

급힌 동전의 확률[†]

우덕관¹ · 오창혁²

¹ 송곡대학 사회복지상담과, ² 영남대학교 통계학과

접수 2009년 12월 22일, 수정 2010년 1월 14일, 게재확정 2010년 1월 21일

요약

동전을 이용하여 확률의 개념을 가르치는 일은 오랫동안 이루어져 왔으며, 통계 교과서에는 공정한 동전과 그렇지 않은 동전에 관한 많은 문제가 제시되고 있다. 그러나, 공정하지 않은 동전을 실제로 만나본 사람은 없는 것으로 알려져 있다. 본 연구에서는 확률 학습에 사용될 공정하지 않은 동전으로 가운데가 굽혀진 동전을 제시한다. 또한, 여러 가지 각도로 굽혀진 동전의 앞면이 나올 확률을 던지기 실험을 통하여 추정한다. 굽혀진 동전은 통계학 수업에서 공정하지 않은 동전을 다루는 경우에 실습용으로 사용될 수 있을 것이다.

주요용어: 가운데 굽히기, 공정하지 않은 동전, 던지기 실험.

1. 서론

동전은 확률의 개념을 가르치기 위한 실험의 도구로 사용되어 왔으며 현재도 사용되고 있다. Gelman과 Nolan (2002)은 동전 던지기를 통하여 가설검정과 다중비교를 비롯한 여러 가지 통계 개념과 기법을 가르치는 방법을 소개하였다. Dunn (2005)은 동전 던지기에서 변화를 주어서 확률을 흥미있게 가르치는 방법을 소개하였다. Küchenhoff (2008)는 동전 던지기를 통하여 표본의 크기 정하기, 가설 검정, 가정의 확인, 독립성 등의 개념을 교육하는 방법을 소개하였다.

통계 교육을 위한 연구는 동전이나 주사위를 사용하는 외에도 다양한 방법에 대한 많은 연구가 있어왔다 (Oh 외, 2006; Choi, 2004; Choi, 2006; Kim과 Oh, 2003).

동전을 이용하는 확률 계산 문제는 공정한 동전 뿐만 아니라 공정하지 않은 동전 즉, 편향 동전도 다룬다. 일상 생활에서 흔히 접할 수 있는 주화는 공정한 동전으로 간주되어 공정한 동전에 대한 확률 계산을 실험할 때 사용된다. 주화의 공정성을 알아보기 위한 동전 던지기 실험은 오래 전부터 있어 왔다. 예를 들면 Kerrich (1946)는 1941년에 동전을 10,000번 던져서 5,067번의 앞면을 관찰하고 동전이 공정하다고 주장하였다. 한편, Debora (2002)의 기사에는 통계학 교사 Tomasz Gliszczynski와 Wacław Zawadowski의 벨기에 유로 주화가 공정하지 못하다는 주장을 실었다.

한편으로는 공정하지 않은 동전 혹은 동전을 닮은 물체에 대한 관심도 있어 왔다. Smith (1984)는 biased coin design 이라는 용어를 사용하였으며, Stout와 Warren (1984)은 공정하지 않은 동전을 이용한 공정한 동전 던지기 알고리즘에 대한 연구를 하였다. Uehara (1995)는 공정하지 않은 동전을 사용한 시뮬레이션 방법을 연구하였다. Itoh (1996)와 Gargano와 Vaccaro (1999)는 공정하지 않은 동전을 사

[†] 이 연구는 2009학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.

¹ (200-911) 강원도 춘천시 남산면 창촌리 1, 송곡대학 사회복지상담과, 부교수.

² 교신저자: (712-749) 경상북도 경산시 대동 214-1, 영남대학교 이과대학 통계학과, 교수.

