

비정상 다상유동의 효율적 수치모사를 위한 VOF가 적용된 Fractional Step 기법

이 경 준,¹ 양 경 수,^{*2} 강 창 우¹

FRACTIONAL STEP METHOD COMBINED WITH VOLUME-OF-FLUID METHOD FOR EFFICIENT SIMULATION OF UNSTEADY MULTIPHASE FLOW

Kyongjun Lee,¹ Kyung-Soo Yang^{*2} and Changwoo Kang¹

Fractional Step Methods(FSM) are popular in simulation of unsteady incompressible flow. In this study, we demonstrate that FSM, combined with a Volume-Of-Fluid method, can be further applied to simulation of multiphase flow. The interface between the fluids is constructed by the effective least squares volume-of-fluid interface reconstruction algorithm and advected by the velocity using the operator split advection algorithm. To verify our numerical methodology, our results are compared with other authors' numerical and experimental results for the benchmark problems, revealing excellent agreement. The present FSM sheds light on accurate simulation of turbulent multiphase flow which is found in many engineering applications.

Key Words : 다상유동(Multi-Phase Flow), 유체체적법(Volume-Of-Fluid Method), 다단계방법(Fractional Step Method), 자유표면(Free Surface)

1. 서 론

자유표면 또는 물질 경계면을 가지는 복잡한 다상유동은 공학적으로 많은 분야에서 응용되고 있다. 연속주조 공정, 선박유동, 얇은 막을 만드는 공정, 연료분사장치 등에서 이상간 경계면의 정확한 해석은 필수 요소이다. 그러나 경계면에서 물성치가 급격히 변하는 경우에는 수치적으로 불안정하여 수치해석의 어려움을 가중시킨다.

물질 경계면이 존재하는 유동에 대한 해석방법으로는 일반적으로 크게 Lagrangian 격자기법, Eulerian 격자기법, 또는 두 방법을 조합한 ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 기법[1,2] 등으로 분류할 수 있다[3]. Lagrangian 격자기법[4,5]은 자유표면

을 이동 격자계를 통해 독립적으로 추적하는 기법으로 가장 정확하게 경계면을 표현할 수 있다. 경계면의 위치를 이동 격자계를 이용하여 추적하기 때문에 수치 확산에 의한 오차가 없으며, 격자의 크기가 충분히 크지 않더라도 경계면이 매우 복잡한 기하학적 형태를 효과적으로 표현할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 또한 경계면의 경계조건을 정확한 위치에 적용할 수 있다. 그러나 경계면을 표현하기 위한 Lagrangian 격자계가 서로의 논리적인 위치를 항상 가지고 있어야 하기 때문에 이에 대한 계산 부담이 매우 커지게 된다. 특히 기하학적인 변형을 통해 서로 다른 경계면이 합쳐지거나 분리되는 경우, 구현하기가 어렵다. 이 경우 격자계가 심하게 뒤트리게 되어 유동장의 정확도와 수렴성이 떨어진다. 또한 격자점의 수가 계속 변하여 매번 자유 표면 이동 후에 re-meshing 또는 re-zoning 작업을 수행해야 하므로 계산 시간이 길어지게 된다.

Eulerian 방법은 고정된 기준 격자계를 이용하여 경계면을 해석하는 방법이다. 초기에 생성한 격자계가 전체 계산 과정 동안 사용되기 때문에 기하학적 형상과 관련한 문제가 발생하지 않는다. 고정 격자를 사용함으로써 인해 수렴성이 좋고,

접수일: 2010년 11월 19일, 수정일: 2010년 12월 15일,

계제확정일 : 2010년 12월 17일.

1 정회원, 인하대학교 대학원 기계공학과

2 정회원, 인하대학교 기계공학과

* Corresponding author, E-mail: ksyang@inha.ac.kr

계산 시간을 줄일 수 있으며, 3차원으로 확장이 쉽다. 그러나 고정 격자계를 사용하게 되면, 자유 표면의 위치를 추적하는 추가적인 알고리즘이 필요하게 된다. 대표적인 방법으로는 MAC(Maker And Cell)[6], Level-Set[7], VOF(Volume Of Fluid)[8] 등이 있다.

MAC방법은 자유표면이 통과하는 각 요소(cell) 속에 marker라는 여러 개의 표류점들을 뿌려서 그들의 움직임을 추적하여 자유표면의 위치를 정하는 것이다. 이 방법은 자유표면이 서로 겹치는 경우에도 별 어려움이 없으나, 개개의 표류점 추적을 위한 많은 기억용량과 계산시간이 소요되는 단점이 있다. Level-Set방법은 경계면으로부터 떨어진 거리 함수를 시간에 따라 추적하는 방법으로, 경계면의 복잡한 형상을 자동적으로 해결할 수 있으며, 코드화가 비교적 간단하며, 상대적으로 자유표면의 곡률을 정확히 구현할 수 있다는 장점을 가지지만, 계산과정 중 질량손실이 발생하게 된다. VOF 방법은 각 cell마다 정의되는 용적함수 f (volume fraction)를 시간에 따라 추적하여 경계면을 재구성하는 방법으로, 질량이 계산과정에서 정확히 보존된다는 장점이 있어 가장 보편적으로 사용되어지고 있다. 그러나 경계면의 형태가 연속적이지 않아 상표면의 영향을 정확하게 고려하기 힘들며, 정확한 경계면의 곡률을 구하기가 어렵다. VOF 방법은 90년대 중반까지는 단순화시킨 SLIC 방법[9]이나 SOLA-VOF[8] 알고리즘 등을 사용한 여러 종류의 해석 코드들이 개발되었으며, Pillod and Puckett[10]에 의한 2차 정확도의 PLIC(Piecewise Linear Interface Calculation)방법이 현재 널리 사용되고 있다. 액적이거나 기포 등의 해석에 중요한 표면장력효과를 위하여 CSF(Continuum Surface Force)모델을 널리 사용하면서 경계면의 곡률을 정확하게 구현하기 위한 노력이 시도되고 있다. 최근에는 Sussman and Puckett[11]이 VOF 방법과 Level-Set 방법을 상호 보완하는 CLSVOF(Coupled Level Set and Volume-Of-Fluid)방법을 제시하기도 하였다.

