이산시간 지연 불확실 특이시스템의 지연 종속 및 변수 종속 강인 안정성

논 문
59-4-19

Delay-dependent and Parameter-dependent Robust Stability for Discrete-time Delayed Uncertain Singular Systems

김 종 해*
(Jong-Hae Kim)

Abstract – The problem of delay-dependent and parameter-dependent robust stability condition for discrete-time uncertain singular systems with polytopic uncertainty and interval time-varying delay is considered. A new robust stability condition based on parameter-dependent Lyapunov function is derived in terms of LMI (linear matrix inequality). Moreover, the proposed robust stability condition is a general condition for both singular and non-singular systems. A numerical example is presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key Words : Robust stability, Singular systems, Delay-dependence, Parameter-dependence, LMI

1. 서 론

상태공간 모델(state-space model)은 매우 유용하지만 상태 변수가 모든 물리적 의미를 포함하지는 못한다. 따라서, 특이 현상은 선형 동적시스템(dynamical systems)의 자연스러운 형태이고, 물리적 변수들 사이에 존재하는 대수 제약조건을 표현하는 이론적인 면이나 실용적인 면의 관점에서 동적 시스템의 중요한 종류중의 하나이다. 또한, 기존의 상태공간 모델을 가지고는 해결하기 어려운 특이시스템(singular systems)에 대한 해석과 설계방법은 특이시스템의 특별한 성질로 인하여 전기회로, 전력시스템, 대규모 시스템, 특이 섭동 이론, 제약적 기계시스템 등에 광범위하게 적용되어지기 때문에 최근 특이시스템에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 또한, 전력제어, 화학공정, 장거리 통신 등과 같은 제어시스템에서 발생하는 시간지연은 시스템의 안정성과 밀접한 관련이 있기 때문에 시간지연에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 그리고, 지연종속적인 시간지연 연구방법이 지연 독립적인 방법보다 덜 보수적(less conservative)이기 때문에 시간지연을 가지는 지연종속 특이시스템에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다[1-4]. 특히, 노옴 유계(norm bounded)를 가지는 변수 불확실성이나 폴리토픽 불확실성(polytopic uncertainty)을 가진 지연 특이시스템에 대한 결과들이 나오고 있는 실정이다. 최근에는 고정된 리아푸노프(Lyapunov) 함수를 이용한 자승적 안정성(quadratic stability) 조건의 보수성을 줄이기 위하여 변수 종속의 개념이 도입되었다[5].

Xia 등[6]은 변수 종속 리아푸노프 함수를 이용하여 폴리토픽 불확실성을 가지는 상태 지연 시스템의 강인 안정성 조건을 제시하였다. 그리고, He 등[7]은 폴리토픽 불확실성을 가지는 시간 지연 시스템의 안정성을 가지는 시간지연 시스템의 안정성을 위하여 변수 종속 리아푸노프 함수를 기초로 강인 안정성 조건을 제시하였다. 하지만, 지연시스템의 보수성을 줄이고자 하는 기존 결과들은 변수 종속에 대한 기본적인 기법을 이용하는 것이다. 최근 Gao 등[8]은 기존 결과들[5-7]이 폴리토프의 다른 꼭지점에 대한 추가적인 행렬 변수가 고정되어져야 한다는 단점을 해결하는 새로운 지연 종속 및 변수 종속 강인 안정성 조건을 제시하였다. 하지만 이러한 결과들[5-8]은 연속시간 지연 시스템에 대한 결과이고 비특이시스템에 대한 결과이다. 특이시스템에 대한 수식적인 접근방법은 특이행렬의 특별한 성질로 인하여 해석이 어렵다. 또한, 구하는 조건이 볼록 최적화(convex optimization)가 가능한 선형행렬부등식으로 조건을 구하는 경우에는 특이행렬의 성질로 인하여 수식적인 전개가 더욱 어려워진다. 따라서 시변 시간지연을 가지는 이산시간 불확실성 특이시스템에 대한 지연 종속 및 변수 종속 강인 안정성 조건에 대한 결과는 없는 실정이다. 본 논문에서는 Gao 등[8]이 제시한 연속시간 비특이시스템의 결과를 이산시간 비특이시스템에 대한 강인 안정성 조건을 포함하는 이산시간 특이시스템의 새로운 강인 안정성 조건으로 확장하고자 한다. 또한, 최근 Zhang 등[9]은 불확실 이산시간 시스템에 대한 변수 종속 강인 H_∞ 필터링 기법을 제시하였다. Zhang 등[9]이 제시하는 정리를 이용하여 무한 차원의 행렬 부등식을 유한 차원의 선형행렬부등식으로 변형하여 구간 시변 시간지연을 가지는 이산시간 불확실 특이시스템에 대한 지연 종속 및 변수 종속 강인 안정성 조건을 제안하고자 한다.

