3과 같이 두 가지의 경계조건에 대해서 서로를 비교해 보고 분석하고자 한다. Fig. 3(a)는 Gent가 사용한 경계조건과 같고, Fig. 3(b)는 Haughton이 사용한 경계조건 중에서 축방향 신장이 없는 것과 동일하다.

먼저, 내압에 의한 원통의 변형에서는 신장은 다음과 같이 형상치수 반지름 r , 길이 l , 두께 h 에 의해 정의된다.

$$\lambda_1 = \frac{r}{r_0} \quad \lambda_2 = \frac{l}{l_0} \quad \lambda_3 = \frac{h}{h_0} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (19a,b,c)$$

여기서 변형 전의 형상치수는 $r_0 = 1$, $h_0 = 0.04$, $l_0 = 25$ 이다. 원주방향과 축방향의 평형조건으로부터 Cauchy stress는 원통 보일러 공식으로 알려진 다음 식으로 구해진다.

$$\sigma_1 = \frac{pr}{h} \quad \sigma_2 = \frac{pr}{2h} \quad (20a,b)$$

여기서 p 는 작용되고 있는 내압이다. 식 (20)의 응력은 변형에너지로부터 식 (10b)에 의해 얻어지고 Mooney-Rivlin 모델의 경우 식 (11)와 같다. 한편 Gent 모델의 경우에는 식 (7)을 이용하여 식 (10b)에 대입하고 다음과 같이 얻어진다.

$$\sigma_1 = \mu(\lambda_1^2 - (\lambda_1\lambda_2)^{-2})(1 - J_1/J_m)^{-1} \quad (21a)$$

$$\sigma_2 = \mu(\lambda_2^2 - (\lambda_1\lambda_2)^{-2})(1 - J_1/J_m)^{-1} \quad (21b)$$

이러한 응력은 식 (20)으로부터 평형방정식으로 서 다음과 같은 관계에 있다.

$$\sigma_1 - 2\sigma_2 = 0 \quad (22)$$

따라서 식 (11) 및 식 (21)를 식 (22)에 대입한 다면 $\lambda_1 = \lambda_1(\lambda_2)$ 또는 $\lambda_2 = \lambda_2(\lambda_1)$ 의 관계식을 얻을 수 있다. Mooney-Rivlin 모델에서 식 (22)은 다음과 같이 정리되며,

$$(1 + \lambda_1^4\lambda_2^2 - 2\lambda_1^2\lambda_2^4)K + 2\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_1^4\lambda_2^4 = 0 \quad (23)$$

Gent 모델에 대해서는 다음 식이 된다.

$$1 + \lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2) = 0 \quad (24)$$

그러므로 식 (23)과 (24)로부터 각각 다음을 얻는다.

$$\lambda_2^2 = \frac{1}{2} \frac{K\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2}}{2K + \lambda_1^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{K\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2}}{2K + \lambda_1^2}\right)^2 + \frac{K\lambda_1^{-2} + 2}{2K + \lambda_1^2}} \quad (25)$$

$$\lambda_2^2 = \frac{1}{4} (\lambda_1^2 + \sqrt{\lambda_1^4 + 8\lambda_1^{-2}}) \quad (26)$$

이제 식 (25) 및 (26)을 식 (11) 및 (21)에 넣고 식 (20)을 적용하면 다음과 같이 내압과 변형의 관계식을 얻는다.

$$\sigma_1 = 2(\lambda_1^2 - (\lambda_1\lambda_2)^{-2})(C_1 + C_2\lambda_2^2) \quad (27)$$

$$\sigma_1 = \mu(\lambda_1^2 - (\lambda_1\lambda_2)^{-2})(1 - J_1/J_m)^{-1} \quad (28)$$

이들을 무차원 내압하중 $\phi = pr_0/2\mu h_0$ 를 도입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\phi_{MR} = \frac{1}{\mu} (\lambda_2^{-1} - \lambda_1^{-4}\lambda_2^{-3})(C_1 + C_2\lambda_2^2) \quad (29)$$

$$\phi_{GE} = \frac{1}{2} (\lambda_2^{-1} - \lambda_1^{-4}\lambda_2^{-3})(1 - J_1/J_m)^{-1} \quad (30)$$

여기서 $J_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^{-4}\lambda_2^{-2} - 3$ 을 의미한다. 동일한 절차를 통하여 축신장을 구속하면 $\lambda_2 = 1$ 로, $J_1 = \lambda_1^2 + \lambda_1^{-2} - 2$ 로 대입하여 다음과 같이 간략히 정리된다.