E-mail: choh@yu.ac.kr

용한 공정한 주사위 던지기를 시뮬레이션하는 방법을 연구하였다. Abrahams (1996)은 공정하지 않은 동전을 사용한 이산분포의 시뮬레이션 방법을 연구하였다. Gossner와 Vieille (2002)은 공정하지 않은 동전을 사용하는 게임에서의 최적 전략에 관하여 연구를 하였다. Kerrich (1946)는 한쪽은 나무, 다른 한쪽은 납으로 된 원판을 던지기 실험을 하였으며 1,000회 시행하여 679번 앞면을 얻었다. Gelman과 Nolan (2002)은 공정하지 않은 동전을 만들기 위한 시도로 동전의 한쪽 면 또는 양쪽 면에 껌을 붙인 후 던지기 실험을 한 후 내린 결론은 편향 동전은 확률론에서의 유니콘이다 - 모두가 들어본 적은 있지만 만나본 사람은 아무도 없다 는 것이다.

Gelman과 Nolan (2002)은 동전 자체 보다는 던지는 방법에 의해 앞면이 나올 확률이 결정된다는 것을 실험을 통해 발견하였다. 즉, 자신들의 통계학 강의 시간에 학생들로 하여금 동전의 한쪽 면 또는 양쪽 면에 껌을 붙이게 한 후 이를 던져 앞면이 나올 확률을 조사하게 한 결과 껌을 붙이는 것은 동전의 공정성을 바꾸지 않음을 발견하였다. Grunkemeier 외 (2009)는 이러한 사실을 인용하여 던지는 방법이 적절하다면, 물리적으로 편향된 동전을 만드는 것은 가능하지 않다 라고 주장하였다. Diaconis *et al.* (2007)도 한쪽 면은 나무 다른 한쪽 면은 납으로 만든 동전을 던지는 실험을 하여 편향성이 없음을 보고 하였다.

Gelman과 Nolan (2002)의 실험에서 사용한 동전 던지기의 방법은 회전, 튕기기, 던지기의 방법으로, 던지는 방법을 달리하면 앞면이 나올 확률을 조절할 수 있다는 것을 발견하였다. 이러한 사실은 Clark와 Westerberg (2009)의 주화 던지기 실험에서도 확인되었다. Diaconis *et al.* (2007) 과 Strzalko *et al.* (2008)은 회전던지기에 의한 앞면이 나올 확률에 대한 역학에 관한 연구를 하였다.

Gelman과 Nolan (2002)이 동전을 변형한 방법은 기본적으로 동전의 형태를 유지한 채 무게 중심을 바꾸는 시도였다. 본 연구에서는 동전을 굽히는 방법으로 앞면이 나올 확률이 1/2이 아닌 동전을 만드는 방법을 소개한다. 이 경우에 굽혀진 동전이 엄밀한 의미에서 동전이라고 할 수 있는지에 대한 논의는 별개로 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2절에서는 동전을 던지는 행위에 대한 우연성과 동전이 우연성을 보존해 주는 매체인지에 대하여 고찰한다. 제 3절에서는 동전의 정의, 동전의 변형방법을 다루며, 던지기 실험을 하고 이에 따른 결과를 살펴본다. 마지막 절은 토의와 결론에 관한 것이다.

2. 동전의 던지기에 대한 우연성의 고찰

공정한 동전 던지기에 대한 논의를 할 때 세 가지로 구분해서 살펴 볼 수 있다. 첫째는, 동전 던지기에서 던지는 행위 자체가 우연성을 가지고 있는가? 또한 주어진 동전이 던지기에서 우연성을 보존해 주는 매체인가? 그리고 던져진 후의 환경이 우연성을 보존해 주는가?

하나의 동전을 던질 때, 환경이 같고 던지는 모양이 같다면 항상 같은 결과가 나와야 한다 (Diaconis *et al.*, 2007; Strzalko *et al.*, 2008). 그러나, 동전을 던질 때, 동전의 높이, 동전의 위상, 던져지는 각도, 가해지는 힘의 방향과 크기 등이 같지 않으므로 나오는 결과에 변이가 발생한다.