유동의 지배방정식을 해석하는 여러 가지 방법 중에서 Fractional Step Method(FSM)[12]는 비정상 유동 해석에 많이 사용되고 있다. 운동량 방정식을 만족하는 속도장을 먼저 구한 후 연속 방정식을 만족하기 위해 속도장과 압력장을 보정해 주게 된다. 최근에 Kim and Lee[13]는 FEM(Finite Element Method)과 FSM을 기반으로 다상유동을 해석하였다. 본 연구에서는 정렬된 직교 좌표계에서 유한체적법(FVM: Finite Volume Method)과 FSM을 기반으로 한 VOF 방법을 통해 다상유동을 빠르고 정확하게 해석할 수 있는 코드를 개발하였고, 이를 여러 가지 benchmark 문제들을 통해 검증하였다. 본 연구의 결과는 다양한 공학 분야에서 발생하는 난류 다상유동의 정확한 해석에 적용될 수 있다.

2. 수치해석 방법

다상유동의 지배 방정식은 연속방정식, 운동량 방정식, 이송방정식으로 구성되며 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\rho \partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu u_i}{\partial x_j} \right) + F_s + F_b \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (u_j f)}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

이때 F_s 는 표면 힘, F_b 는 체적 힘을 의미한다. 설명의 편의를 위해서 두 물질을 액체, 기체 즉 이상유동(two-phase flow)으로 가정하면, $f_{i,j,k}$ 는 각 (i, j, k) 번째 cell에서 차지하는 액체의 부피비로 다음과 같이 정의한다.

$$f_{i,j,k} = \frac{\text{Volume of Liquid}}{\text{Volume of Cell}} \quad (4)$$

즉 $f_{i,j,k}$ 값이 1이면 액체, 0이면 기체, 0과 1 사이면 두 물체의 경계를 나타낸다. $f_{i,j,k} \Delta x \Delta y \Delta z$ 은 (i, j, k) 번째 cell에서 액체가 차지하는 부피가 되며, 기체의 부피는 자연스럽게 $(1 - f_{i,j,k}) \Delta x \Delta y \Delta z$ 이다. 각 cell에서 물질들의 부피비가 정해지면, 밀도와 점성계수는 다음과 같이 정의된다.

$$\rho = f_{i,j,k} \times \rho_1 + (1 - f_{i,j,k}) \times \rho_2 \quad (5)$$

$$\mu = f_{i,j,k} \times \mu_1 + (1 - f_{i,j,k}) \times \mu_2 \quad (6)$$

이때 ρ_1, μ_1 는 액체의 밀도와 점성계수, ρ_2, μ_2 는 기체의 밀도와 점성계수이다.

2.1 재구성(Reconstruction) 알고리즘

다상 유동의 해석에서 가장 중요한 과정은 정확한 경계면을 추적하는 것이다. VOF 방법에서는 실제로 경계면을 추적하는 것이 아니라 용적함수 f 값을 추적하게 된다. 특정 시간에 공간에 대하여 주어진 스칼라 함수인 f 값을 이용하여 경계면을 형성하는 과정을 재구성(reconstruction)이라고 한다.

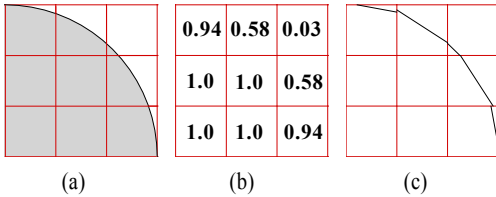


Fig. 1 Reconstruction process; (a) true interface, (b) volume fractions associated with the interface, (c) Piecewise Linear Approximation

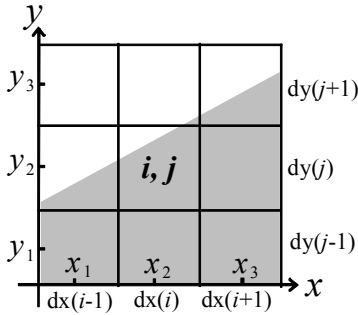


Fig. 2 Reconstruction of a line that cuts opposite sides of a 3×3 block of (i,j) cell

Fig. 1 (a)는 특정 시간에서의 두 물질 사이의 실제 경계면을 나타낸 것이다. Fig. 1 (b)는 f 의 분포를 나타내었다. f 값이 1.0 인 cell은 액체로 구성된 cell이며 0과 1 사이의 값을 가지는 cell은 두 물질의 경계면을 나타낸 것이다. Fig. 1 (c)는 재구성된 경계면을 나타내었다. 경계면에서 액체에서 기체 방향으로 크기가 1인 단위 수직 벡터(unit normal vector)를 $\mathbf{n}=(n_x, n_y, n_z)$ 으로 두면 직선을 $n_x x + n_y y = d$ (3차원인 경우 $n_x x + n_y y + n_z z = d$)으로 가정할 수 있다. 경계면은 국소선형근사(Piecewise Linear Approximation)를 통해서 직선(3차원인 경우 평면)형태로 재구성하게 된다. 본 연구에서는 ELVIRA(Effective Least squares Volume-of-fluid Interface Reconstruction Algorithm)[10]을 사용하였다. ELVIRA는 Pilliod[10]에 의해서 제안되었으며, 다음과 같은 방법으로 경계면을 재구성하게 된다. i, j 번째 cell을 기준으로 3×3 block의 f 값들이 주어지 있다(Fig. 2). y 방향으로 f 값들을 적분한 값을 $y_{f,l} = \sum_{m=j-1}^{j+1} \frac{f_{l,m} \times V_{lm}}{dx(l)}$, $l=i-1, i, i+1$ 이라고 두자. 이때 $V_{lm} = dx(l) \times dy(m)$ 은 (l,m)번째 cell의 면적이다. 어두운 부분이 액체, 밝은 부분을 기체가 가정하면, $y_{f,l}$ 는 1번째 액체 기둥의 평균된 높이가 된다. x_1, x_2, x_3 값이 주어지고, $y_{f,i-1}, y_{f,i}, y_{f,i+1}$ 값을 구할 수 있기 때문에 세 점들 중($(x_1, y_{f,i-1}), (x_2, y_{f,i}), (x_3, y_{f,i+1})$) 임의의 두 점으로

