韓國컴퓨터情報學會 論文誌
第15卷 第5號, 2010. 5.

2010-15-5-1-2

도립진자 모델에서 칼만 필터의 잡음인자 해석

김 훈 학*

The Analysis of The Kalman Filter Noise Factor on The Inverted Pendulum

Hoon-Hak Kim*

요 약

도립진자 시스템에서 칼만 필터링 최적의 결과를 얻기 위해서는 잡음 공분산 행열 Q, 측정잡음 공분산 행열 R과 초기 에러 공분산 행열 P_0와 같은 인자가 필요하다. 이러한 인자는 실제 상황에서 근사화된 값을 사용하거나 정확한 값을 알 수 없기 때문에 칼만 필터의 최적화에 영향을 미치지 않거나 이러한 공분산 행열의 스칼라 이득변화에 덜 민감한 경우를 연구의 대상으로 하고 있다. 또한 상태 측정시 에러를 예측하는 방법으로 구해진 에러 공분산 행열은 상태측정 값 보다는 공분산 행열의 이득과 연관성을 가지게 된다. 따라서 3가지 공분산 행열과 칼만 이득 그리고 에러 공분산 행열 간의 상관관계가 잡음인자인 스칼라 이득과의 연관성을 해석하고자 하였다. 본 연구는 3절에서 도립진자 시스템 모델을 간략하게 정리를 하였고 4절에서는 이러한 모델을 기반으로 하여 컴퓨터 시뮬레이션을 위한 도립진자 시스템에 대한 수학적 동적모델을 구성하고 5절에서는 이러한 인자와 스칼라 이득 값을 이용한 다양한 시뮬레이션 결과를 통하여 잡음인자의 연관성을 해석하였다.

Abstract

The Optimal results of Kalman Filtering on the Inverted Pendulum System requires an effective factor such as the noise covariance matrix Q, the measurement noise covariance matrix R and the initial error covariance matrix P_0. We present a special case where the optimality of the filter is not destroyed and not sensitive to scaling of these covariance matrix because these factors are unknown or are known only approximately in the practical situation. Moreover, the error covariance matrices issued by this method predict errors in the state estimate consistent with the scaled covariance matrices and not the issued state estimates. Various results using the scalar gain δ are derived to described the relations among the three covariance matrices, Kalman Gain and the error covariance matrices. This paper is described as follows: Section III a brief overview of the Inverted Pendulum system. Section IV deals with the mathematical dynamic model of the system used for the computer simulation. Section V presents a various simulation results using the scalar gain.

▸ Keyword : 공분산행열(Covariance Matrix), 칼만필터(Kalman Filter), 도립진자(Inverted Pendulum)

·제1저자 : 김훈학
·투고일 : 2010. 03. 15, 심사일 : 2010. 04. 07, 게재확정일 : 2010. 04. 16.
* 인덕대학 컴퓨터전자과 교수

Ⅰ. 서 론

제어시스템의 설계를 하는 경우 수학적 모델링이나 해석 및 시뮬레이션과 같은 작업은 시스템 설계에 있어서 없어서는 안되는 보편화된 전 단계 설계기술이다. 마이크로 콘트롤러를 사용한 시스템 설계의 경우에도 각종 센서와 수학적 모델링 결과를 근거에 두고 사전 설계시스템의 안정성과 운용결과에 필수적으로 적용이 되는 과정이라 하겠다.

본 논문에서 대상이 되고 있는 도립진자 로봇(Inverted Pendulum Robot)의 근간이 되는 기술은 갈릴레이 시절부터 현대에 이르기까지 수학과 공학을 전공하는 사람들의 꾸준한 연구의 대상이 되어온 분야이다. 진자(Noninverted Pendulum)에 대한 해석은 기계분야와 통신신호의 주기성과 연계되어 다양하게 해석되어 왔으며[1][2], 최근에 이르러서는 다관절 도립진자의 해석까지도 심도 깊게 연구되고 있다.[3]. 따라서 본 논문에서는 이러한 도립진자(Inverted Pendulum)에 관련된 수학적 시스템 모델링과 상태 방정식에서 기존의 제어 시스템과의 차이점을 분석하고, 시스템 모델에 적용된 칼만필터의 재귀결과가 도립진자의 균형제어에 영향을 미칠 수 있는 최적 수렴인자를 해석하는 것에 목적을 두고 연구를 진행하였다.

Ⅱ. 도립진자 관련연구

도립진자(Inverted Pendulum)의 의미는 추의 지지점위에 무게중심을 갖는 추를 의미한다. 따라서 이러한 도립진자는 정상 추와는 달리 지지점 상단에 무게중심을 두기 때문에 물리학적으로 불완전한 상태를 갖게 된다. 이러한 경우에도 무게중심이 지지점에 수직위치에 놓인 경우는 안정 상태를 유지하지만 지지점이 수평으로 변화를 하게되면 수직상단의 무게중심이 변화하여 안정위치로의 복귀가 불가능해 진다. 이러한 경우 도립진자의 균형유지를 위하여 새로운 무게중심 균형점을 찾는 과정을 궤환제어시스템이라 한다[4][5].