본 논문에서는 하한 값(lower bound)과 상한 값(upper bound)을 가지는 구간 시변 시간지연과 폴리토픽 불확실성을 가지는 변수 종속 이산시간 특이시스템에 대하여 변수 종속 및 지연 종속 강인 안정성 조건을 선형행렬부등식 방법으로 제시한다. 먼저 기존의 고정 리아푸노프 함수를 이

* 정 회 원 : 선문대학교 전자공학과 부교수・공박
E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr
접수일자 : 2009년 12월 28일
최종완료 : 2010년 2월 16일

용하므로 발생하는 보수성을 줄이기 위하여 새로운 변수 종속 리아푸노프 함수를 이용하여 주어진 특이시스템에 대한 강인 안정성 조건을 구한다. 그리고 모든 변수의 견지에서 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식으로 변형하여 이산시간 불확실성 특이시스템에 대한 강인 안정성 조건을 제시한다. 마지막으로 제안하는 강인 안정성 조건이 비특이시스템과 특이시스템에 모두 적용가능한 일반적인 조건임을 보이기 위하여 예제를 다룬다.

본 논문에서 사용하는 표기는 일반적인 기호를 사용한다. I, 0과 R^r은 적절한 차원을 가지는 단위행렬, 영행렬과 $r\times 1$ 차원을 가지는 실수 벡터를 각각 의미한다. $*$는 대칭행렬(symmetric matrix)의 주 대각선 아래에 놓이는 요소이고, $diag\{\bullet\}$는 블록 대각(block diagonal) 행렬을 의미한다.

2. 문제설정

폴리토픽 변수 불확실성과 구간 시변 시간지연을 가지는 이산시간 변수 종속 불확실성 특이시스템

$$\begin{aligned} E(\theta)x(k+1) &= A(\theta)x(k)+B(\theta)x(k-d(k)) \\ x(k) &= \phi(k),\quad k=-\bar{d},-\bar{d}+1,\cdots,0 \end{aligned} \tag{1}$$

을 다룬다. 여기서, $x(k)\in R^n$는 상태변수, $\phi(k)$는 초기함수, $E(\theta)$는 $rank(E(\theta))=r\le n$을 만족하는 특이행렬(singular matrix)이다. 제어하고자 하는 시스템을 상태공간으로 모델링(modeling)하다 보면 시스템 행렬의 차원(dimensions)보다 작은 특이행렬을 가지는 시스템의 상태공간이 얻어질 수 있다. 이러한 시스템을 특이시스템이라고 정의한다. 이러한 특이행렬의 차원 문제로 인하여 기존의 해석과 설계를 변수 종속 특이시스템에 적용하는 것은 어렵다. 따라서 특이시스템에 대한 강인안정성 조건을 제시하는 것은 변수 종속 특이시스템을 해석하는데 중요하며 본 논문에서 다루고자 하는 목적이다. 식 (1)과 같은 변수 종속 특이시스템의 해석을 위하여 모든 시스템 행렬은 정확히 모르지만 폴리토프형의 알고 있는 볼록 컴팩트(convex polytope) 집합에 속하는

$$T(\theta)=(E(\theta),\ A(\theta),\ B(\theta))\in\Delta \tag{2}$$

와 같이 가정하고, 여기서 Δ는

$$\Delta=\left\{T(\theta): T(\theta)=\sum_{i=1}^{N}\theta_i T_i,\ \sum_{i=1}^{N}\theta_i=1,\ \theta_i\ge 0\right\} \tag{3}$$