$$\phi_{MR} = \frac{1}{2} (1 - \lambda_1^{-4}) \quad (31)$$

$$\phi_{GE} = \frac{1}{2} (1 - \lambda_1^{-4})(1 - J_1/J_m)^{-1} \quad (32)$$

식 (29)~(30) 결과를 Fig. 4(a)에, 그리고 식 (31)~(32)의 결과를 Fig. 4(b)에 나타내었다. Fig. 4(a)에서는 Neo-Hookean 모델에 대한 결과와 Gent 논문의 결과도⁽⁸⁾ 함께 수록하였는데 Neo-Hookean 모델은 식 (29)에서 $C_1 = \mu/2$, $C_2 = 0$ 로 대입하므로서 얻었다. Fig. 4(a)에서 Gent 모델에 대해서는 식 (30)을 실선으로, Gent 논문의 결과는 원 마크로 표시하였는데 정확히 일치하고 있다.

Fig. 4(b)에서는 식 (31)에서 알 수 있는 바와

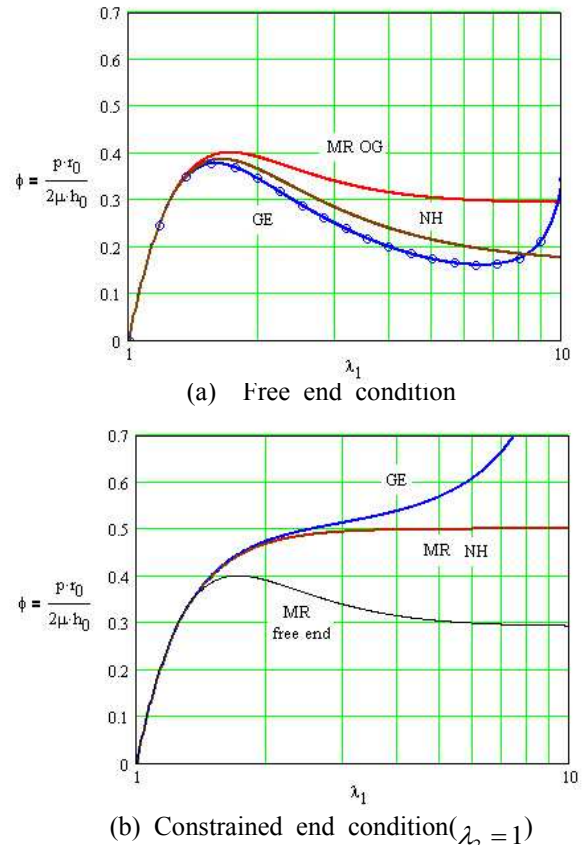


Fig. 4 Theoretical solution of hoop stretch - pressure curve for the Balloon stick (perfect)

Table 3 Balloon stick's bifurcation points (λ_{cr}, ϕ_{cr})

Model	Mooney-Rivlin Ogden	Arruda-Boyce	Neo-Hookean	max. deviation(%)
constrained end condition	(1.798, 0.452)	(1.687, 0.422)	(1.674, 0.395)	(7 %, 13 %)
free end condition	(1.23, 0.4)	(1.595, 0.361)	(1.581, 0.339)	(23 %, 15%)

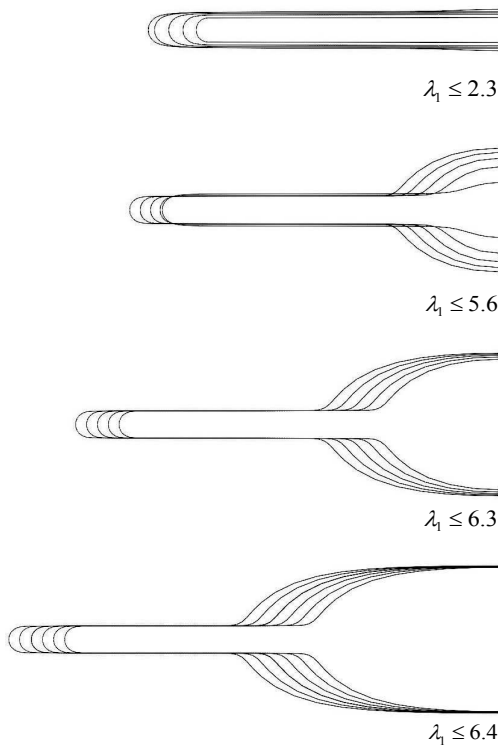
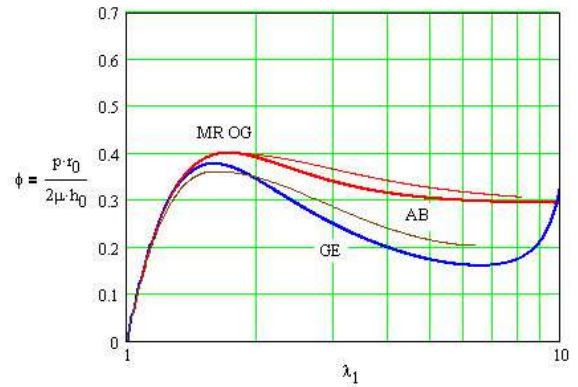