최근에 등장한 Segway{Segway Human Transporter]가 대표적인 도립진자 균형시스템이라 할 수 있는데 이장치의 경우 양바퀴를 잇는 축상에 도립진자를 고정한 형태를 지니고 있다. 양 바퀴는 전기모터를 사용하고 추의 균형은 실시간 균형유지를 위하여 궤환제어 시스템을 이용하고 있다[4][5]. 초기 Segway를 개선한 로봇 이동 플랫폼 RMP(Robot Mobility Platform)도 개발되어 로봇 시스템의 개발주기를 앞당기려는 노력도 이루어지고 있다.

이밖에 도립진자의 개념은 로켓을 쏘아 올리는 개념과도 유사하여 지지점 위의 연료탱크의 무게를 도립진자의 균형유지와 동일하게 해석하는 방법으로 수직 상승시 균형제어를 하도록 하고 있다. 그러나 로켓 추진시에는 수직상승을 위한 균형인자 만으로는 정확한 제어가 어려운 비행 비틀림등의 해석등의 과정이 수반되어야 한다. 최근에 이르러서는 이러한 문제를 해결하기 위하여 속도와 위치제어를 위한 가속메터와 자이로스코프 기능을 이용한 관성항법 장치가 사용되고 있다.[6][7]

Ⅲ. 도립진자의 수학모델

3.1 기본 수학모델

도립진자를 제어하는 경우 도립진자 자체의 동적특성의 비선형성과 불안정한 상태를 가지고 있기 때문에 단순히 연구실에서의 시뮬레이션에는 비현실적인 문제를 배제하기 어려운 문제가 있다. 따라서 다음과 같은 몇가지 가정요소를 근간으로 결과를 확인하고자 하였다. 우선 도립진자의 구조는 도립진자와 이를 지지하는 질점의 역할을 하는 이동체로 하였다. 이렇게 구성된 시스템은 이동체 위에 놓인 도립진자가 수직 기준점에서 미소 각의 범위에서 변화를 갖는 선형 시스템으로 가정하였다. 또한 이동체의 질량과 관성 모멘트는 없는 것으로 가정하여 시뮬레이션 결과를 얻고자 하였다. 이렇게 구성된 모델링 시스템은 그림 3.1과 같다.

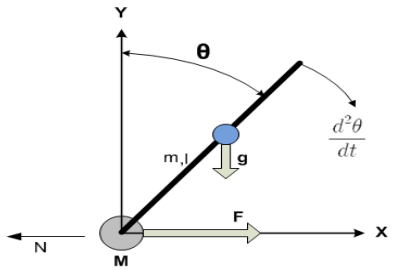


그림 3.1 도립진자 시스템
Fig. 3.1 Inverted Pendulum System

그림 3.1은 기본적인 도립진자 시스템으로 여기에 사용된 각종 변수와 이동체 및 도립진자에 관련된 기호의 의미는 다음과 같다.

표 1 도립진자 시스템 기호
Table 1. A Symbol of Inverted Pendulum System

기호	내 용	기호	내 용
M	이동체의 질량(kg)	N	이동체의 반발력(N)
m	도립진자의 질량(kg)	θ	도립진자 수직편각
l	도립진자의1/2길이(m)	a	중력가속도(m/s^2)
F	이동체 가해진 힘	b	이동체의 마찰계수

이와 같은 시스템의 도립진자 관성 모멘트는 이미 알려진 바와 같이 식(1)으로 정리될 수 있다. 또한 널리 알려진 뉴톤의 운동방정식과 중력 g와 토크 T를 적용한 경우 이 시스템의 라그랑지 방정식은 식(2),(3),(4)으로 표현할 수 있다[4][5].

$$I=\alpha\, ml^2 \quad \cdots\cdots (1)$$

$$F=ma \;\;,\;\; T=I\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \cdots\cdots (2)$$

$$F-N-b\frac{dx}{dt}=M\frac{d^2x}{dt^2} \quad \cdots\cdots (3)$$

$$gl\sin\theta-Nl\cos\theta=I\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \cdots\cdots (4)$$

위에 구현된 시스템을 선형제어를 하기 위해서는 반드시 시스템 방정식은 선형성을 유지해야만 한다. 따라서 도립진자의 수직편각이 $\pm 5^\circ$ 범위내로 진동을 하는 것으로 가정할 때 $\theta=\pi+\phi$로 표현되어 결과적으로는 $con\theta\approx -1$, $\sin(\pi+\phi)\approx =-\phi, \theta\approx 0$로 근사화할 수 있다. 이와 같이 선형성이 보장되는 시스템은 식(5)와 같이 제어 시스템에서 널리 활용되는 상태방정식의 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{\theta}\\ \ddot{\theta}\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}x\\ \dot{x}\\ \theta\\ \dot{\theta}\end{pmatrix}+\beta\cdot u \quad \cdots\cdots (5)$$

$$O=\gamma\cdot\begin{pmatrix}x\\ \dot{x}\\ \theta\\ \dot{\theta}\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (6)$$

식(5)의 상태방정식에서 α,β,γ에 대한 해를 구하면 식(7),(8)과 같이 고유 값으로 구성된 해를 얻을 수 있다.

$$\alpha=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-(I+ml^2)b}{\lambda} & \frac{m^2gl^2}{\lambda} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{-mlb}{\lambda} & \frac{mgl(M+m)}{\lambda} & 0\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (7)$$

$$\beta=\begin{pmatrix}0\\ \frac{(I+ml^2)b}{\lambda}\\ 0\\ \frac{ml}{\lambda}\end{pmatrix},\;\gamma=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (8)$$

식(7),(8)은 앞서 모델링에 사용된 시스템에 맞도록 각종 환경 변수 값을 적용하면 상태 방정식의 게인 값을 구할 수 있는 표준화된 수학적 모델이라고 할 수 있다.