동전을 던지는 행위의 우연성을 가지고 있다고 일반적으로 믿고 있으나, 마술사와 같은 특별한 훈련을 받은 사람은 던지는 행위의 우연성을 억제하여 항상 원하는 결과를 얻게된다.

던지는 행위에서 우연성을 보장하기 위하여 Gelman과 Nolan (2002)은 컵에 동전을 넣어서 적당히 높은 곳에서 던지는 방법을 사용하였다. 또한, 일반적으로는 적당히 높은 위치에서 검지를 구부리고 그 위에 동전을 넣은 후 동전을 엄지손가락으로 튕겨낸다. 어떤 경우에는 동전을 바닥에 수직으로 세우고 동전의 한쪽 끝을 튕겨서 동전이 회전하도록 한다.

동전 던지기에서 던지는 행위가 우연적이지 않게 하는 방법은 동전의 면을 바닥에 평행되게 한다음 회전을 주어 던지는 경우이다. 또한 바닥에 아주 가까이 하여 예를 들면 바닥 위 1cm 위에서 살짝 놓는 경

우가 이에 해당된다.

한편 주어진 동전이 우연적 행위를 보장해 주는 우연성 보존 물체인가라는 질문을 할 수 있다. 즉, 동전을 던지는 방법에서 동전을 던질 때의 상태가 우연적이라고 가정할 때, 동전의 앞면과 뒷면이 나올 확률이 0.5가 되는가? 던지는 행위가 우연적이고 동전이 지나는 궤도와 착지점의 환경의 우연성을 보장한다면, 동전 자체가 우연성을 보장하는지에 대한 고찰이 필요하다. 일반적인 주화는 우연성을 보장하는 것으로 알려지고 있다.

한편으로, 동전을 구성하는 매질에 변화를 주는 행위 예컨대, Gelman과 Nolan (2002)처럼 금속 물질로 된 동전의 한쪽 면 또는 양쪽 면에 껌을 평평하게 붙이거나, Kerrich (1946)나 Diaconis *et al.* (2007)처럼 한쪽 면은 나무로, 다른 한쪽 면은 납으로 된 원판을 만들어, 무게 중심을 변화하게 하는 행위는 동전의 우연성을 바꾸지 않는 것으로 알려져 있다.

3. 편향 동전을 위한 변환과 던지기 실험

동전이란 무엇인가? 네이버 국어사전에는 동그랗게 생긴 모든 돈을 통틀어 이르는 말 이라고 나와 있다. 또한, Merriam-Webster OnLine 사전에 의하면 a usually flat piece of metal issued by governmental authority as money 라고 나와 있다. 그러나, 일반인들은 이러한 사전적 정의에 앞서 ‘10원짜리 동전’ 혹은 ‘1 € coin’과 같은 표현의 사용에서와 같이 동전의 모양에 대한 많은 경험과 확고한 개념을 가지고 있다고 할 수 있다. 즉, 동전이란 “금속으로 주조된 작은 원판이며, 화폐로 사용된다”는 것이다.

동전던지기 실험에서의 ‘동전’은 주화로서의 동전을 포함하는 넓은 개념으로 다루어졌다. Gelman과 Nolan (2002)은 동전의 한쪽 면 또는 양쪽 면에 평평하게 껌을 붙여서 즉 무게 중심의 변화를 준 원판 던지기 실험을 하였다. Kerrich (1942)도 한 면은 나무, 다른 한 면은 납으로 된 원판을 붙여 무게 중심을 이동시킨 원판 던지기 실험을 하였다. 이들의 실험매체는 궁극적으로 원판의 형태를 유지하고 있었으므로 전통적인 동전의 형태를 유지하고 있었다. 원판이라고 하는 것은 엄밀히 말하면 원기둥이며, 동전에 껌을 붙이는 것은 원기둥의 높이를 변형시키는 것이 된다. 따라서 확률 실험에 사용되는 동전은 원기둥 물체라고 할 수 있다. Mosteller (1987)는 동전을 원기둥으로 정의하고, 모서리가 나올 확률이 1/3이 되기 위해서는 동전이 얼마나 두꺼워야 하는지에 관한 문제를 제시하고 주어진 조건 하에서 해를 구하였다. 이러한 맥락 속에서 본다면, 동전의 일반적인 모양은 그림 3.1과 같은 원통형이다.