이루어지는 직선에 수직인 벡터를 구할 수 있다. $n_x^2 + n_y^2 = 1$ 식이 2차식이기 때문에 두 개의 (n_x, n_y) 조합을 얻을 수 있다. 세 점들 중에서 두 점을 선택하는 방법이 세 가지이며, 총 6개의 후보 수직 벡터들을 구할 수 있다. x 방향으로의 f 값들을 같은 방법으로 적분하면, 2차원인 경우 12개의 후보 수직 벡터들이 존재하게 된다. 3차원인 경우 (i,j,k) 번째 cell을 기준으로 $5 \times 5 \times 5$ block을 이용하게 되는데, 이 때 수직 벡터들의 최대 가능한 수는 $3 \times (9C_3 - 6) \times 2$ 개이다. i, j 번째 cell의 f 값이 주어지 있으며, 크기가 1인 수직 벡터의 후보를 구하였기 때문에 i, j 번째 cell의 f 값을 변화시키지 않는 d 를 구할 수 있다. 3차원인 경우 d 는 iteration 방법을 통해서 구할 수 있다. 가능한 후보 직선(3차원인 경우 평면) 중에서 실제의 경계면을 가장 잘 나타낼 수 있는 단위 수직 벡터의 선택이 중요하다. Least square error $E_{i,j}^2$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$E_{i,j}^2 = \left(\sum_{l,m=-1}^1 (\tilde{f}_{i+l,j+m} - f_{i+l,j+m})^2 \right)^{1/2} \quad (7)$$

ELVIRA 방법은 $E_{i,j}^2$ 가 가장 작아지는 단위 수직 벡터와 d 를 선택하는 것이다. 이때 $\tilde{f}_{i,j}$ 는 i, j 번째 cell의 후보 단위 수직 벡터를 이웃한 3×3 block으로 확장하였을 때 만들어지는 부피비이며, $f_{i,j}$ 는 주어진 f 값이다. 실제의 경계면이 직선이라면 ELVIRA의 $E_{i,j}^2$ 값은 0이 된다.

2.2 이송(advection) 방정식

두 물질 사이의 상호작용이 없는 경우, 유체 입자의 경로를 따라서 f 는 변하지 않는다. 즉 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)f = 0 \quad (8)$$

$\mathbf{V}=(u, v, w)$ 는 속도 벡터이며, 비압축성 유체이기 때문에 연속방정식(식 (1))을 만족한다. 두 식을 결합하면 보전형태(conservative form)로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (uf)_x + (vf)_y + (wf)_z = 0 \quad (9)$$

즉 비압축성 유체에서 질량 보존은 부피의 보존을 의미하며, 용적함수 f 또한 보존된다. 경계면의 시간에 따른 움직임을 추적하기 위해서는 f 값의 시간에 따른 변화를 정확히 알 수

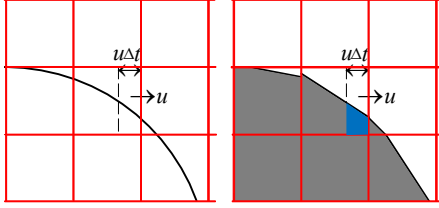


Fig. 3 Example of advection algorithm; (a) true interface, (b) reconstructed interface

있어야 한다. 식 (9)를 시간에 대하여 explicit euler, 공간에 대하여 중앙차분을 하면 다음과 같다. 이때 각 방향으로의 면적 flux F^n , G^n 는 식 (11,12)로 정의된다.

$$f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i-1/2,j}^n - F_{i+1/2,j}^n] + \frac{\Delta t}{\Delta y} [G_{i,j-1/2}^n - G_{i,j+1/2}^n] \quad (10)$$

$$F_{i-1/2,j}^n = (uf)_{i-1/2,j}^n \quad (11)$$

$$G_{i,j-1/2}^n = (vf)_{i,j-1/2}^n \quad (12)$$

본 연구에 사용된 이송방정식의 차분 방법은 operator split advection algorithm[14]이며 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$f_{i,j}^* = f_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i-1/2,j}^n - F_{i+1/2,j}^n] \quad (13)$$

$$f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^* + \frac{\Delta t}{\Delta y} [G_{i,j-1/2}^* - G_{i,j+1/2}^*] \quad (14)$$

즉 이송식을 x방향과 y방향으로 분리하는 것만으로 시간에 대하여 이차 정확도를 확보할 수 있다. 각 방향으로의 면적 flux는 다음 식에 의해 각 방향으로 빠져나가는 면적으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_{i+1/2,j}^n = u_{i+1/2,j}^n V_{i+1/2,j} / (u_{i+1/2,j}^n \Delta t \Delta y) = V_{i+1/2,j} / (\Delta t \Delta y) \quad (15)$$

이 때 $V_{i+1/2,j}$ 는 $i+1/2$ 면으로 빠져나가는 액체의 부피가 되며, 이는 Fig. 3 (b)의 짙은 색 부분이다. 즉 속도가 정의되는 면에 수직으로 나가는 액체의 부피를 이용하여 용적함수 f

를 쉽게 전진시킬 수 있다. 같은 방법으로 G^* flux도 계산이 가능하다.

2.3 표면힘 및 체적힘

경계면에서 곡률(curvature) 또한 f 값을 이용하여 계산할 수 있다. 곡률은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (16)$$

운동량 방정식에서 표면에 작용하는 힘은 $F_s = \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma$ 으로 표현할 수 있다. 이때 σ 는 표면장력계수, κ 는 곡률, \mathbf{n} 는 표면에서 정의되는 단위수직 벡터, δ_Γ 는 델타함수이다. F_s 는 경계면에서 정의되기 때문에 경계면에서는 $\delta_\Gamma=1.0$, 경계면이 아닌 곳에서는 $\delta_\Gamma=0$ 이다. $\delta_\Gamma = |\nabla f|$, $\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ 로 두면, F_s 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F_s = \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma = \sigma \kappa \frac{\nabla f}{|\nabla f|} |\nabla f| = \sigma \kappa \nabla f \quad (17)$$

체적힘은 중력에 의한 힘으로 $F_b = g$ 으로 정의할 수 있다. 이때 g 는 중력 가속도이다.