3.2 PID 수학모델

PID 제어기술은 K_p, K_i, K_d 제어인자의 조합에 의한 제어가 핵심이라고 할 수 있으며 일반적인 모터 제어시스템의 출력 함수 C(t)는 식(9)과 같다.

$$C(t)=K_pe(t)+K_i\int_0^t e(t)dt+K_d\frac{de(t)}{dt} \quad \cdots\cdots (9)$$

윗 식에서 C(t)의 이득 값은 PWM의 듀티비와 일치하며 궁극적으로는 모터의 속도를 결정하게 된다. 수학적으로 식(9)와 같은 모델링이 가능하지만 디지털 시스템에서의 제어를 위해서는 다음과 같은 근사화 된 차분함수를 이용한다.[8]

$$\int_0^t e(t)dt\approx T_{sample}\cdot\sum_0^n e(n)$$

$$\frac{de(t)}{dt}\approx\frac{[e(n)-e(n-1)]}{T_{sample}} \quad \cdots\cdots (10)$$

$$C(t)=K_pe(n)+K_iT_{sample}\sum_0^N e(n)+\frac{K_d[e(n)-e(n-1)]}{T_{sample}}$$

$$\cdots\cdots (11)$$

$$C(t)=Ke(n)+\frac{T_{sample}}{T_i}\sum_0^N e(n)+\frac{T_d}{T_{sample}}[e(n)-e(n-1)]$$

$$(\text{cf. } K_p=K, K_i=\frac{K}{T_i}, K_d=K\cdot T_d\;) \quad \cdots\cdots (12)$$

식(12)와 같이 기본적인 PID 수학모델만으로는 도립진자

의 시뮬레이션 해석은 쉽지 않다. 따라서 앞서 언급했던 도립진자의 위치,속도,가속도,관성모멘트,마찰계수,질량,길이등 고려해야 할 외부적인 변수요소 많다. 이러한 요소중에서도 도립진자의 수직편각의 변화에 따라 이동체의 신속한 이동으로 추의 균형을 유지하는 것이 매우 중요하다.

3.3 칼만 수학 모델

Rudolf E.Kalman이 고안한 칼만 필터(Kalman Filter)는 시간에 따른 변화에 맞추어 다음 단계의 시스템 결과를 예측할 수 있도록 에러를 최소화한 결과를 얻기 위하여 사용된다.[9] 이러한 칼만 필터는 선형 시스템에 적용이 되고 있는 Simple 칼만 필터와 에러 값이 정규분포를 갖지 못하는 문제점을 급수개념을 도입하여 선형화하여 적용한 확장 칼만 필터(Extended Kalman Filter:EKF)가 있다.[9] 이러한 칼만 필터는 다음과 같은 상태방정식과 출력방정식으로 구성되며 출력방정식의 측정결과로부터 상태방정식을 추정하는 이론이다.

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k$$

$$y_k = Hx_k + v_k \quad \cdots\cdots (13)$$

식(13)에서 x_{k+1}는 시스템의 이산 상태방정식을 의미하며 이전 상태 값, 사용자 입력 값 그리고 프로세스 에러항목으로 구성되며, y_{k+1}는 출력방정식으로 실제 측정값과 장치가 갖는 측정에러 값으로 구성되어 있다. 이 경우 고려되어야 할 사항으로 예측된 시스템의 결과가 실제 측정 결과와 편차를 최소화하는 것이 중요하며, 프로세스 에러 w_k와 측정에러 v_k의 평균이 "0"으로 가정하고, 이들 사이에는 상호연관성을 갖지 않는 독립변수로 존재할 때 다음과 같이 초기 칼만 필터 식과 시간지연에 따른 에러보정 칼만 필터 식을 이용할 수 있다.[9][10]

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad \cdots\cdots (14)$$

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - H\hat{x}_k^-)$$

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \quad \cdots\cdots (15)$$

식(14)에서 P_k^-는 측정장치 에러 Q를 반영한 공분산 행열이고, 식(15)의 K_k는 측정 에러 R을 반영한 칼만 이득 값이다. 이 경우 측정장치 에러 값보다 측정에러 값이 커지는 $Q < R$ 의 조건이 발생하면 예측 시스템은 신뢰할 수 없는 상태라 할 수 있으며 $Q > R$ 의 조건을 만족하는 경우 식(15)의 첫 번째 수식으로부터 칼만 게인 값을 얻게 된다.