그림 3.1 일반적 동전의 개형도

동전의 변형 방법. Gelman과 Nolan (2002)은 동전의 한 면 또는 양쪽 면에 껌을 붙여 양쪽의 무게의 대칭성을 바꾸었다. Kerrich (1946)는 나무 원판의 한쪽 면에 납을 붙여서 양쪽의 무게의 대칭성을 바꾸었으며, 책상 위에 짧은 거리에서 던져 튀기도록 하였다. Gelman과 Nolan (2002)은 Kerrich (1946)의 던지는 방법에 문제가 있음을 지적하면서, 동전의 무게의 대칭성을 바꾸는 것은 동전의 공정성에 영향을 미치지 않는다고 하였다. 따라서, 본 연구에서는 동전의 무게의 대칭성을 바꾸는 대신, 동전의 가운데를 일정한 각도로 굽혀서 동전을 공정하지 않게 만드는 방법을 제시한다. 동전은 가운데를 굽

혀 그림 3.2와 같이 가운데의 각도가 θ 가 되게 하였다. 그림 3.2의 첫 번째 그림은 평면도이며 두 번째 그림은 측면도이다.

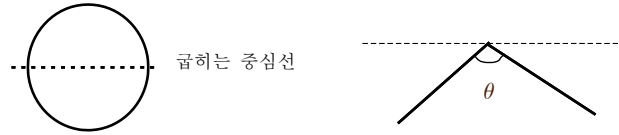


그림 3.2 동전의 굽히는 중심선과 중심각 θ

동전을 구부리는 경우에, 구부러진 동전을 동전으로 간주하느냐 마느냐의 문제는 기존의 연구에서 다른 문헌은 발견할 수 없었다. 굽혀진 동전은 원통형이 아니며 그림 3.3과 같은 형태로 변형되게 된다.



그림 3.3 굽혀진 동전

본 논문에서는 동전 던지기에 대한 행위에 대하여 다음과 같이 다섯 가지의 방법에 대한 용어를 정의한다.

튀기기: 검지 위에 동전을 얹고 하늘을 향해 엄지로 동전을 튀기는 행위.

던지기: 동전을 엄지와 검지로 잡고 하늘을 향해 던지는 행위.

킵던지기: 동전을 킵 안에 넣고 킵을 서너 번 흔든 후 하늘을 향해 던지는 행위.

회전던지기: 동전의 면을 바닥과 평행되게 한 후 바닥과 평행되게 회전하면서 던지는 행위.

바닥회전시키기: 동전을 바닥에 수직으로 세워서 한 손가락을 잡고 있으면서 다른 손의 검지 또는 중지로 동전의 한 쪽 끝을 튕겨서 회전시키는 행위.

이들 방법 외에도 여러 가지의 던지기 방법이 있을 수 있다. 또한, 이들 던지기 방법의 우연성의 비교를 위한 연구 결과는 저자의 검색 범위 내에서는 찾을 수 없었다. 본 실험에서는 위의 다섯 가지 동전 던지기 방법 중 ‘던지기’를 채택하며, 동전을 던질 때는 평평하고 딱딱하고 매끈한 시멘트 바닥에 던진다. 던지기는 네 명의 학생이 번갈아 가면서 동전을 던졌다. 학생들은 동전의 특정한 면이 나오는 것에 대한 선호도가 전혀 없는 상황 하에서 던지도록 하였다. 던지는 자세는 바닥에 책상 다리를 하고 앉아서 동전을 가슴 높이 정도로 던지도록 하였다. 여기에서 ‘던지기’를 채택한 이유는 학생들이 던지기에 대하여 특별한 훈련을 받은 적이 없으며 어느 면이 더 많이 나와야 하는지에 대한 결과 예측이 없으므로 동전을 잡고 던지는 것이 던지는 행위에서의 우연성을 훼손하지 않는다고 믿었기 때문이다.