2.4 운동량 방정식의 차분

운동량 방정식은 유한체적법으로 차분되었다. 대류항에 대하여 3차 정확도의 Runge-Kutta 방법으로 양해적(explicit)으로 적분되고, 점성항은 Crank-Nicholson 방법으로 음해적(Implicit)으로 적분을 수행하였다. 연속방정식과 운동량방정식을 분리하기 위하여 FSM이 사용되었으며, 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\hat{u}_i^k - u_i^{k-1}}{\Delta t} = \alpha_k L(\hat{u}_i^k) + \alpha_k L(u_i^{k-1}) - \gamma_k N(u_i^{k-1}) - \zeta_k N(u_i^{k-2}) - 2\alpha_k \frac{\partial p^{k-1}}{\partial x_i} + F_b + F_s \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^k}{\partial x_i} \right) \quad (19)$$

$$\frac{u_i^k - \hat{u}_i^k}{\Delta t} = - \frac{\partial \Psi^k}{\partial x_i} \quad (20)$$

$$p^k = p^{k-1} + (\Psi^k - \alpha_k \Delta t \times L(\Psi^k)) \quad (21)$$

여기서 k 는 RK3의 substep을 나타내며 $\alpha_k, \gamma_k, \zeta_k$ 는 RK3의 계수로 $\alpha_1=4/15, \alpha_2=1/15, \alpha_3=1/6, \gamma_1=8/15, \gamma_2=5/12, \gamma_3=3/4, \zeta_1=0, \zeta_2=-17/60, \zeta_3=-5/12$ 이다. 또한 $L(\) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial(\)}{\partial x_j} \right)$, $N(\) = \partial u_j(\) / \partial x_j$ 이며, \hat{u}_i^k 와 Ψ 는 각각 중간 단계의 속도와 pseudo-pressure이다. 연속방정식을 만족시키기 위해 Ψ 의 Poisson 방정식(식 (19))을 풀어 속도 u_i 와 압력 p 를 보정해 준다.

3. 결 과(수치해석 기법의 검증)

수치해석 기법의 검증을 위해 다양한 benchmark 문제들에 대하여 본 코드의 타당성을 검증하였다.

3.1 Rising bubble in a fully contained tank

공기방울이 물로 가득 차 있는 2차원 탱크 내에서 부력에 의해서 상승하면서 공기방울의 모양이 변하게 되는데, 이를 기존 연구자들의 결과와 비교해 보았다. 모든 면의 경계조건은 점착 조건($u=0, v=0$)을 사용하였고, 전체 계산 영역의 크기 및 기하학적 형상은 Fig. 4에 잘 나타나 있다. ρ_1, μ_1 는 공기에 해당하는 물성치를 사용하였고, ρ_2, μ_2 는 물의 물성치를 사용하였다. 전체 계산 격자는 128×208 개로의 균일한 격자를 사용하였다. $Re = \frac{\rho_2 \sqrt{g} D^{3/2}}{\mu_2} = 100$ 이며, $Fr=1.0$, 표면 장력의 효과는 무시하였다. 수치해석의 검증을 위해서 물성치는 기존 연구자의 것과 동일한 값인 $\rho_2/\rho_1=100, \mu_2/\mu_1=64$ 이다. 공기방울의 지름을 D , 전체 계산영역은 중력방향으로 $3.24D$, 중력의 수직방향으로 $2D$ 이며, 초기 공기방울의 중심의 위치는 바닥으로부터 $0.74D$ 에 위치한다. Zhao 등[15]의 논문에서는 표면장력을 고려하였으나, 이 문제의 경우 표면장력 효과 보다는 부력의 영향이 크기 때문에 표면장력을 무시할 수 있을 정도로 작다. 시간은 $D/\sqrt{2gD}$ 로 무차원하였으며, 무차원된 dt 는 5×10^{-4} 을 사용하였다.

Fig. 5는 부력에 의해 상승하는 공기방울의 모양을 나타낸 그림이다. 공기방울의 모양의 변화를 관찰하기 위해서 용적함수 $f=0.1, 0.5, 0.9$ 인 contour line을 나타내었다. 속도벡터의 경향성을 알아보기 위해 각 방향으로 8개 중의 1개의 벡터만 표시하였다. 밀도차이 때문에 공기방울은 점차 중력 반대 방향으로 가속한다. 경계조건이 4면이 모두 점착 조건이기 때문에 공기방울 좌우에 회전하는 와류가 발생하기 시작한다. 시간이 지나면서 와류에 의해서 공기방울의 하부가 위로 점점 상승하면서 공기방울 좌우가 점점 좁아져 $t=4.0$ 부근에서는

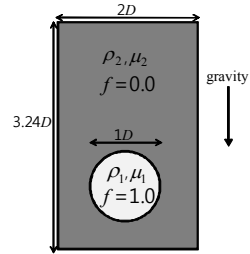


Fig. 4 Physical configuration of a Rising bubble in a fully contained tank

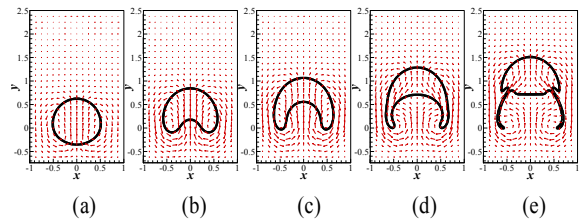


Fig. 5 Time evolution of Rising bubble shape in a fully contained tank; (a) $t=1.0$, (b) $t=2.0$, (c) $t=3.0$, (d) $t=4.0$, (e) $t=5.0$

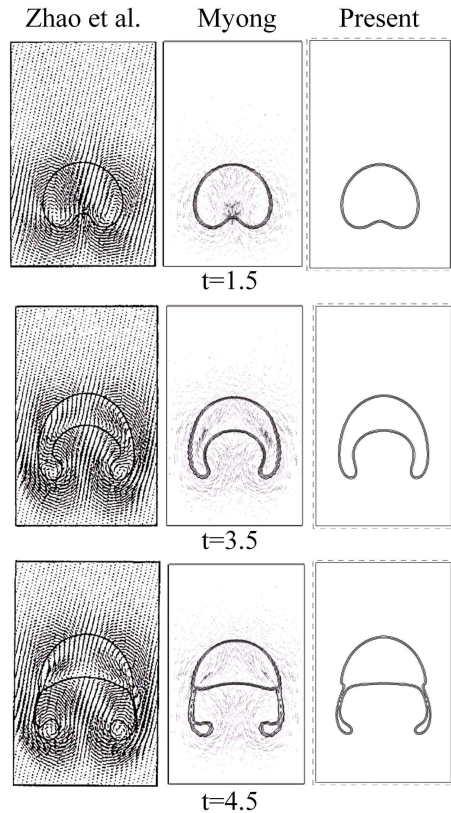


Fig. 6 Comparison of the Rising bubble shape with other author's results

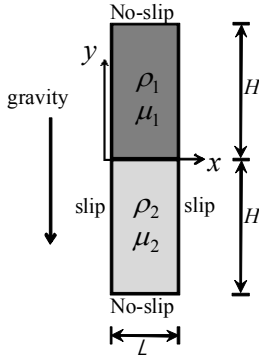


Fig. 7 Physical configuration and boundary condition of Rayleigh Taylor Instability problem

얇은 띠 형태로 발전하게 된다. 좌우가 대칭적으로 공기방울의 모양이 형성된다. 전체적으로 다른 연구자들의 결과(Zhao 등[15], Myong[16])와 잘 일치하는 것을 알 수 있다(Fig. 6).