Ⅳ. 도립진자의 칼만필터

본 절에서는 최근 보편화되어 있는 장치인 가속도계(Accelerometer)와 자이로 메터(Gyrometer)를 이용하여 도립진자의 균형유지를 위한 칼만 필터 수학모델을 수립하였다. 칼만 필터의 최적결과는 첫째, 시스템 처리과정에서 발생하는 공분산 잡음 Q와 둘째, 실제 측정시 발생하는 공분산 잡음 R과 셋째, 초기 공분산 에러행열 P_0의 정확도에 의해 죄우 된다. 실제로 시스템을 해석하는 경우에 이들 Q, R, P_0의 요소는 사전에 결정된 값이 아니라 근사치를 사용한다. 따라서 본 연구에서는 칼만의 재귀연산에 적용하는 이들 요소의 통계적방식이 시스템에 어떻게 민감요인으로 작용하는지 확인하고 이들 공분산 값의 변화에 칼만 필터의 게인 값이 영향을 덜 받는 상황을 분석해 보고자 하였다. 또한 이들 세가지 요소와 칼만 필터 게인 K_k, 공분산 행열 P_k의 상관성에 대한 수학적 성질에 대하여도 분석해 보았다.

4.1 도립진자의 칼만 필터 모델

그림4.1 와 같이 도립진자의 상단에 가속도계를 y축과 수평으로 고정한 경우 도립진자가 수직편차 θ만큼 기울어지면 가속도계 역시 θ만큼의 회전각이 발생한다.

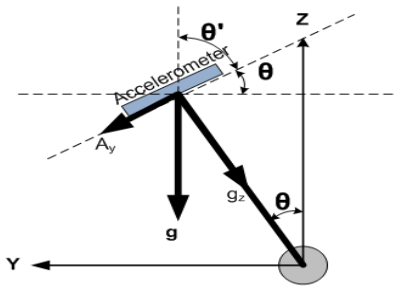


그림 4.1 도립진자의 가속도계 기울기
Fig. 4.1 Accelerometer Declination of Inverted Pendulum

그림4.1에서 편각 θ는 가속도계를 좌표 기준점으로 할 때 $\theta = \tan^{-1}(-A_y/g_z)$으로 표기할 수 있다. A_y는 가속도계의 수평력을 의미하고 g_z는 가속도계의 중력을 의미한다. 자이로 메터(Gyrometer)는 x축에 위치시키면 칼만 수학모델 식(13)은 $\theta_{k+1} = \theta_k + (\omega_x - b_k)dt + w_\theta$와 자이로 바이어스 식 $b_{k+1} = b_k + w_b$의 관계를 만족하므로 다음과 같은 상태방정식을 얻을 수 있다.[11]

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k$$

$$\begin{bmatrix}\theta_{k+1}\\ b_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -dt\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_k\\ b_k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}dt\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\ \omega_y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}w_\theta\\ w_b\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (16)$$

윗 식에서 w_θ는 가속도계가 갖는 자체오차를 의미하며 w_b는 자이로 메터가 갖는 측정오차를 의미한다. 이번에는 측정치 함수를 가속도계를 이용하여 수평 편각 θ을 구하는 경우 식(13)의 출력방정식은 다음과 같이 정리된다.

$$y_k = Hx_x + v_k$$

$$\theta_k = [1\ \ 0]\begin{bmatrix}\theta_k\\ b_k\end{bmatrix} + v_k \quad \cdots\cdots (17)$$

따라서 식(16)과 식(17)로부터 칼만필터 알고리즘에 적용될 인자는 다음과 정리된다.

$$x_k = \begin{bmatrix}\theta_k\\ b_k\end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix}1 & -dt\\ 0 & 1\end{bmatrix}, H = [1\ 0] \quad \cdots\cdots (18)$$
$$Q = E\left[w_k\, w_K^T\right] = \begin{bmatrix}w_\theta^2 & 0\\ 0 & w_b^2\end{bmatrix}, R = E\left[v_k\, v_K^T\right]$$

윗 식에서 Q 는 자이로 메터의 고유측정 오차(제조사 제공)이고 R은 실제 측정오차로서 이들 두 값의 최적화가 시스템에 기여하는 인자이다. 실제 칼만 필터에 적용하기 위해서는 추정된 상태함수인 식(14)에 시간변화에 따른 데이터의 갱신을 하게 되는데 이때 다음과 같은 오차 공분산 행열에 대하여도 데이터를 갱신하게 된다.

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

$$\begin{aligned} P_k^- &= \begin{bmatrix}1 & -dt\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{00} & P_{01}\\ P_{10} & P_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -dt & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}w_\theta^2 & 0\\ 0 & w_b^2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}P_{00} - (P_{01} + P_{10})\cdot dt + P_{11}\cdot dt^2 & P_{01} - P_{11}\cdot dt\\ P_{10} - P_{11}\cdot dt & P_{11}\end{bmatrix}\\ &\quad + \begin{bmatrix}w_\theta^2 & 0\\ 0 & w_b^2\end{bmatrix} \quad (cf. P_{ii} \rightarrow P_{ii_{k-1}}) \end{aligned}$$

..... (19)

또한 식(15)의 칼만 이득 K_k를 구성하고 있는 항을 보면 P_k^-와 R값을 인자로 하기 때문에 장치의 고유측정 오차 Q 값과 실제측정오차 R값에 영향을 받고 있음을 알 수 있다.