이고, $T_i=(E_i,A_i,B_i)$, $(i=1,2,\cdots,N)$는 T_i는 다면 정의역(polyhedral domain) $T(\theta)$의 i번째 꼭지점(vertex)을 표시한다. 구간을 가지는 시변 시간지연항은

$$0\le \underline{d}\le d(k)\le \bar{d} \tag{4}$$

를 만족하고 $\underline{d}$와 $\bar{d}$는 정수이다. 여기서, $\underline{d}$는 시간지연의 하한 값이고 $\bar{d}$는 시간지연의 상한 값이 된다. 그리고 $\underline{d}=\bar{d}$이면 $d(k)$는 시불변 시간지연항이 된다. 본 논문의 목적은 변수 불확실성 (2)와 구간 시변 시간지연 (4)를 가지는 이산시간 불확실 변수 종속 특이시스템 (1)에 대하여 강인 안정성 조건을 제시하는 것이다. 논문의 전개를 위하여 몇 가지 변수를 정의하고 강인 안정성 조건을 구하는데 필요한 보조정리 1을 제시한다. 논문의 전개를 위하여 $\xi(k)=\left[x(k)^T x(k-d(k))^T\right]^T$로 두면

$$\begin{aligned} E(\theta)x(k+1) &= [A(\theta)\ B(\theta)]\xi(k):=\Psi_1\xi(k) \\ E(\theta)y(k) &= [A(\theta)-E(\theta)\ B(\theta)]\xi(k):=\Psi_2\xi(k) \end{aligned} \tag{5}$$

와 같다. 여기서 $y(k)=x(k+1)-x(k)$이다.

보조정리 1: 임의의 행렬 $N_1(\theta)$, $N_2(\theta)$, 양의 정부호 행렬(positive-definite matrix) $S(\theta)$와 식 (4)에서 정의하는 구간 시변 시간지연에 대하여, 아래의 부등식 조건

$$\begin{aligned} &-\sum_{j=k-d(k)}^{k-1} y(j)^T E(\theta)^T S(\theta)E(\theta)y(j) \\ &=\xi(k)^T\{\Pi(\theta)+d(k)Y(\theta)^T S(\theta)^{-1}Y(\theta)\}\xi(k) \\ &\le \xi(k)^T\{\Pi(\theta)+\bar{d}Y(\theta)^T S(\theta)^{-1}Y(\theta)\}\xi(k) \end{aligned} \tag{6}$$

을 만족한다. 여기서, 변수들은

$$\begin{aligned} \Pi(\theta) &= \begin{bmatrix} N_1(\theta)^T E(\theta)+E(\theta)^T N_1(\theta) & -N_1(\theta)^T E(\theta)+E(\theta)^T N_2 \\ * & -N_2(\theta)^T E(\theta)-E(\theta)^T N_2(\theta) \end{bmatrix} \\ Y(\theta) &= \begin{bmatrix} N_1(\theta) & N_2(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

로 정의한다.

증명: Zhang과 Han[10]의 보조정리 2와 유사하게, 행렬을 $C(\theta)=\begin{bmatrix} S(\theta)^{1/2} & S(\theta)^{-1/2}Y(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$로 두면 $C(\theta)^T C(\theta)=\begin{bmatrix} S(\theta) & Y(\theta) \\ Y(\theta)^T & Y(\theta)^T S(\theta)^{-1}Y(\theta) \end{bmatrix}\ge 0$이 되고, 아래의 식

$$\sum_{j=k-d(k)}^{k-1}\begin{bmatrix} E(\theta)y(j) \\ \xi(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S(\theta) & Y(\theta) \\ Y(\theta)^T & Y(\theta)^T S(\theta)^{-1}Y(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E(\theta)y(j) \\ \xi(k) \end{bmatrix}\ge 0 \tag{8}$$

을 만족한다. 식 (8)의 항(terms) 중에서 $\sum_{j=k-d(k)}^{k-1} 2\xi(k)^T Y(\theta)^T E(\theta)y(j)=2\xi(k)^T Y(\theta)^T[E(\theta)\quad -E(\theta)]\xi(k)$를 만족하므로 식 (8)을 정리하면 식 (6)을 얻는다. ■

3. 변수 종속 특이시스템의 강인 안정성

본 절에서는 구간 시변시간지연과 폴리토픽 불확실성을 가지는 이산 특이시스템의 강인 안정성 조건을 제안한다. 기존의 결과에서 고정 리아푸노프 함수를 이용하므로 발생하는 보수성을 줄이기 위하여 정리 1에서는 새로운 변수 종속 리아푸노프 함수를 이용하여 변수 종속 특이시스템의 강인 안정성 조건을 제안한다. 또한 제안한 정리 1의 조건을

모든 변수의 견지에서 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식의 형태의 강인 안정성 조건을 정리 2에서 제시한다.