3.2 Rayleigh taylor instability problem

2차원 Rayleigh-Taylor 불안정성 문제를 검증해 보았다. $\rho_1 / \rho_2 = 2.0$, $\mu_1 / \mu_2 = 2.0$ 즉, 무거운 유체가 위에, 가벼운 유체가 아래에 위치한다. 전체 계산 영역은 x방향으로 L, y방향으로 $2H(=4L)$ 이며, 경계조건은 Fig. 7에 나타내었다. 전체 계산 격자수는 128×512 개로 균일한 격자를 사용하였다. 초기의 압력 분포는 정수압(hydrostatic pressure)으로 주었으며, 초기 속도 섭동 성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{u}{U_{ref}} &= 0.25 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{\pi|y|}{L}\right), \quad \frac{y}{L} > 0 \\ -0.25 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{\pi|y|}{L}\right), \quad \frac{y}{L} < 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{v}{U_{ref}} = 0.25 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{\pi|y|}{L}\right) \quad (23)$$

수치해석 기법의 검증을 위해서 Zhao 등[15]의 논문에서 사용한 Re, Fr, We는 각각 $Re = \frac{U_{ref}L}{\nu_1} = 283$, $We = \frac{\rho_1 U_{ref}^2 L}{\sigma} = 5000$, $Fr = \frac{U_{ref}^2}{gL} = 1.0$ 이며 $U_{ref} = \sqrt{gL}$ 이다. Fig. 8은 시간에 따른 물질 경계면의 변화를 기존 연구자의 결과[15]와 함께 나타내었다. 검은색 부분이 무거운 물체(ρ_1, μ_1)이며, 가벼운 물체(ρ_2, μ_2)는 하얀색으로 나타내었다. 초기의 속도 섭동 성분으로 인하여 가벼운 유체의 왼쪽 경계가 상승하며, 무

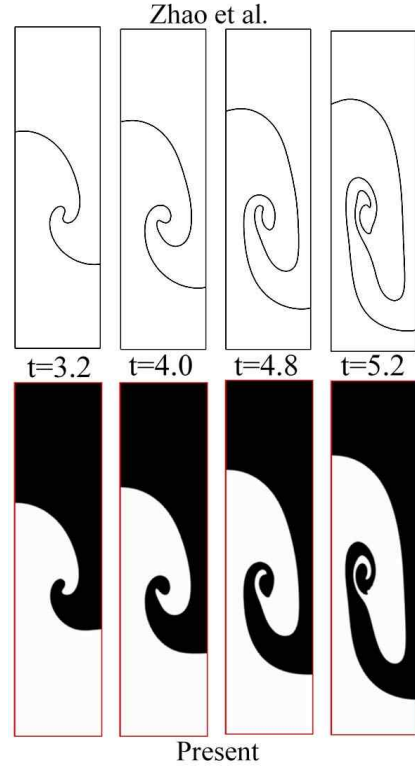


Fig. 8 Comparison of the present interface between two fluids with other authors' results.

거운 물체의 오른쪽 경계는 가라앉기 시작한다. 유체 사이의 경계면이 초반에는 거의 대칭적이지만($t=3.2$) 시간이 지나면서 비대칭적으로 변해간다. 계산 결과는 Zhao 등[15]의 결과와 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

3.3 Rising bubble in a partially contained tank

부분적으로 채워진 물탱크에서 기름방울이 상승하면서 기름방울의 모양변화를 검증해 보았다. 경계조건으로는 4면 모두 점착 조건을 사용하였다. 전체 계산 영역의 크기, 형상, 사용된 물성치는 Fig. 9에 잘 나타나 있다. 어두운 부분은 물의 물성치를 사용하였고, 밝은 부분은 물보다 가벼운 기름의 물성치를 사용하였다. 기름방울의 지름을 D, 전체 계산영역은 x방향으로 3D, y 방향으로 3.5D이며, 초기 물의 깊이는 2.5D이다. 기름층의 깊이는 D, 기름방울 중심의 위치는 물과 기름의 경계를 기준으로 1D 만큼 떨어져 있다. 초기 속도는 $u=v=0$, 초기의 압력 분포는 정수압으로 주었다. 전체 계산 격자수는 192×224 개의 균일한 격자를 사용하였다. 물의 물성치를 기준으로 한 $Re = \frac{\sqrt{g} D^{3/2}}{\nu_{water}} = 200$ 이며, $Fr = 1.0$, 표면장력 효

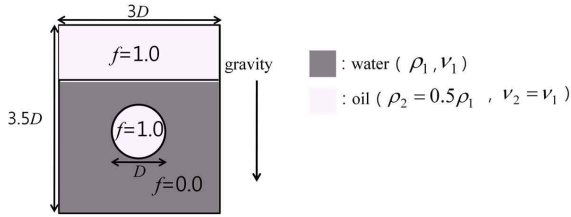


Fig. 9 Physical configuration of a Rising bubble in a partially contained tank

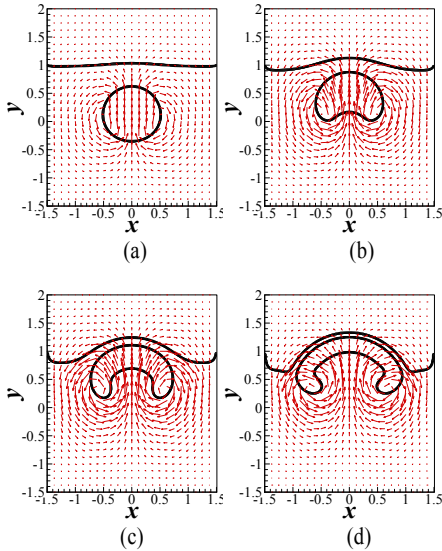


Fig. 10 Time evolution of the bubble shape and oil membrane in a partially contained tank; (a) $t=1.0$, (b) $t=2.0$, (c) $t=3.0$, (d) $t=4.0$

과는 고려하지 않았다.