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}k_0\\ k_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P_{00}^- & P_{01}^-\\ P_{10}^- & P_{11}^-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\left([1\ 0]\begin{bmatrix}P_{00}^- & P_{01}^-\\ P_{10}^- & P_{11}^-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} + R\right)^{-1} \quad \cdots\cdots (20)$$
$$= \begin{bmatrix}\dfrac{P_{00}^-}{P_{00}^- + R}\\ \dfrac{P_{10}^-}{P_{00}^- + R}\end{bmatrix}$$

위와 같이 칼만 이득을 구한 다음에는 실제측정값을 이용하여 현재 상태변수 값을 구하고 마지막으로 추정 오차 공분산 $\boldsymbol{P_k}$값도 다음과 같은 절차로 계산한다.

$$\hat{x}_k = \hat{x} + K_k(y_k - H\hat{x}_k^-)$$

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \quad \cdots\cdots (21)$$

시간차에 따른 샘플 값도 지금까지 설명한 절차에 따라서 재귀적으로 칼만 필터를 수행한 결과를 얻을 수 있다.

4.2 칼만 필터 잡음 요소

앞 절에서 언급한 프로세스 잡음과 측정잡음에 대한 분산 에러에 대하여 모든 k값에 대하여 "0"의 값을 갖으며 초기 공분산 에러함수가 $P_0 = var(x_0)$의 관계를 만족하고 이들 두 잡음요소는 서로 독립적인 성질을 지닌다고 할 때 Q,R과 P_0의 값에 문제가 발생한다면 칼만 필터의 최적화는 영향을 받게 된다. 일부 혁신적인 시스템의 경우 Q와 R값을 다루는 방법이 있으나 이러한 내용은 극히 제한적이고 실제 시스템에 적용하는 것에는 문제점이 있다[12]. 이밖에 부정확한 잡음

공분산 값이 결과적으로 필터의 최적화에 역행하는 발산현상, 즉 측정잡음의 선형결합에 의한 분산값이 최적화의 조건으로 사용될 수 없다는 결과도 입증이 되었다[12]. 따라서 본 논문에서는 이상적인 처리잡음 공분산 행열 Q에 스칼라 값이 곱해진 불확실성 요인이 최적화에 미치는 요인을 해석하고자 하였다.

선형시변 시스템이 완벽하게 측정가능하고 제어가 가능한 시스템이라고 가정하면 칼만 필터는 초기 공분산 잡음 P_0의 값에 거의 영향을 받지 않는다. 그러나 시스템이 측정 불가능하거나 불안정한 상태인 경우 안정상태에서의 측정값 P_0의 영향을 받을 수 있다. 따라서 본 논문에서는 시스템이 완전 측정 가능한 시스템은 아니더라도 초기 잡음 공분산 행열 P_0의 값에 영향을 받지 않는 시스템으로 한정하였다. 실제 구현단계에서의 처리 잡음공분산 행열 Q값이 실제 상태측정 단계에서는 정상적인 값보다 큰 값을 나타냈다. 식(14),(15)는 Q_c를 연속시스템의 공분산 행열로 할 때 식(22)와 같이 정리된다.

$$Q=\int_0^T e^{At}BQ_cB^Te^{A^Tt}dt \quad \cdots\cdots (22)$$

윗 식에서 Q_c가 유한한 양의 대각행열 일 때 Q의 결과는 유한한 양의 값을 갖는다. Q_c는 불확실성 요인 "δ"값으로 분주된 $Q_c^{'}=\delta Q_c$의 값을 적용하면 Q의 결과도 $Q^{'}=\delta Q$의 결과를 따른다. 윗 식에서 B가 비정칙 정방행열(Nonsingular Square Matrix)이고 H는 완전한 열(row) 행렬이면 Q값이 유한한 양의 값을 갖게 되어 HQH^T는 대칭구조를 갖는 비정칙 행열이 된다. 샘플주기 T는 Q_c값이 유한한 양의 행열 값을 갖게되어 자연히 큰 값으로 증가한다. 따라서 식(15)의 내부 수식은 다음과 같이 근사화하여 사용이 가능하다.

$$HP_k^-H^T+R\approx HP_k^-H^T \quad (R\cong 0) \quad \cdots\cdots (23)$$

이와 유사하게 초기 공분산 잡음P_0,AP_0A^T는 Q값이 충분히 큰값을 갖을 때 $AP_0A^T\cong 0$으로 근사화할 수 있다.

지금까지 설명한 내용을 토대로 처리잡음 공분산 행열의 스칼라 이득이 칼만이득 값에 영향을 미치는 요인을 해석해보자. 우선 HQH^T는 유한 양의 행열이고 , 측정잡음은 $R=0$ 그리고 $\widehat{P_0}=\delta P_0\geq 0$ $(\delta\neq 0)$으로 가정할 때 $HP_k^-H^T$는 $HAP_{k-1}A^TH^T\geq 0$이 되어 비정칙의 결과를 갖는다. 따라서 $\widehat{Q}=\delta Q$의 관계에서 $\delta\neq 0$을 만족하는 모든 δ 에 대하여 칼만 이득값과 동일한 값을 갖는다. 이 경우 칼만이득은 Q의 크기와 무관하며 $\widehat{P^-}=\delta P_k^-$, $\widehat{P_k}=\delta P_k$를 만족한다. 즉, $\widehat{P_k^-}$, $\widehat{P_k}$, $\widehat{K_k}$가 $\widehat{P_0}$와 일치하도록 하면 $\widehat{Q}$와 P_k^-,P_k,K_k는 Q와 P_0에 일치하므로 다음과 같이 식을 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\widehat{P_1^-}=\delta(AP_0A^T+Q)=\delta P_1^- \\
&\widehat{K_1}=\delta P_1^-H^T(\delta HP_1^-H^T)^{-1} \quad \cdots\cdots (24)\\
&\quad =P_1^-H^T(HP_1^-H^T)^{-1}=K_1 \\
&P_1=(I-K_1H)P_1^- \\
&\widehat{P_1}=\delta(I-k_1H)P_1^-=\delta P_1
\end{aligned}$$