정리 1: 구간 시변 시간지연 (4)를 가지는 이산시간 변수 종속 특이시스템 (1)에 대하여, 행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 & A(\theta)^T P(\theta) & \bar{d}(A(\theta)-E(\theta))^T S(\theta) & \bar{d}N_1(\theta)^T \\ * & \Lambda_3 & B(\theta)^T P(\theta) & \bar{d}B(\theta)^T S(\theta) & \bar{d}N_2(\theta)^T \\ * & * & -P(\theta) & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{d}S(\theta) & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{d}S(\theta) \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 $P(\theta)$, $S(\theta)$, $W(\theta)$와 행렬 $Z(\theta)$, $N_1(\theta)$, $N_2(\theta)$가 존재하면, 변수 불확실성 (2)와 구간 시변 시간지연 (4)를 가지는 이산시간 변수 종속 특이시스템 (1)이 강인 안정하다. 여기서, $E(\theta)^T\Phi(\theta)=0$를 만족하고, $d^* = \bar{d}-\underline{d}+1$이다. 변수들은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= A(\theta)^T\Phi(\theta)Z(\theta)^T + Z(\theta)\Phi(\theta)^T A(\theta) + N_1(\theta)^T E(\theta) \\ &\quad + E(\theta)^T N_1(\theta) - E(\theta)^T P(\theta)E(\theta) + d^* W(\theta) \\ \Lambda_2 &= Z(\theta)\Phi(\theta)^T B(\theta) - N_1(\theta)^T E(\theta) + E(\theta)^T N_2(\theta) \\ \Lambda_3 &= -N_2(\theta)^T E(\theta) - E(\theta)^T N_2(\theta) - W(\theta) \end{aligned}$$

증명: 강인 안정성 조건을 위하여 식 (2)를 만족하는 불확실 변수 θ에 대하여 적절한 리아푸노프 함수를

$$V(k,\theta) = V_1(k,\theta) + V_2(k,\theta) + V_3(k,\theta) + V_4(k,\theta) \quad (10)$$

과 같이 설정하고, 각 함수들은

$$\begin{aligned} V_1(k,\theta) &= x(k)^T E(\theta)^T P(\theta)E(\theta)x(k) \quad (11) \\ V_2(k,\theta) &= \sum_{\beta=-\bar{d}+1}^{0} \sum_{j=k-1+\beta}^{k-1} y(j)^T E(\theta)^T S(\theta)E(\theta)y(j) \\ V_3(k,\theta) &= \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x(i)^T W(\theta)x(i) \\ V_4(k,\theta) &= \sum_{j=-\bar{d}+2}^{-\underline{d}+1} \sum_{l=k+j-1}^{k-1} x(l)^T W(\theta)x(l) \end{aligned}$$

로 정의한다. 구간 시변 시간지연을 가지는 이산시간 변수 종속 특이시스템 (1)의 해에 대하여 $V(k,\theta)$의 전방향 차분(forward difference)인 $\Delta V(k,\theta) = V(k+1,\theta) - V(k,\theta)$을 구하면 $\Delta V_1(k,\theta)$는

$$\Delta V_1(k,\theta) = \xi(k)^T \Psi_1 P(\theta)\Psi_1 \xi(k) - \xi(k)^T \Psi_3 \xi(k) \quad (12)$$