Fig. 10은 시간의 변화에 따른 기름방울의 모양 변화를 관찰하기 위해 f 값이 0.1, 0.5, 0.9인 contour line을 속도 벡터와 함께 나타내었다. 초기 기름방울은 부력에 의해 상승하면서 기름방울의 좌우 대칭적으로 순환하는 와류가 발생하게 되고, 이는 기름방울 아랫부분을 위로 밀어 올린다. 상승하면서 기름방울의 모양은 부메랑 형태로 변해가며, 기름방울의 위쪽의 부력이 상대적으로 아래쪽보다 작기 때문에 기름방울이 좌우로 퍼지게 된다. 결국 기름방울의 모양은 수면의 모양과 비슷하게 변하게 된다. 기존 연구자들의 결과(Pan and Chang[17], Zhao 등[15], Myong[16])와 비교해 보았을 때 잘 맞는 것을 알 수 있다(Fig. 11).

Pan and Chang[17]의 경우, 3개의 물질로 구성되어 있어(상부에 형성된 기름층에서는 기름방울과 다른 물질치 사용) 결과가 조금 다르지만, 나머지 연구자들의 결과와는 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

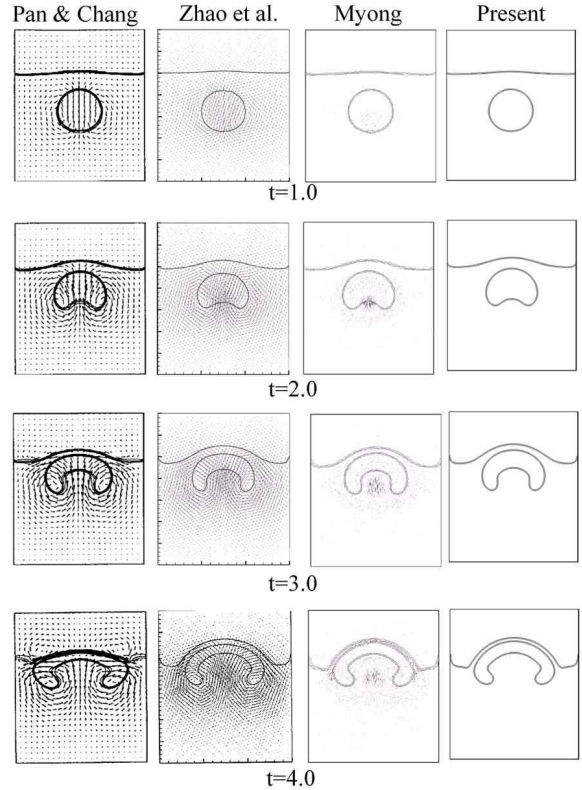


Fig. 11 Comparison of the bubble shape and the oil membrane with other authors' results

3.4 Droplet splash

밀폐되어 있는 탱크 안에서 수면위로 떨어지는 물방울의 모양 변화를 기존 연구자와 비교해 보았다. 전체 계산영역 및 초기 위치는 Fig. 12에 나타내었다. 물방울의 지름은 0.0028 m이며, 깊이가 0.0088 m인 물위로 자유 낙하하게 된다. 초기 물방울 중심의 위치는 밀폐된 탱크의 상부로부터 0.0035 m 떨어져 있다. 물성치는 공기의 경우 밀도 1.225 kg/m^3 , 점성계수 $1.7763 \times 10^{-5} \text{ kg/ms}$ 이고 물의 경우 밀도 999.2 kg/m^3 , 점성계수 $1.1377 \times 10^{-3} \text{ kg/ms}$ 를 사용하였으며, 중력가속도는 9.81 m/s^2 을 사용하였다. 전체 계산 격자수는 256×512 로 균일하게 분포되어 있다. 표면 장력은 고려하지 않았으며, $dt = 10^{-6}$ 을 사용하였다. 이 문제의 경우 물방울이 자유 낙하하여 수면위로 떨어지면서 자유표면이 합쳐지는 경우로서 Puckett 등[18]이 수치해석 방법의 타당성과 정확성을 검증하기 위해서 제시한 문제이다.

Fig. 13은 시간의 변화에 따른 물방울 및 수면의 모양을 기존 연구자들의 결과와 함께 나타낸 그림이다. 공기 중에서 자유 낙하하는 물방울은 0.0098초 부근에서 수면과 만나기 시

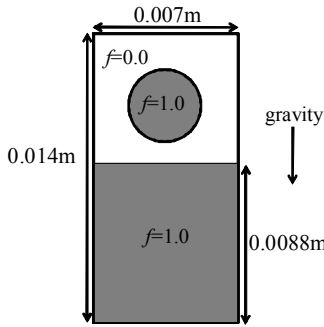


Fig. 12 Physical configuration of droplet splash

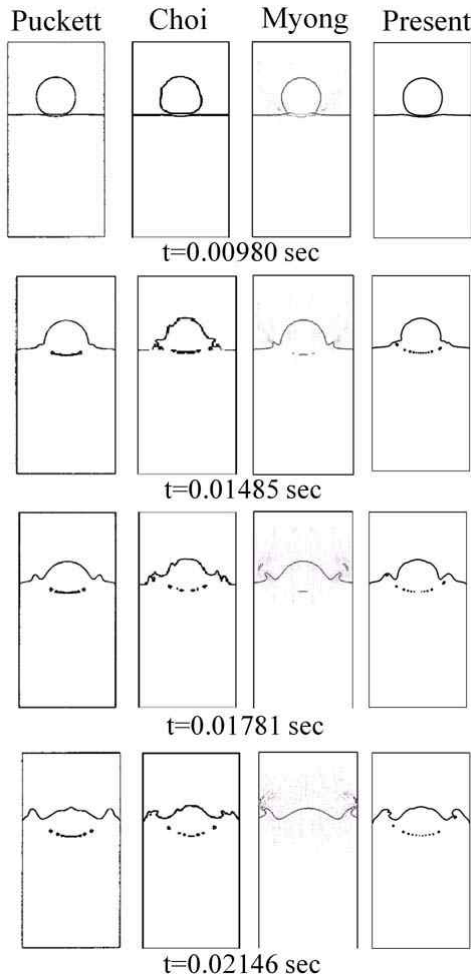


Fig. 13 Time evolution of a water droplet falling through air onto water surface

작한다. 물방울과 수면이 충돌하면서 다수의 공기방울이 물속에 생기는 것을 관찰할 수 있으며, 물방울이 수면에 점점 잠기면서, 공기 쪽으로 물기둥이 좌우측에서 발생하게 되며, 좌