식(24)의 결과를 근거로 칼만 필터의 재귀추정 횟수 k에 대하여도 식(25)의 결과가 정리된다.

$$\begin{aligned}
&P_k^-=AP_{k-1}A^T+Q \\
&\widehat{P_k^-}=A\widehat{P_{k-1}^-}A^T+\widehat{Q} \\
&\quad =\delta(AP_{k-1}A^T+Q)=\delta P^- \\
&K_k=P_k^-H^T(HP_k^-H^T)^{-1} \\
&\widehat{K_k}=\delta P_k^-H^T(\delta HP_k^-H^T)^{-1}=K_k \\
&P_k=(I-K_kH)P_k^- \\
&\widehat{P_k}=(I-K_kH)\widehat{P_k^-}=\delta P_k \quad \cdots\cdots (25)
\end{aligned}$$

이러한 결과가 갖는 의미는 초기 잡음 P_0가 "0"이 아니고 초기 측정 잡음을 "0"으로 한 경우 공분산 잡음 행열은 이전 상태측정값과는 무관하게 스칼라 이득 δ의 영향을 받는다는 것을 알 수 있다.

이와 유사하게 $\widehat{P}_0=\delta P,\widehat{Q}=\delta Q,\widehat{R}=\delta R$으로 스칼라 이득값($\delta\neq 0$)을 부여한 경우에도 동일한 칼만 이득값을 갖게되어 칼만 이득은 Q와 R의 영향을 받지 않으며 $\widehat{P_k^-}=\delta P_k^-$와 $\widehat{P}_k=\delta P_k$의 관계식을 만족한다.

이 경우도 $\widehat{P_k^-}$, $\widehat{P}_k$, $\widehat{K_k}$가 $\widehat{P}_0$와 일치하도록 했을 때 $\widehat{Q}$ & $\widehat{\mathrm{R}}$와 P_k^-,P_k,K_k는 Q,R과 P_0에 일치하므로 다

음과 같이 식을 정리할 수 있다.

$$\widehat{P_1^-} = A\hat{P}_0 A^T + \hat{Q} = \delta(AP_0A^T + Q) = \delta P_1^-$$

$$\begin{aligned}\widehat{K_1} &= \delta P_1^- H^T(\delta H P_1^- H^T + \delta R)^{-1} \\ &= H^T P_1^-(HP_1^- H^T + R)^{-1} = K_1\end{aligned} \quad \cdots\cdots (26)$$

식(26)의 결과도 마찬가지로 칼만 재귀횟수 k에 적용을 하여도 만족하며 $P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$의 관계식이 다음의 조건을 충족한다.

$$\begin{aligned}\hat{P}_k^- &= A\hat{P}_{k-1}A^T + \hat{Q} \\ &= \delta(AP_{k-1}A^T + Q) = \delta P_k^-\end{aligned} \quad \cdots\cdots (27)$$

위의 조건식을 이용하면 식(28)과 같은 칼만 이득식과 갱신된 공분산 잡음 값으로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}K_k &= P_k^- H^T(HP_kH^T + R)^{-1} \\ \widehat{K_k} &= \delta P_k^- H^T(\delta H P_k^- H^T + \delta R)^{-1} = K_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_k &= (I - K_kH)P_k^- \\ \widehat{P_k} &= (I - K_kH)\widehat{P_k^-} = \delta P_k\end{aligned} \quad \cdots\cdots (28)$$

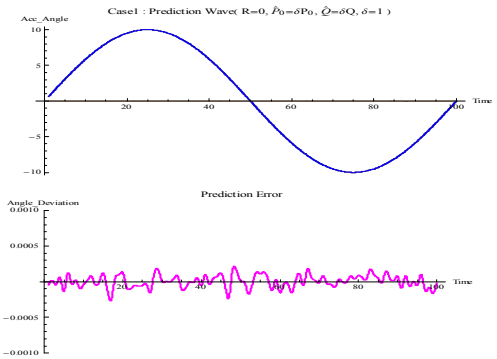
식(26),(27)의 결과로부터 P_0, Q, R값에 대한 스칼라 이득($\delta \neq 0$)에 대하여 동일한 칼만 이득 값으로 회귀하고 있음을 확인할 수 있다. 초기 R=0인 경우나 모든 초기 값이 스칼라 이득을 갖는 경우에 모두 동일한 칼만 이득값과 동일한 공분산 오차 값을 갖는 다는 것을 알 수 있다. 초기 처리잡음 요소인 Q값을 "0"으로 하고 P_0와 R값에 스칼라 이득 값을 부여해도 동일한 결과를 얻을 수 있다.

4.3 칼만 필터 예측 시뮬레이션

앞 절에서 언급한 프로세스 잡음과 측정잡음에 대한 칼만 필터의 예측 값의 추정관계를 확인하기 위하여 이전 절에서 설명한 도립진자 칼만 수학모델을 기반으로 가속도계의 θ값이 다음과 같이 $\pm 10^\circ$의 진동주기로 변화하고 칼만 재귀횟수를 20으로 한 경우 실제 각도의 추적상황을 확인하였다.