Fig. 5 Balloon stick's bifurcation and inflation(Arruda-Boyce model)

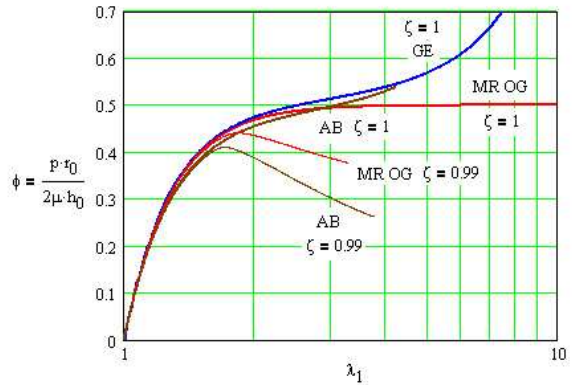
같이 Mooney-Rivlin과 Neo-Hookean 결과가 동일하다. 여기서 축 신장을 구속하는 경계조건에서는 축신장을 허용하는 Fig. 4(a)와 같은 하중 극한점이 나타나지 않음을 알 수 있다. 이는 실제로는 관찰하기 힘든 것으로서 지금 다루는 풍선의 형상과 재질은 편차가 전혀 없는 수학적으로 이상적인 것이기 때문이다. 여러 다른 축신장 조건에 대한 결과는 Haughton의 논문⁽²²⁾에 제시되었고 이는 식 (29)~(30)에 일정한 값의 ζ 를 대입하므로써 얻을 수도 있다.

한편, Fig. 3의 형상과 Table 2의 재료를 사용하여 유한요소 모델링하여 결과를 구하여 이론해와 함께 Fig. 6에 나타내었다.

Fig. 6(a)에서 축신장 허용조건인 Mooney-Rivlin



(a) Free end condition



(b) Constrained end condition($\lambda_2 = 1$)

Fig. 6 Numerical solution of hoop stretch - pressure curve for the Balloon stick (imperfect)

모델과 Arruda-Boyce모델에 대한 거동을 유한요소 해석 결과는 가는 실선으로, 이론해의 식 (29)~(32)은 굵은 실선으로 표시하였다. Mooney-Rivlin모델의 경우 굵은 선의 이론해로부터 가는 선의 수치해로 이론해의 극한점 부근에서 분기됨을 알 수 있다. 이러한 분기현상은 Arruda-Boyce 모델에 대한 수치해의 결과를 나타낸 Fig. 5를 보면 분명히 알 수 있다. 이는 우리가 일상에서 막대풍선을 불 때, 부풀려지지 않다가 어떤 순간엔 갑자기 한 부분에서 부풀어 오르기 시작하여 그 부풀림이 축방향으로 진행되는 것과 정확히 일치한다.

축신장 구속조건의 Fig. 3(b)는 보는 바와 같이 완벽한 형상이므로 정확한 기하학적 모델과 두께를 가지고 모델링할 경우 수치해석 결과는 Fig. 4(b)와 같고 분기점을 보이지 않는다. 그러나 강성행렬의 고유값을 관찰해 보면 하중이 최대값에 도달하기 전에 음의 고유값이 나타남을 알 수 있었다. 따라서 분기점을 갖는다고 말할 수 있다. 유한요소해석을 통하여 분기현상을 보기 위해서는 모델의 완벽성을 깨뜨리는 방법을 써야 한다. 여기서는 풍선의 두께의 변화를 주는 방법을 쓰기로 한다. 좌우 대칭면에서의 두께를 끝부분에서의 두께의 0.99로 하고 그 사이는 선형분포시켰다. 이제 그 결과는 Fig. 6(b)의 가는 선으로 표시하였다. 분기 전과 분기 후의 거동을 확인할 수 있다. 여기서 각 모델에 대한 분기점은 내압하중과 후프신장 값으로 Table 3에 수록하였다. 특히 Mooney-Rivlin모델과 Ogden모델은 정확히 같으므로 같은 결과를 주며, 축신장 허용의 모델은 Fig. 3(a)를 메쉬화 하는 과정에서 닫힌 끝부분의 직선 메쉬화로 인하여 필연적으로 완벽성이 깨어지며 따라서 Fig. 6(a)의 가는 실선과 같은 결과를 보이는 것이다. 사용된 유한요소는 풍선의 부풀림이 축대칭이며 고무풍선이 굽힘강성을 갖지 않는 점을 감안하여 선형 축대칭 막요소를 사용했으며 축방향으로 50개의 요소를, 단합 캡 부분으로는 18개의 요소를 사용하였다.