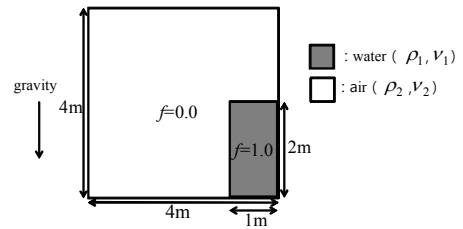


Fig. 14 Physical configuration of a water dam broken problem

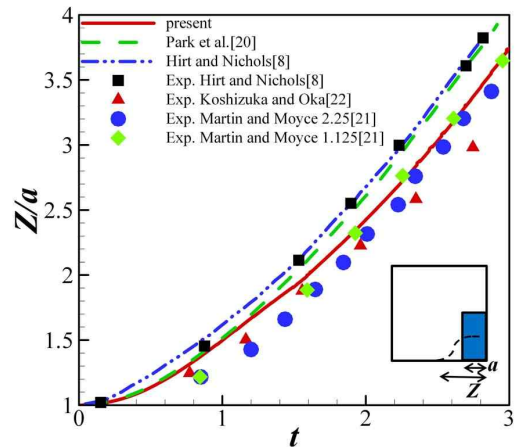


Fig. 15 Comparison of length of the surge front(z/a) against time

우 벽 쪽으로 이동하는 것을 알 수 있다. 이는 다른 연구자들의 결과(Puckett 등[18], Choi[19], Myong[16])와도 일치한다.

3.5 Broken water dam

2차원 유동의 마지막 검증으로, 가상의 댐이 갑자기 사라졌을 경우, 가로 1 m, 세로 2 m인 물기둥의 거동을 예측하는 문제이다. 전체 계산 영역은 4 m×4 m이며, 물성치는 공기의 경우 밀도 1.225 kg/m³, 점성계수는 1.7763×10⁻⁵ kg/ms 이고, 물의 경우 밀도는 999.2kg/m³, 점성계수는 1.1377×10⁻³ kg/ms 을 사용하였으며, 중력 가속도는 9.81 m/s² 을 사용하였다(Fig. 14). 계산에 사용된 dt 는 10⁻⁶이다.

Fig. 15는 물기둥이 무너져 내릴 때 물기둥의 최대 변위 Z 를 초기값으로 나눈 것을 시간에 대하여 나타낸 것이다. 다른 연구자들의 결과(Park 등[20], Martin and Moyce[21], Koshizuka and Oka[22], Hirt and Nichols[8])와 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

3.6 3D Rising bubble

초기의 구형 버블이 초기속도 0에서 출발하여 부력에 의해 점점 가속되면서 버블의 모양이 어떻게 변하는지를 기존의

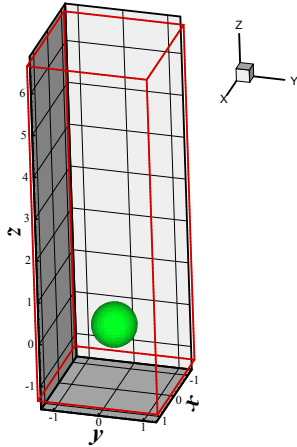


Fig. 16 Physical configuration of a 3D Rising bubble problem

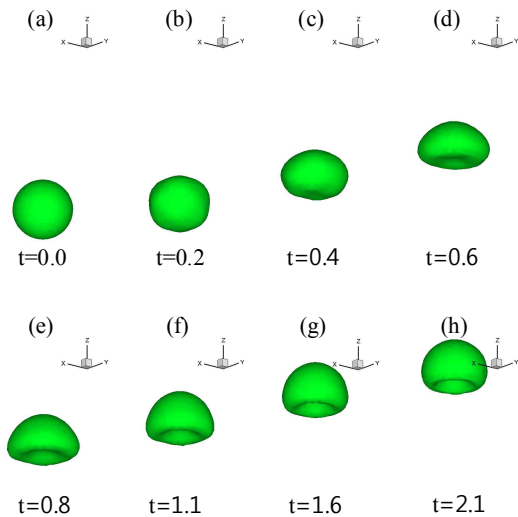


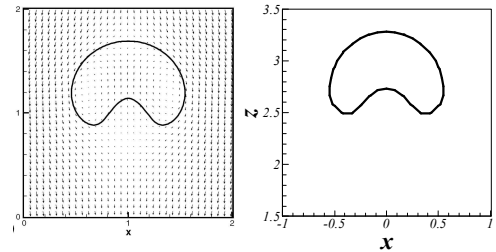
Fig. 17 Time evolution of the shape of a 3D Rising bubble

다른 연구자의 결과와 비교해보았다. 전체 계산 영역은 Fig. 16에 나타내었다. 구의 지름을 D 로 두고, 계산영역의 크기는 x, y, z 방향으로 각각 $-1D \sim 1D, -1D \sim 1D, -1D \sim 6D$ 이며 중력의 방향은 $-z$ 방향이다.

전체 계산 격자는 $64 \times 64 \times 192$ 개로의 균일한 격자를 사용하였다. 기준속도(reference velocity)는 $U = \sqrt{gD}$ 이며, 시간은 D/U 로 무차원화하였다. 계산에 사용된 무차원 수는

$$Re = \frac{UD}{\nu_1} = 10, \quad We = \frac{\rho_1 U^2 D}{\sigma} = 40, \quad Fr = \frac{U^2}{gD} = 1 \text{ 이다.}$$

수치해석의 검증을 위해서 물성치는 기존 연구자의 것과 같



(a) Daniel and Laszlo[23] (b) Present

Fig. 18 Comparison of the bubble shape at $y=0$ plane, $t=2.1$

이 맞추었다. $\rho_1/\rho_2=2.0, \mu_1/\mu_2=1.0$ 이다. 즉 상대적으로 무거운 유체(ρ_1, μ_1)가 3차원 탱크내에 가득 차있으며, 상대적으로 가벼운 버블(ρ_2, μ_2)이 부력에 의해 상승하는 문제이다.

Fig. 17은 시간에 따른 구 모양 버블의 변화를 나타내기 위해서 $f=0.5$ 인 3차원 등위면(iso-surface)을 각 시간 단계에 나타낸 그림이다. $t=0.0$ 에서 구형의 버블은 z 방향으로 점점 가속된다. 초기 구형 모양의 버블은 시간이 지나면서 타원형 형태로 발전하기 시작한다. $t=0.4$ 시점부터는 회전하는 와류에 의해 버블의 아랫면이 밀려 올라가기 시작하면서 버블의 윗면 모양이 점점 원형에 가까워진다. 전체적으로 z 축에 대하여 축 대칭으로 모양이 형성되는 것을 알 수 있다. Fig. 18은 $t=2.1$ 에서 기존 연구자의 결과(Daniel and Laszlo[23])와 버블의 모양을 비교한 것으로 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 본 연구에서 계산된 무차원된 종단 속도는 0.22로 이는 Daniel and Laszlo[23]의 종단 속도(약 0.23)와 유사하다.

5. 결 론

본 연구에서는 비정상(unsteady) 유동의 해석에서 가장 많이 사용되는 정렬된 직교 좌표계에서의 FSM을 기반으로 VOF 방법을 적용하여 다상유동을 빠르고 정확하게 해석할 수 있는 코드를 개발하였으며, 이를 2차원, 3차원 다상유동 해석에 적용하여 benchmark 문제들을 통해 검증하였다. 본 연구의 결과, 비정상 유동을 효율적으로 계산할 수 있는 기반이 마련되었고, 이는 공학적 응용성이 높은 난류 다상유동에도 폭넓게 적용될 수 있을 것으로 판단된다. 연속 구조공정에서 몰드내의 유동 불안정성 및 침지노즐(SEN: Submerged Entry Nozzle)의 설계 개선을 위한 유동 해석에 적용할 수 있을 것이며, 저항을 최소화하는 선박의 형상 설계에 응용될 수 있을 것이다. 또한 교반기의 성능 예측 및 연료분사장치 등에서 이상간 경계면의 정확한 해석을 위한 기본적인 토대가 될 수 있을 것이다.

후 기

본 연구는 수중운동체 특화 연구센터의 지원에 의하여 수행되었음.

참고문헌

- [1] 1974, Hirt, C.W., Amsden, A.A. and Cook, J.L., "An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds," *J. Comput. Phys.*, Vol.14, pp.227-253.
- [2] 1987, Ramaswamy, B. and Kawahara, M., "Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for unsteady, convective, incompressible viscous free surface fluid flow," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.7, pp.1053-1075.
- [3] 1989, Floryan, J.M. and Rasmussen, H., "Numerical Methods for viscous flows with moving boundaries," *Appl. Mech. Rev.*, Vol.42, pp.323-341.
- [4] 1970, Hirt, C.W., Cook, J.L. and Butler, T.D., "A lagrangian method for calculating the dynamics of an incompressible fluid with free surface," *J. Comput. Phys.*, Vol.5, pp.103-124.
- [5] 1990, Okamoto, T., Kawahara, M. and Nakayama, T., "Two-dimensional sloshing analysis by lagrangian finite element method," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.11, pp.453-477.
- [6] 1970, Chan, R.K.C. and Street, R.L., "A computer study of Finite amplitude water waves," *J. Comput. Phys.*, Vol.6, pp.68-94.
- [7] 1988, Osher, S. and Sethian, J.A., "Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton Jacobi formulations," *J. Comput. Phys.*, Vol.79, pp.12-49.
- [8] 1981, Hirt, C.W. and Nichols, B.D., "Volume of Fluid(VOF) method for the dynamics of free boundaries," *J. Comput. Phys.*, Vol.39, pp.201-205.
- [9] 1976, Noh, W.F. and Woodward, P.R., "SLIC(Simple Line Interface Calculation)," *In: van der Vooren A.I. and Zandbergen P.J., lecture notes in physics, Springer-Verlag, New York*, Vol.59, pp.330-340.
- [10] 1992, Pilliod, J.E., "An analysis of piecewise linear interface reconstruction algorithms for volume-of-fluid methods," *M. S. Thesis*, University of California.
- [11] 2000, Sussman, M. and Puckett, E.G., "A coupled Level Set and Volume-of-Fluid method for computing 3D and axisymmetric incompressible two-phase flows," *J. Comput. Phys.*, Vol.162, pp.301-337.
- [12] 1985, Kim, J. and Moin, P., "Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equation," *J. Comput. Phys.*, Vol.59, pp.308-323.
- [13] 2003, Kim, M.S. and Lee, W.I., "A new VOF-based numerical scheme for the simulation of fluid flow with free surface. Part I: New free surface-tracking algorithm and its verification," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.42, pp.765-900.
- [14] 2004, Pilliod, J.E. and Puckett, E.G., "Second-order accurate volume-of-fluid algorithms for tracking material interfaces," *J. Comp. Phys.* Vol.199, pp.465-502.
- [15] 2002, Zhao, Y., Tan, H.H. and Zhang, B., "A high-resolution characteristics-based implicit dual time-stepping VOF method for free surface flow simulation on unstructured grids," *J. Comp. Phys.*, Vol.183, pp.233-272.
- [16] 2009, 명현국, "경계면 포착법에 의한 밀도차이에 따른 물질경계면을 갖는 다상유동 수치해석," *대한기계학회논문집B*, Vol.33, pp.443-453.
- [17] 2000, Pan, D. and Chang, C.H., "The capturing of free surfaces in incompressible multi-fluid flows," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.33, pp.203-222.
- [18] 1997, Puckett, E.G., Almgren, A.S., Bell, J.B., Marcus, D.L. and Rider, W.J., "A high-order projection method for tracking fluid interfaces in variable density incompressible flows," Vol.130, pp.269-282.
- [19] 2004, Choi, Y.S., "Analysis of multi-phase flow using PLIC-VOF method," *Master Thesis*, Seoul National University.
- [20] 2003, Park, J.C., Kim, M.M., Miyata, H. and Chun, H.H., "Fully nonlinear numerical wave tank(NWT) simulations and wave run-up prediction around 3-D structures," *Ocean Engineering*, Vol.30, pp.1969-1996.
- [21] 1952, Martin, J.C. and Moyce, W.J., "An experimental study of the collapse of liquid columns on a horizontal plane," *Trans.Roy.Soc.London Ser.A*, Vol.244, p.321.
- [22] 1996, Koshizuka, S. and Oka, Y., "Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid," *Nucl. Sci. Eng.*, Vol.123, pp.421-434.
- [23] 2004, Daniel, L. and Laszlo, F., "High-order surface tension VOF-model for 3D bubble flows with high density ratio," *J. Comp. Phys.*, Vol.200, pp.153-176.