와 같고, $\Delta V_2(k,\theta)$는 식 (6)을 이용하면

$$\begin{aligned} &\Delta V_2(k,\theta) \\ &= \bar{d}y(k)^T E(\theta)^T S(\theta)E(\theta)y(k) - \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1} y(j)^T E(\theta)^T S(\theta)E(\theta)y(j) \\ &\le \bar{d}y(k)^T E(\theta)^T S(\theta)E(\theta)y(k) - \sum_{j=k-d(k)}^{k-1} y(j)^T E(\theta)^T S(\theta)E(\theta)y(j) \\ &\le \bar{d}\xi(k)^T \Psi_2^T S(\theta)\Psi_2 \xi(k) + \xi(k)^T\{\Pi(\theta) + \bar{d}Y(\theta)^T S(\theta)^{-1}Y(\theta)\}\xi(k) \end{aligned} \quad (13)$$

과 같다. $\Delta V_3(k,\theta)$와 $\Delta V_4(k,\theta)$는 Xu와 Chen[11]의 정리 2의 증명 과정을 이용하면

$$\begin{aligned} &\Delta V_3(k,\theta) + \Delta V_4(k,\theta) \quad (14) \\ &\le d^* x(k)^T W(\theta)x(k) - x(k-d(k))^T W(\theta)x(k-d(k)) \\ &= \xi(k)^T \Psi_4 \xi(k) \end{aligned}$$

와 같이 얻어진다. 여기서, $\Psi_3 = diag\{E(\theta)^T P(\theta)E(\theta), 0\}$이고 $\Psi_4 = diag\{d^* W(\theta), -W(\theta)\}$이다. 또한 $E(\theta)^T\Phi(\theta)=0$이므로

$$\begin{aligned} &2x(k+1)^T E(\theta)^T \Phi(\theta)Z(\theta)^T x(k) \quad (15) \\ &= \xi(k)^T \left\{\Psi_1^T \Phi(\theta)Z(\theta)^T [I \quad 0] + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} Z(\theta)\Phi(\theta)^T \Psi_1\right\}\xi(k) = 0 \end{aligned}$$

가 된다. 식 (12)~(14)의 $\Delta V(k,\theta)<0$과 식 (15)로부터

$$\begin{aligned} &\xi(k)^T\{\Psi_1 P(\theta)\Psi_1 - \Psi_3 + \bar{d}\Psi_2^T S(\theta)\Psi_2 + \Pi(\theta) + \bar{d}Y(\theta)^T S(\theta)^{-1}Y(\theta) \\ &+ \Psi_4 \Psi_1^T \Phi(\theta)Z(\theta)^T [I \quad 0] + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} Z(\theta)\Phi(\theta)^T \Psi_1\}\xi(k) < 0 \end{aligned} \quad (16)$$

을 얻는다. 따라서, 식 (16)에서 슈어여수(Schur complement) 정리[12]를 이용하면 강인 안정성 조건식 식 (9)를 얻을 수 있다. ■

제안한 정리 1은 불확실 변수 θ에 대하여 무한 차원(infinite-dimensional)의 비선형 행렬부등식으로 표현된다. 따라서 구하고자 하는 변수의 측면에서 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식의 형태를 만들기 위하여 정리 2에서는 무한 차원의 행렬부등식 조건 (5)를 유한차원(finite-dimensional)의 조건으로 변형한다.

정리 2: 변수 불확실성 (2)와 구간 시변 시간지연 (4)를 가지는 이산시간 변수 종속 특이시스템 (1)에 대하여, 아래의 행렬부등식

$$\Gamma_{ii} - \Sigma_{ii} < 0, \quad 1 \le i \le N \quad (17)$$

$$\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} - \Sigma_{ij} - \Sigma_{ij}^T < 0, \quad 1 \le i < j \le N \quad (18)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \cdots & \Sigma_{1N} \\ * & \Sigma_{22} & \cdots & \Sigma_{2N} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \Sigma_{NN} \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 P_i, S_i, W_i와 행렬 Z_i, N_{1i}, N_{2i}, X_i 및 Σ_{ij}가 존재하면, 변수 불확실성 (2)와 구간 시변 시간지연 (4)의 존재에도 불구하고 이산시간 변수 종속 특이시스템 (1)은 강인 안정하다. 여기에서, Φ_i는 $E_i^T\Phi_i = 0$을 만족하고 Γ_{ij}는