동전의 제작. 동전을 주어진 중심각에 따라 굽히는 일은 전문철공소에 의뢰하였다. 그림 3.2에서 중심각 θ 는 160° (20°) 80° 로 모두 5가지로 하였다.

실험 결과. 각 중심각의 동전에 대하여 400번의 던지기를 시행하였다. 시행에 따른 앞면의 개수와 비율을 표 3.1에 제시하였다. 그리고 이들 비율을 그림 3.4에 표시하였다. 전체적으로 주어진 모든 중심각에 대하여 앞면의 비율은 0.5보다 크다. 또한 중심각이 100° 와 120° 인 경우 둘 다 앞면의 비율이

0.5725의 같은 값을 나타내고 있다. 이는 400회의 시행에서 나타날 수 있는 변이라고 판단된다. 따라서 앞면의 비율이 안정적인 값이 되기 위해서는 각 중심각의 동전에 대하여 던지기 시행 회수를 더 늘려야 함을 의미한다. 그러나 전체적으로는 중심각이 작아지면 앞면의 비율이 커지는 현상을 보이고 있다.

표 3.1 동전 던지기 실험의 결과

굽힌 각도	앞면 횟수	앞면 비율
160	203	0.5075
140	226	0.5650
120	229	0.5725
100	229	0.5725
80	248	0.6125

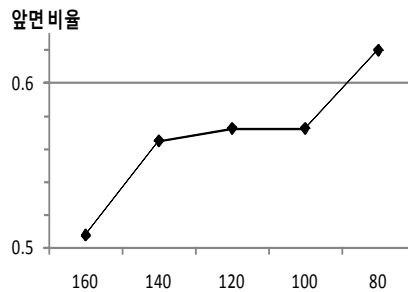


그림 3.4 던지기 400회 시행에 대한 중심각에 따른 앞면 비율

4. 논의와 결론

공정하지 않은 동전을 만들기 위하여 동전의 가운데 부분을 굽히는 방법을 채택하였다. 굽히는 각도에 따른 앞면이 나올 확률을 킵던지기 실험을 통하여 경험적으로 확인하였다. 이러한 동전은 공정하지 않은 동전 던지기 실험에 관한 통계학 수업에서 활용될 수 있을 것이다. 즉, 앞면이 나올 확률이 1/2이 아닌 동전을 학생들이 접할 수 있게 될 것이다. 굽히는 각도에 따라 앞면이 나올 확률이 달라지는 물리적 원리는 추가로 연구되어야 할 과제라고 생각한다. 또한 굽혀진 동전을 튕기기, 던지기, 회전던지기, 바닥회전시키기의 방법으로 던져서 경험적 확률을 구해보는 실험도 의미가 있을 것이며 추후 연구 과제로 남겨둔다.

굽혀진 동전을 동전이라고 할 수 있을까? 이제까지 확률계산을 위해 문헌에서 다루어진 동전의 개념에서 보면 동전의 범위를 벗어난다. 그러나, 학습활동을 위한 매체로서의 동전을 고려한다면 굽혀진 동전도 좋은 학습매체가 될 수 있다. 굽혀진 동전도 동전이다.

참고문헌

- Abrahams, J. (1996). Generation of discrete distributions from biased coins. *IEEE Transactions on Information Theory*, **42**, 1541-1546.