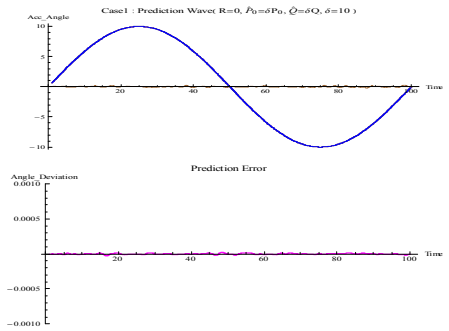
$$\theta[t] = 10\sin[\frac{\pi}{50}t]\ ,\ (cf.\ \ 1 \le t \le 100)$$

시뮬레이션에 적용된 초기 P_0와 Q값은 이전 절의 상태방정식 구성에 사용된 초기 값을 그대로 사용하였으며, 측정 잡음에 해당하는 R의 값은 가우시안 정규분포($\mu = 0, \sigma = 10$)를 측정 잡음 값으로 이용하였다. 4.2절에서 설명한 칼만 재귀추정에 잡음영향으로 작용할 수 있는 스칼라 이득 값 "δ"가 초기 공분산 인자 P_0,Q,R 에 미치는 효과에 대하여 다음과 같은 추정 시뮬레이션을 하였다.



$(\delta = 1,\ R = 0,\ \widehat{Q} = \delta Q,\ \widehat{P_0} = \delta P_0)$

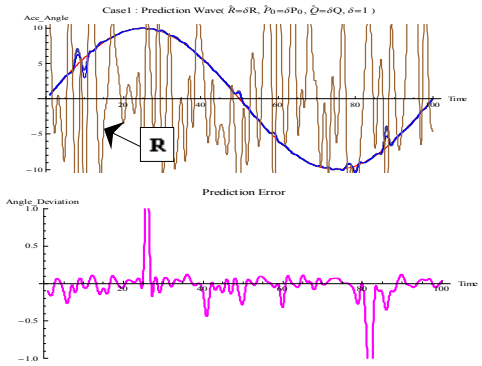
그림 4.2 도립진자 각도 편차와 추적에러
Fig. 4.2 Angle Deviation and Fitting Error of Inverted Pendulum



$(\delta = 10,\ R = 0,\ \widehat{Q} = \delta Q,\ \widehat{P_0} = \delta P_0)$

그림 4.3 도립진자 각도 편차와 추적에러
Fig. 4.3 Angle Deviation and Fitting Error of Inverted Pendulum

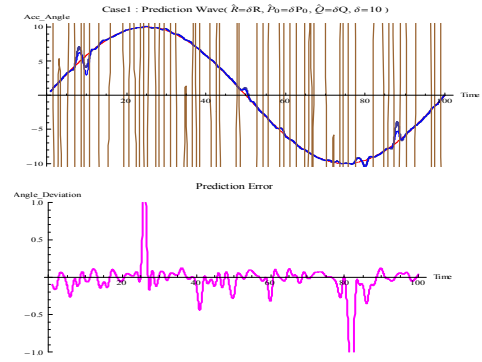
측정 잡음 $R = 0$인 경우 앞 절에서 언급한 프로세스 잡음과 초기 공분산 값에 대한 스칼라 이득의 변화는 칼만 필터의 재귀추적 시스템에 거의 영향을 미치지 않음을 확인 할 수 있었다.



$(\delta = 1,\ \hat{R} = \delta R,\ \hat{Q} = \delta Q,\ \hat{P_0} = \delta P_0)$

그림 4.4 도립진자 각도 편차와 추적에러

Fig. 4.4 Angle Deviation and Fitting Error of Inverted Pendulum

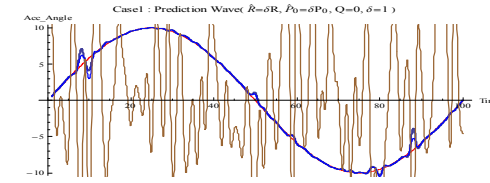


$(\delta = 10,\ \hat{R} = \delta R,\ \hat{Q} = \delta Q,\ \hat{P_0} = \delta P_0)$

그림 4.5 도립진자 각도 편차와 추적에러

Fig. 4.5 Angle Deviation and Fitting Error of Inverted Pendulum

두 번째 시뮬레이션에서는 측정 잡음을 가우스 정규분포를 갖는 랜덤 값으로 하고 스칼라 이득 값을 세 개의 초기인자에 부여한 경우를 확인하였다. 이 경우 역시 스칼라 이득 값의 증가에 따라 추적 에러의 변화는 발생하였으나 최종적인 칼만 필터의 추적결과에는 거의 영향을 미치지 않음을 확인할 수 있었다.