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & X_i^T B_j - N_{1i}^T E_j + E_j^T N_{2i} & \bar{d}N_{1i}^T \\ * & -X_i - X_i^T + P_i + \bar{d}S_i & X_i^T B_j & 0 \\ * & * & -N_{2i}^T E_j - E_j^T N_{2i} - W_i & \bar{d}N_{2i}^T \\ * & * & * & -\bar{d}S_i \end{bmatrix} \quad (20)$$

으로 정의한다. 여기서 변수들은 아래와 같다.

$$\Xi_1 = (A_j - E_j)^T X_i + X_i^T (A_j - E_j) + N_{1i}^T E_j + E_j^T N_{1i} + d^* W_i$$
$$\Xi_2 = (A_j - E_j)^T X_i + Z_i \Phi_j^T - X_i^T + E_j^T P_i.$$

증명: 이산시간 변수 종속 불확실성 시스템 (1)은

$$\overline{E}(\theta)\overline{x}(k+1) = \overline{A}(\theta)\overline{x}(k) + \overline{B}(\theta)\overline{x}(k-d(k)) \tag{21}$$

과 같이 등가적으로 변경가능하다. 여기서 변수들은

$$\overline{E}(\theta) = \begin{bmatrix} E(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \overline{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ Ey(k) \end{bmatrix} \tag{22}$$
$$\overline{A}(\theta) = \begin{bmatrix} E(\theta) & I \\ A(\theta)-E(\theta) & -I \end{bmatrix},\ \overline{B}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

와 같이 정의한다. 식 (9)의 강인 안정성 조건이 성립하는 것은

$$\overline{P}(\theta) = \begin{bmatrix} P(\theta) & 0 \\ 0 & \alpha(\theta)I \end{bmatrix},\ \overline{S}(\theta) = \begin{bmatrix} S(\theta) & 0 \\ 0 & \alpha(\theta)I \end{bmatrix},\ \overline{W}(\theta) = \begin{bmatrix} W(\theta) & 0 \\ 0 & \alpha(\theta)I \end{bmatrix}$$
$$\overline{Z}(\theta) = \begin{bmatrix} Z(\theta) & I \\ 0 & I \end{bmatrix},\ \overline{N_1}(\theta) = \begin{bmatrix} N_1(\theta) & 0 \\ 0 & \alpha(\theta)I \end{bmatrix},\ \overline{N_2}(\theta) = \begin{bmatrix} N_{2(\theta)} & 0 \\ 0 & \alpha(\theta)I \end{bmatrix}$$
$$\overline{\Phi}(\theta) = \begin{bmatrix} \Phi(\theta) & 0 \\ 0 & X(\theta) \end{bmatrix} \tag{23}$$

의 해를 가지고 변형한 등가의 이산시간 변수 종속 특이시스템 (21)에 대하여서도 만족하므로 식 (23)의 변수를 식 (9)에 대입하여 정리하면

$$\Gamma(\theta) = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \overline{d}N_1(\theta)^T \\ * & \Gamma_4 & X(\theta)^T B(\theta) & 0 \\ * & * & \Gamma_5 & \overline{d}N_2(\theta)^T \\ * & * & * & -\overline{d}S_i \end{bmatrix} < 0 \tag{24}$$

를 얻을 수 있다. 변수들은 다음과 같다.

$$\Gamma_1 = A(\theta) - E(\theta))^T X(\theta) + X(\theta)^T (A(\theta) - E(\theta)) + N_1(\theta)^T E(\theta) + E(\theta)^T N_1(\theta) + d^* W(\theta)$$
$$\Gamma_2 = (A(\theta) - E(\theta))^T X(\theta) + Z(\theta)\Phi(\theta)^T - X(\theta)^T + E(\theta)^T P(\theta)$$
$$\Gamma_3 = X(\theta)^T B(\theta) - N_1(\theta)^T E(\theta) + E(\theta)^T N_2(\theta)$$
$$\Gamma_4 = -X(\theta) - X(\theta)^T + P(\theta) + \overline{d}S(\theta)$$
$$\Gamma_5 = -N_2(\theta)^T E(\theta) - E(\theta)^T N_2(\theta) - W(\theta).$$