- Boppana, R. B. and Narayanan, B. O. (1996). The biased coin problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **9**, 29-36.
- Choi, H. (2004). The development of program for teaching on statistical inference at one population. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **15**, 543-554.
- Choi, H. (2006). A program for teaching type I and type II errors. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **17**, 19-30.
- Clark, M. P. A. and Westerberg, B. D. (2009). How random is the toss of a coin? *Canadian Medical Association Journal*, **181**, E306-E308.
- Diaconis, P., Holmes, S. and Montgomery, R. (2007). Dynamical bias in the coin toss. *SIAM Review*, **49**, 211-235.
- Dunn, P. K. (2005). We can still learn about probability by rolling dice and tossing coins. *Teaching Statistics*, **27**, 37-41.
- Gargano, L. and Vaccaro, U. (1999). Efficient generation of fair dice with few biased coins. *IEEE Transactions on Information Theory*, **45**, 1600-1606.
- Gelman, A. and Nolan, D. (2002). You can load a die, but you can't bias a coin. *The American Statistician*, **56**, 308-311.
- Gossner, O. and Vieille, N. (2002). How to play with a biased coin? *Games and Economic Behavior*, **41**, 206-226.
- Grunkeimeier, G. L., Wu, Y. and Furnary, A. P. (2009). What is the value of a p value? *The Annals of Thoracic Surgery*, **87**, 1337-1343.
- Itoh, T. (1996). Simulating fair dice with biased coins. *Information and Computation*, **126**, 78-82.
- Kerrich, J. E. (1946). *An experimental Introduction to the theory of probability*, Belgisk import compagni, Copenhagen.
- Kim, H. and Oh, K. (2003). Web learning guidance for elementary school students. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **12**, 223-236.
- Küchenho, H. (2008). Coin tossing and spinning - useful classroom experiments for teaching statistics. In: Shalab and C. Heumann Editors, *Recent Advances in Linear Models and Related Areas*, Springer, Berlin, 417-426.
- MacKenzie, D. (2002). Euro coin accused of unfair flipping. *NewScientist*, 04 January, 2002.
- Mosteller, F. (1987). *Fifty challenging problems in probability with solutions*, Dover, New York.
- Oh, C., Lee, S. and Lee, H. J. (2006). A web-based SAS system for lab statistics. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **17**, 395-400.
- Smith, R. L. (1984). Properties of biased coin designs in sequential clinical trials. *The Annals of Statistics*, **12**, 1018-1034.
- Stout, Q. F. and Warren, B. (1984). Tree algorithms for unbiased coin tossing with a biased coin. *The Annals of Probability*, **12**, 212-222.
- Strza koa, J., Grabskia, J., Stefaskia, A., Perlikowskia, P. and Kapitaniak, T. (2008). Dynamics of coin tossing is predictable. *Physics Reports*, **469**, 59-92.
- Uehara, R. (1995). Efficient simulations by a biased coin. *Information Processing Letters*, **56**, 245-248.

Bent coin toss probability[†]

Dukkwan Woo¹ · Changhyuck Oh²

¹Department of Social Welfare, Songgok College

²Department of Statistics, Yeungnam University

Received 22 December 2009, revised 14 January 2010, accepted 21 January 2010

Abstract

It is generally believed that teaching probability with the help of coin tossing has a long history. In textbooks about elementary probability or statistics, problems on unfair coins as well as fair ones are frequently given. However it is known that nobody has met an unfair coin with a fixed head probability which is different from 0.5 in flesh and blood. In this study a coin bent along with the middle line of the coin is suggested as an unfair one. By flipping bent coins with various angle, the ratios of head of the coins are obtained. The bent coins might be used as experimental tools for teaching of probability concept.

Keywords: Bent coins, methods of coin-flip, unfair coin.

[†] This research was supported by the Yeungnam University research grants in 2009.

¹ Associate Professor, Department of Social Welfare, Songgok College, Gangwon 200-911, Korea.

² Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Yeungnam University, Kyeonbuk 712-749, Korea. E-mail: choh@yu.ac.kr