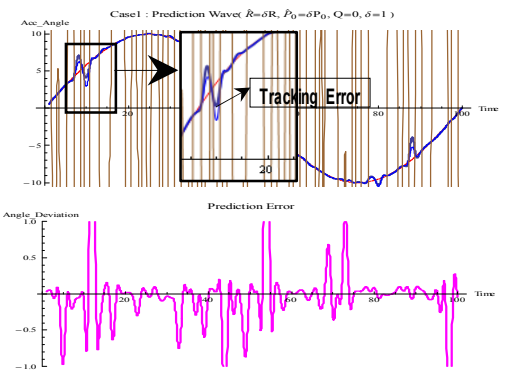


$(\delta = 1,\ \hat{R} = \delta R,\ Q = 0,\ \hat{P_0} = \delta P_0)$

그림 4.6 도립진자 각도 편차와 추적에러

Fig. 4.6 Angle Deviation and Fitting Error of Inverted Pendulum

마지막으로 시스템 처리잡음이 없는 것으로 하고 측정 잡음만 존재하는 경우 초기 공분산 값과 측정 잡음이 스칼라 이득 값에 영향을 받는 시뮬레이션 결과에서도 칼만 필터의 재귀 추적시 일부 시간대에서 진동 잡음이 부분적으로 발생하였으나 전체적으로 칼만 필터의 추적결과에는 영향을 미치지 않음을 확인할 수 있었다.



$(\delta = 10,\ \hat{R} = \delta R,\ Q = 0,\ \hat{P_0} = \delta P_0)$

그림 4.7 도립진자 각도 편차와 추적에러

Fig. 4.7 Angle Deviation and Fitting Error of Inverted Pendulum

V. 결 론

도립진자(Inverted Pendulum)에 관련된 연구는 최근 들어 가장 활발하게 연구가 진행되고 있는 분야중 하나이다. 본 논문에서는 도립진자의 고전적 수학 모델인 상태방정식의 구성과 상태 제어인자를 이용한 PID 수학모델 그리고 칼만필터 재귀적 수학모델의 개념을 근거로 도립진자의 상태방정식 모델을 구성하고, 칼만 필터의 재귀적 예측 시스템에 영향을 미치는 초기 잡음인자의 이득 δ의 영향에 대하여 수학적 증명과 시뮬레이션 결과로 타당성을 입증하고자 하였다. 도립진

자 상태 방정식의 초기 가속도계 값은 15 rad, Q값에 영향을 미치는 가속도계와 자이로계의 처리 잡음 값은 0.005로 하였으며 칼만 필터의 갱신 주기는 0.1, 각속도는 3 rad을 초기 값으로 처리하였다.

본 연구의 결과 칼만 필터의 재귀 추적에 영향을 미치는 칼만 게인 K값은 공분산 행열의 이득에 거의 영향을 미치지 않기 때문에 특정 상황에서 잘못된 잡음이득을 갖는 공분산의 값을 나타내더라도 상태 측정값은 불변의 상태를 유지하여 최적의 추적 성향을 나타내고 있음을 확인할 수 있었다. 결론적으로 잡음 공분산 행열은 시스템에서 발생된 상태값의 영향만 받게되며 외부 영향인자인 스칼라 이득 δ로 처리된 공분산 행열 값은 원 신호의 재귀추적에 거의 영향을 미치지 않음을 확인할 수 있었다.

감사의 글

이 연구는 2009학년도 인덕대학 학술연구비 지원으로 연구 되었음.

참고문헌

[1] Charles L.Phillips,John M.Parr and Eve A.Riskin ,"Signals,System and Transforms," Fourth Edition, 2008

[2] Astrom,K.J. and K.Furuta, "Swinging up a Pendulum by Energy Control," Automatica, Vol.36, 2000

[3] K.Furuta, T. Okrtani, and H. Sone. Computer control of a double inverted pendulum. Computer and Electrical Engineering, 5:67-84, 1978.

[4] K.Yoshida, "Swing-Up Control of an Inverted Pendulum by Energy-Based Methods," in Proceeding of the American Control Conference, pp.4045-4047, 1999.

[5] A.Ohsumi and T.Izumikawa,"Nonlinear Control of Swing-up and Stablization of an Inverted Pendulum," in Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control,pp.3873-3880 ,1995.

[6] E.Foxlin,"Inertial Head-Tracker Sensor Fusion by a Complementary Separate-Bias Kalman Filter," IEEE Proceedings of VRAIS '96,pp185-194,1996.

[7] Daniel Roetenberg,Per J.Slycke, and Peter H. Veltink, "Ambulatory Position and Orientation Tracking Fusing Magnetic and Inertial Sensing," IEEE Transcations on Biomedical Engineering,Vol. 54,No.5,May 2007.

[8] Microchip Inc. "AN964-Software PID Control of an Inverted Pendulum Using the PIC16F684",2004

[9] R.G.Brown and P.Y.C.Hwang, Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, Newyork, Wiley,1992

[10] K.M.Raman, "On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering," IEEE Transactions on Automatic Control,vol.AC-15, pp175-184,April 1970.

[11] Tom Pycke, "Kalman Filtering of IMU data," *http://tom.pycke.be/mav/71/kalman-filtering-of-imu-data*

[12] S.Sangsuk-Iam, and T.E.Bullock, "Analysis of Discrete-Time Kalman Filtering under Incorrect Noise Covariances," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-35, pp.1304-1309, December 1990

저 자 소 개

김 훈 학

1985 : 성균관대학교 전자공학과 공학사

1987 : 성균관대학교 전자공학과 공학석사

1992 : 성균관대학교 전자공학과 공학박사

1997 : Information Technology Course at the Eurasian Faculty of Sofia Antipolis, Nice, France

1989~ : 인덕대학 컴퓨터전자과 교수

관심분야: 마이크로콘트롤러 응용, 임베디드 시스템, 디지털신호처리