식 (24)의 강인 안정성 조건에서 구하고자 하는 변수를 볼록 폴리토프에 속하는

$$P(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i P_i,\ S(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i S_i,\ W(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i W_i,\ Z(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i Z_i,$$
$$N_1(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i N_{1i},\ N_2(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i N_{2i},\ X(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i X_i \tag{25}$$

와 같이 정의한다. 식 (25)를 식 (24)에 대입하면

$$\Gamma(\theta) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \theta_i \theta_j \Gamma_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \theta_i^2 \Gamma_{ii} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N} \theta_i \theta_j (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) \tag{26}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{N} \theta_i^2 \Sigma_{ii} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N} \theta_i \theta_j (\Sigma_{ij} + \Sigma_{ij}^T) = \zeta^T \Omega \zeta$$

을 얻는다. 여기에서, $\zeta = [\theta_1 I \quad \theta_2 I \quad \cdots \quad \theta_N I]^T$이고, Ω는 식 (19)로 정의된다. 부등식 (19)는 $\Gamma(\theta) < 0$을 의미한다. 또한, 식 (17)과 (18)은 식 (26)으로부터 직접 얻는다. ■

참조 1: 제안한 정리 2는 기존 결과들이 다루고 있지 않은 두 가지 강인 안정성 조건을 제시한다. 첫째는 $E(\theta) = I$가 되는 이산시간 비특이시스템에 대한 지연 종속 및 변수 종속 강인 안정성 조건을 제안한다. 기존의 결과들이 연속시간 비특이시스템에 대한 결과를 제시하였으나 정리 2에서는 이산시간 비특이시스템에 대한 새로운 강인 안정성 조건을 제안한다. 둘째는 비특이시스템 뿐만 아니라 이산시간 특이시스템에 대한 지연 종속 및 변수 종속 강인 안정성 조건을 제시한다. 따라서 제안하는 강인 안정성 조건은 이산시간 비특이시스템과 특이시스템에 직접 적용할 수 있는 일반적인 알고리듬이라 할 수 있다.

표 1 하한 값 $\underline{d}$에 대한 상한 값 $\overline{d}$ (특이시스템의 경우)
Table 1 The upper bound of $\overline{d}$ according to $\underline{d}$ (singular system case)

$\underline{d}$	1	2	3	4	5	$6 \leq \underline{d} \leq 15$	$\underline{d} \geq 16$
$\overline{d}$의 상한 값	4	5	5	6	7	$\underline{d}+1$	$\underline{d}$

표 2 하한 값 $\underline{d}$에 대한 상한 값 $\overline{d}$ (비특이시스템의 경우)
Table 2 The upper bound of $\overline{d}$ according to $\underline{d}$ (non-singular system case)

$\underline{d}$	1	2	$\underline{d} \geq 3$
$\overline{d}$의 상한 값	5	5	$\underline{d}+2$

예제 1: 제안한 이산시간 변수 종속 특이시스템에 대한 지연 종속 및 변수 종속 강인 안정성 조건의 타당성을 보여주기 위하여 폴리토픽 불확실성과 구간 시변 시간지연을 가지는 특이시스템

$$E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1.45 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 0.55 \end{bmatrix},$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

을 다룬다. 기존의 결과들[1-8]이 연속시간 특이시스템과 비특이시스템을 다루고 있으므로 식 (26)과 같은 이산시간 비특이시스템에 대하여 직접 적용할 수 없다. 제안하는 정리 2의 강인 안정성 조건은 이산시간의 특이시스템 뿐만 아니라 비특이시스템에 대해서도 직접 적용가능하다. $E_i^T \Phi_i = 0$을 만족하는 행렬은 $\Phi_1 = \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$와 같이 잡을 수 있다. 본 예제에서의 목적은 시변 시간지연의 하한 값 $\underline{d}$에 대하여 강인 안정성을 보장하는 상한 값 $\overline{d}$를 구하는 것이고 결과는 표 1에서 주어진다. 표 1에서 보듯이 시변 시간지연의 하한 값이 증가할수록 하한 값이 상한 값에 수렴하여 $\underline{d} \geq 16$인 경우