이상의 결과 및 분석에서 알 수 있는 것은 원통형 막대풍선의 부풀림에 있어서 이론적으로 완벽한 형상 및 재료에 대해서는 분기점을 지나서도 계속 원통형을 유지하는 부풀림 거동을 보이지만, 실제로는 기하학적으로 또는 재료의 초기 두께 및 물성의 편차로 인하여 완벽할 수 없으므로 분기점에서 다른 경로로 분기하게 된다는 점이다. 따라서 실제에서 경험하는 바와 같이 막대풍선은 항상 어떤 부위에서부터 일정 직경이 될 때 까지 부풀어 오르고 그 이후에는 길이방향으로 부풀린다는 것이다. 그리고 이러한 거동은 여기서 다루고 있는 모든 구성방정식에서 동일하게 나타나고 있었다. 즉, 모든 구성방정식이 분기점을 보이고 있다. 단지 Table 3에 수록한 분기점에서의 내압하중 및 후프신장은 그 크기에 있어서 각각 최대 23% 및 15% 정도의 차이를 보이고 있으므로 정확한 분기점의 예측을 위해서는 구성방정식의 선택이 큰 영향을 미친다고 볼 수 있다.

3. 결 론

생활용, 산업용, 의료용, 제어용 등으로 다양하게 개발되어 사용되고 있는 탄성중합체와 폴리머들의 응용성에 비하면 그 거동의 규명과 특이성들의 규명에는 아직도 여전히 모호한 부분이 있음을 문헌조사를 통해 조명해 보았다. 대표적인 재료의 구성방정식으로서 연속체역학적 모델 중에서 Mooney-Rivlin모델과 Ogden모델을 선정하였고, 체인분자역학적 모델중에서 Arruda-Boyce모델과 이와 밀접한 연관성이 있는 단순모델인 Gent 모델을 선정하여 서로 비교하였다. 이들 연속체역학적 모델은 변형의 제 1, 2 불변양의 함수로 되어있으며 체인분자역학적 모델은 고전모델인 Neo-Hookean모델과 같이 제 1 불변양의 함수로만 되어있다. 전형적인 고무재료에 대하여 각각의 구성방정식들을 단축인장, 이축인장, 순수전단 결과를 비교하여 피팅능력을 보았다. 이 중에서 Neo-Hookean모델과 Mooney-Rivlin모델은 고무가 크게 늘어날 때 나타나는 변형경화 현상을 표현하지 못하며 Ogden모델은 변형경화를 표현하지만 굴곡이 심하게 피팅이 됨을 알 수 있었다. 따라서 상대적으로 한계신장 값이 낮은 생체조직에 대해서는 체인분자역학적모델 및 Ogden모델의 피팅이 적절하다고 판단된다.

고무류는 실험 및 관찰에 의하면 재료의 비선형성 뿐만이 아니라 다양한 하중 및 경계조건에서 분기현상들을 보이는 특징이 있다. 재료의 구성방정식들에 대한 분기현상의 거동예측은 더욱더 복잡하며 다양한 결과가 예상되는데, 여기서는 Treloar 패치와 원통형 막대풍선의 예를 들어 비교분석하였다. 원통형 막대풍선의 경우 모든 구성방정식이 비록 분기점 값의 차이는 있었지만 실험 및 관측과 동일한 부풀림과 분기거동을 보여 주었다.

그러나 정방형평면판 인 Treloar 패치의 분기점 거동에 있어서는 그 결과가 매우 상이하였다. Mooney-Rivlin모델과 Ogden모델에서는 분명한 분기점이 존재하였지만 neo-Hookean모델, Arruda-Boyce모델 및 Gent모델에서는 분기점이 존재하지 않았다. 이는 Mooney-Rivlin모델과 Gent모델에 대해서는 이론적으로, 그 밖의 모델에 대해서는 유한요소해석 패키지를 통해서 수치적으로 확인되었다. 따라서 이러한 경우 적합한 구성방정식

의 선정이 매우 중요해 짐을 알 수 있다.

그러므로 고무류에 대한 분기점해석에 있어서는 재료모델의 선택에 매우 신중을 기해야 한다. 어떤 재료모델은 분기점이 생기고 어떤 재료모델은 안 생기게 되는 것이다. 고무류의 분기현상과 재료의 구성방정식간의 관계는 이론적으로나 실험적으로 더 상세하게 연구가 되어져야 할 것이다.

후 기

이 논문은 2008년도 한남대학교 학술연구조성비 지원에 의하여 연구되었습니다.

참고문헌

- (1) Treloar, L. R. G., 1975, *The Physics of Rubber Elasticity*, Oxford University Press.
- (2) Xu, H., Cheng, Z. -Y., Olsen, D., Mai, T., Zang, Q. M. and Kavamos, G., 2001, "Ferroelectric and Electromechanical Properties of Poly (Vinylidene - Fluoride - Trifluoroethylene - Chlorotrifluoroethylene) Terpolymer," *Appl. Phys. Lett.* 78, pp. 2360~2362.
- (3) Pelrine, R. E., Kornblush, R. D. and Joseph, J. P., 1998, "Electrostriction of Polymer Dielectrics with Compliant Electrodes as a Means of Actuation," *Sensors and Actuators*, A64, pp. 77~85.
- (4) Von Meyer, K. H., von Susich, G. and Valko, E., 1932, "Die Elastischen Eigenschaften der Organischen Hochpolymeren und Ihre Kinetische Deutung," *Kolloid Zeitschrift (Colloid & Polymer Science)*, 59, pp. 208~216.
- (5) Boyce, M. C. and Arruda, E. M., 2000, "Constitutive Models of Rubber Elasticity: A Review," *Rubber Chemistry and Technology*, 73, pp. 504~523.
- (6) Haughton, D. M., 1980, "Post-Bifurcation of Perfect and Imperfect Spherical Elastic Membranes," *International Journal of Solids and Structures*, 16, pp. 1123~1133.
- (7) Destrade, M., Annaihd, A. N. and Coman, C. D., 2009, "Bending Instabilities of Soft Biological Tissues," *International Journal of Solids and Structures*, 46, pp. 4322~4330.
- (8) Gent, A. N., 2005, "Elastic Instabilities in Rubber," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40, pp. 156~175.
- (9) Goriely, A., Destrade, M., Ben Amar, M. 2006, "Instabilities in Elastomers and in Soft Tissues," *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 59, pp. 615~630.
- (10) Ogden, R. W., 1972, "Large Deformation Isotropic Elasticity - on the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids," *Proceedings of Royal Society of London*, A326, pp. 565~584.
- (11) Arruda, E. M. and Boyce, M. C., 1993, "A Three-Dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41, pp. 389~412.
- (12) Gent, A. N., 1996, "A New Constitutive Relation for Rubber," *Rubber Chemistry Technology*, 69, pp. 59~61.
- (13) Boyce, M. C., 1996, "Direct Comparison of the Gent and the Arrudaboyce Constitutive Models of Rubber Elasticity," *Rubber Chemistry and Technology*, 69, pp. 781~785.
- (14) Horgan, C. O. and Giuseppe Saccomandi, 2002, "A Molecular-Statistical Basis for the Gent Constitutive Model of Rubber Elasticity," *Journal of Elasticity*, 68, pp. 167~176.
- (15) Fung, Y.C., 1993, *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissue*, 2nd edn, Springer-Verlag, New York.
- (16) Ogden, R. W., 1984, *Non-Linear Elastic Deformations*, Ellis Horwood Ltd.
- (17) Wan-doo Kim, Wan-soo Kim, Dong-jin Kim, Chang-soo Woo, Hak-joo Lee, 2004, "Mechanical Testing and Nonlinear Material Properties for Finite Element Analysis of Rubber Components," *Trans. of the KSME (B)*, 28, pp. 848~859.
- (18) Abaqus, General purpose FEA package, Abaqus Inc.
- (19) Muller, I. and Strehlow, P., 2004, *Rubber and Rubber Balloons: Paradigms of Thermodynamics*, Springer.
- (20) Kearsley, E. A., 1985, "Asymmetric Stretching of a Symmetrically Loaded Elastic Sheet," *International*

- Journal of Solids and Structures*, 22, pp. 111~119.
- (21) Batra, R. C., Muller, I. and Strehlow, P., 2005, "Treloar's Biaxial Tests and Kearsley'S Bifurcation in Rubber Sheets," *Mathematics and Mechanics of Solids*, 10, pp. 705~713.
- (22) Haughton D. M. and Ogden, R. W., 1979, "Bifurcation of Inflated Circular Cylinders of Elastic Material Under Axial Loading - I. Membrane Theory for Thin-Walled Tubes," *Journal of Mechanics Physics of Solids*, 27, pp. 179~212.