에는 동일한 값을 가지게 된다. 제안한 정리 2의 강인 안정성 조건은 특이시스템 뿐만 아니라 비특이시스템에 대해서도 직접 적용가능함을 보이기 위하여 식 (26)의 특이시스템에서 $E_1 = E_2 = I$로 두면 비특이시스템이 되고 $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$이 된다. 특이시스템의 경우와 동일한 목적을 위한 결과는 표 2에 주어진다. 표 2에서 보듯이 제안한 알고리듬은 비특이시스템에도 적용가능함을 보인다. 시간지연의 하한 값이 커질수록 상한 값은 $\underline{d}+2$에 수렴함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 구간 시변 시간지연과 폴리토픽 불확실성을 가지는 변수 종속 이산시간 불확실 특이시스템에 대한 지연 종속 및 변수 종속 강인 안정성 조건을 제안하였다. 먼저 새로운 변수 종속 리아푸노프 함수를 선정하여 무한 차원의 강인 안정성 조건을 구하였다. 그리고 구하고자 하는 변수들을 폴리토프에 속하는 변수로 정의하고 유한차원의 선형행렬부등식 형태의 강인 안정성 조건을 구하였다. 특이행렬을 가지는 이산시간 지연 특이시스템을 위한 강인 안정성 조건을 선형행렬부등식으로 표현하는 것이 기존의 방법으로는 상당히 어려운 문제이지만 본 논문에서 제안하는 알고리듬을 이용하면 특이시스템 뿐만 아니라 비특이시스템에 대해서도 직접 적용할 수 있는 일반적인 알고리듬이 된다. 마지막으로 수치 예제를 통하여 제안한 강인 안정성 조건의 타당성을 확인하였다.

감사의 글

이 논문은 2009년도 선문대학교 교내학술연구비 지원에 의하여 이루어졌음

참 고 문 헌

[1] Z. Wu and W. Zhou, "Delay-dependent robust stabilization for uncertain singular systems with state delay," *Acta Automatica Sinica*, vol. 33, pp. 714-718, 2007.
[2] Z. Wu, H. Su, and J. Chu, "Improved results on delay-dependent H_∞ control for singular time-delay systems," *Acta Automatica Sinica*, vol. 35, pp. 1101-1106, 2009.
[3] R. X. Zhong and Z. Yang, "Delay-dependent robust control of descriptor systems with time delay," *Asian Journal of Control.*, vol. 8, pp. 36-44, 2006.
[4] S. Ma, C. Zhang, and Z. Cheng, "Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain discrete-time singular systems with time-delays," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 217, pp. 194-211, 2008.
[5] D. Peaucelle, D. Arzelier, J. Bachelier, and J. Bernussou, "A new robust D-stbility condition for real convex polytopic uncertainty," *Systems & Control Letters*, vol. 40, pp. 21-30, 2000.
[6] Y. Xia and Y. Jia, "Robust stability functionals of state delayed systems with polytopic type uncertainties via parameter-dependent Lyapunov functions," *International Journal of Control*, vol. 75, pp. 1427-1434, 2002.
[7] Y. He, M. Wu, J. H. She, and G. P. Liu, "Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems of polytopic-type uncertainties," *IEEE Trans. on Automatic Control.*, vol. 49, pp. 828-832, 2004.
[8] H. Gao, P. Shi, and J. Wang, "Parameter-dependent robust stability of uncertain time-delay systems," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 206, pp. 366-373, 2007.
[9] J. Zhang, Y. Xia, and P. Shi, "Parameter-dependent robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems," *Automatica*, vol. 45, pp. 560-565, 2009.
[10] X. M. Zhang and Q. L. Han, "Delay-dependent robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems with time-varying delay based on a finite sum inequality," *IEEE Trans. Circuits and Systems-II*, vol. 53, pp. 1466-1470, 2006.
[11] S. Xu and T. Chen, "Robust H_∞ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers," *Systems & Control Letters*, vol. 51, pp. 171-183, 2004.
[12] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia, PA; SIAM, 1994.

저 자 소 개

김 종 해 (金 鍾 海)
1993년 경북대학교 전자공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전자공학과 졸업(공박). 1998년~2002년 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원. 2000년~2001년 일본 오사카대학 객원연구원. 2010년~2011년 미국 조지아텍 방문연구원. 2002년~현재 선문대학교 전자공학과 부교수.
Tel : 041-530-2352
E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr