진동하는 Taylor-Couette 유동에 대한 수치적 연구

강 창 우,[1] 양 경 수,[*2] Innocent Mutabazi[3]

NUMERICAL STUDY OF MODULATED TAYLOR-COUETTE FLOW

Changwoo Kang,[1] Kyung-Soo Yang[*2] and Innocent Mutabazi[3]

In this study, we consider Taylor-Couette flow with the outer cylinder at rest and the inner one oscillating with a mean angular velocity. Varying the mean angular velocity, amplitude and frequency of the oscillation, we investigate the characteristics of modulated Taylor vortices. At a constant mean angular velocity, Taylor vortices intensify as the amplitude increases and frequency decreases. The axial wavenumber is calculated by spectral analysis. When the frequency varies, the axial wavenumber does not change at a constant mean angular velocity and amplitude. But, the axial wavenumber increases, as the mean angular velocity increases.

Key Words : Taylor-Couette 유동(Taylor-Couette Flow), Taylor 와류(Taylor Vortex), 주파수(Frequency), 진폭(Amplitude)

1. 서 론

바깥쪽 실린더는 정지해있고 안쪽 실린더가 진동하며 회전하는 Taylor-Couette 유동은 Donnelly[1]에 의해 처음 연구되었으며, 이후 많은 연구자들에 의해 실험 및 이론적인 연구가 진행되었다. Donnelly[1]는 실험을 통하여 안쪽 실린더의 회전속도가 조화함수 형태로 진동하는 경우에 대하여 실린더 사이의 간격과 회전진폭, 진동 주파수를 변화시켜가며 유동 불안정성이 나타나는 임계 회전각속도를 측정하였으며, Walsh등[2]은 실린더의 회전진폭과 진동 주파수 변화에 따른 임계 레이놀즈 수를 측정하였다. Tustaniwskyj and Carmi[3]는 선형 안정성 분석을 통해 실린더 사이의 간격과 진동 주파수 변화에 따른 임계 레이놀즈 수를 계산하였으며, Ganske등[4]은 회전진폭과 진동 주파수 변화에 따른 유동 불안정성에 대한 연구를 수행하였다. 그들의 실험과 선형 안정성 분석에 의하면 유동 불안정성은 진동 주파수가 증가함에 따라 감소하였으며, 회전진폭이 증가함에 따라 증가하였다. 하지만 이러한 실험과 선형 안정성 분석을 통한 연구들은 파라메터 변화에 따른 임계치만을 측정하였을 뿐, 그에 따른 유동의 특성을 파악할 수 없었다.

안쪽 실린더가 진동하면서 회전하는 Taylor-Couette 유동의 유동 특성에 대한 연구는 Kuhlmann등[5]과 Barenghi and Jones[6]에 의해서 수행되었다. 그들은 실린더의 회전속도 변화에 따라 Taylor 와류가 주기적으로 생성, 소멸되는 특성(transient vortices)을 보였으며, 낮은 진동 주파수 범위에서는 실린더의 진동에 따른 Taylor 와류의 구조 변화는 없음을 보였다. 하지만 그들의 연구는 실린더의 진동 주파수와 회전진폭이 낮은 경우에 국한되어 진동 주파수와 회전진폭의 변화에 따른 Taylor 와류의 변화를 정확하게 파악할 수 없었다.

본 연구자들은 선행연구를 통해 실린더의 진동 주파수 변화에 따른 Taylor 와류의 변화에 대한 수치해석적 연구를 수행하였다[7]. 낮은 진동 주파수 범위에서 Taylor 와류는 급격하게 주기적으로 생성, 소멸되었으며 비교적 높은 진동 주파수 범위에서는 Taylor 와류의 강도가 완만한 조화함수 형태로 주기적으로 변화 하였다. 하지만 진동 주파수 변화에 따른 Taylor 와류 한 쌍의 축방향 파장 길이의 변화는 없었다.

본 연구에서는 안쪽실린더의 회전속도에 영향을 미치는 평균회전속도, 회전진폭, 진동 주파수의 변화에 따른 Taylor 와류의 변화에 대한 수치해석적 연구를 수행하였다. 파라메터 변화에 따른 Taylor 와류의 시•공간적 특성을 시각화하여 나

접수일: 2010년 8월 26일, 수정일: 2010년 10월 12일,
게재확정일 : 2010년 10월 15일.

1 정회원, 인하대학교 대학원 기계공학과
2 정회원, 인하대학교 기계공학부
3 Department of physics, Le Havre Univ., France
* Corresponding author, E-mail: ksyang@inha.ac.kr

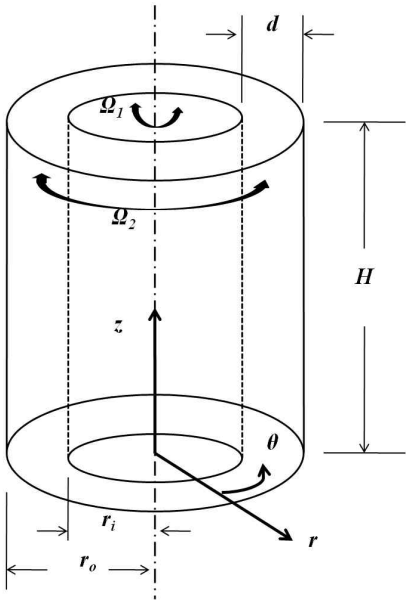


Fig. 1 Schematic of flow configuration

타내었으며, 스펙트럼 분석을 통하여 축방향 파동수의 변화를 알아보았다.

2. 수치해석 방법 및 검증

본 연구에서의 지배방정식은 비압축성 연속방정식, 운동량 방정식으로 원통좌표계(r,θ,z)에서 정의되었다.

$$\nabla \cdot V = 0 \tag{1}$$

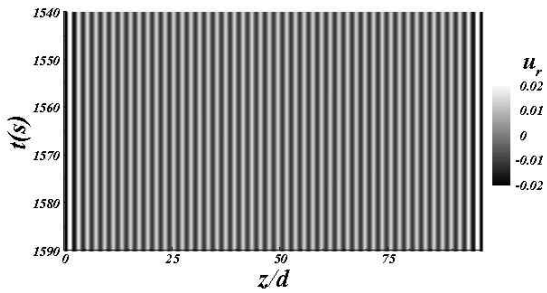
$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 V \tag{2}$$

여기서 V는 속도벡터, p는 압력을 나타내고 ρ는 밀도, ν는 동점성 계수이다. ∇는 gradient 연산자를 의미한다. 각 지배방정식은 유한체적법(finite volume method)으로 차분되었다. 시간에서의 적분은 혼합 기법으로서 비선형 항 및 교차확산항(cross diffusion term)은 3차 정확도의 Runge-Kutta 기법으로 명시적(explicit)으로 적분하였고, 점성항은 Crank-Nicolson 방법으로 묵시적(implicit)으로 적분되었다. 연속방정식과 운동량 방정식을 분리하기 위하여 Fractional Step 기법[8]이 사용되었다.

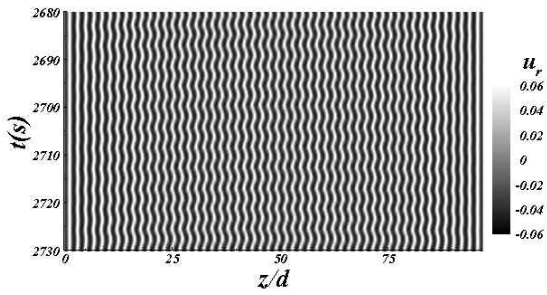
본 연구에서 사용된 형상은 Fig. 1과 같다. r_i와 r_o는 각각 안쪽과 바깥쪽 실린더의 반경을 의미하며 d는 실린더 사이의 간격, H는 축방향 길이를 나타낸다. 바깥 실린더에 대한 안쪽 실린더의 반경비(η)는 0.878, 실린더 사이의 간격(d)에 대한 축방향 계산영역(H)의 비(Γ)는 97이다. 경계조건으로는 실린더의 안쪽과 바깥쪽 표면 및 바닥면과 윗면에는 점착(no-slip)조건을 사용하였으며 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더는 각각 다음 식과 같은 각속도로 주기적인 회전운동을 한다.

$$\Omega_1(t) = \Omega_{m1} + \Omega_{o1}\cos\omega t \quad \text{for } r = r_i \tag{3}$$

$$\Omega_2(t) = 0 \quad \text{for } r = r_o \tag{4}$$



(a) $Ta = 45$



(b) $Ta = 55$

Fig. 2 Space-time contours for $\Omega_{o1} = 0$

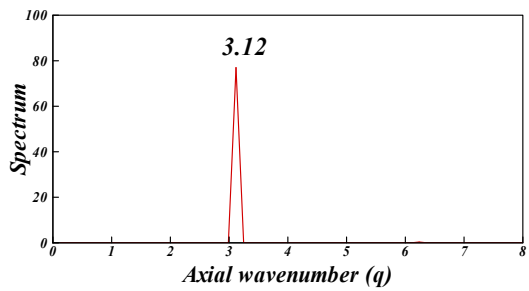


Fig. 3 Axial wavenumber for $Ta = 45$

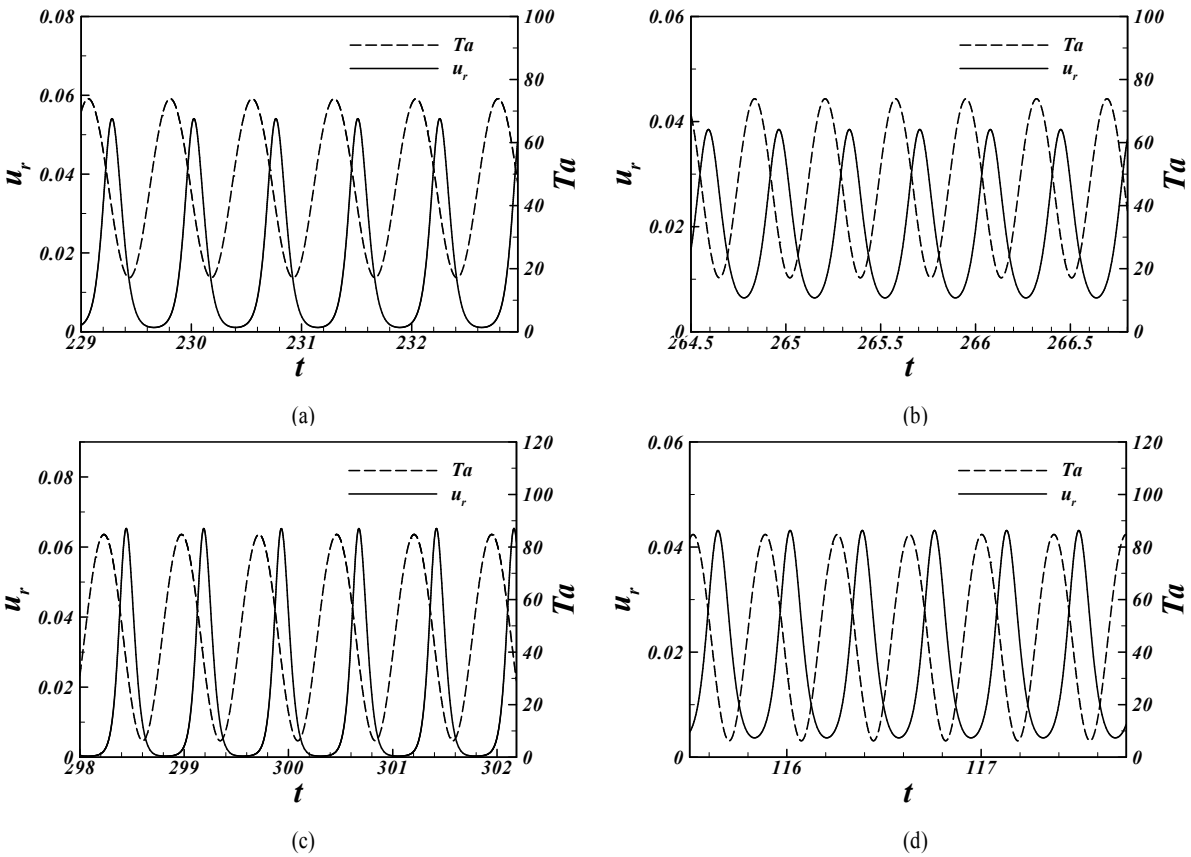


Fig. 4 Evolutions of the radial velocity component averaged in the azimuthal direction at the radial and axial midplanes for $Ta_m = 45.51$; (a) $\Omega_{o1} = 0.554 rad/s$, $\sigma = 8.46$ (b) $\Omega_{o1} = 0.554 rad/s$, $\sigma = 16.91$ (c) $\Omega_{o1} = 0.766 rad/s$, $\sigma = 8.46$ (d) $\Omega_{o1} = 0.766 rad/s$, $\sigma = 16.91$

격자점의 개수는 선행연구[7]에서 사용된 격자보다 반경방향으로 2배 증가시켜 반경방향, 회전방향, 축방향으로 각각 $64(r) \times 64(\theta) \times 1024(z)$ 격자를 사용하였다.

본 연구에서 사용된 코드의 타당성은 선행연구[7]에서 수행된 검증 결과로부터 입증되었다.

3. 결 과

안쪽 실린더가 진동하지 않고 일정한 속도로 회전하는 경우 실린더의 회전속도가 증가함에 따라 실린더 내 유동 불안정성이 발생하여 Taylor 와류가 형성된다. Fig. 2는 실린더가 진동하지 않는 경우($\Omega_{o1} = 0$), $Ta(= \Omega_1 r_i^{1/2} d^{3/2}/\nu)$가 45와 55일 때의 반경방향으로 중앙인 위치($r = (r_i + r_o)/2, \theta = 0$)에서 시간에 따른 반경방향 속도성분의 등고선을 나타낸 것이다. 흰색은 양의 값(outflow jet)을 나타내고 검은색은 음의 값(inflow jet)을 나타낸다. $Ta = 45$일 때 시간에 따라 일정한 형태의 Taylor 와류가 형성된 것을 확인할 수 있으며 $Ta = 55$일 때는 wavy 형태의 Taylor 와류가 형성된 것을 확인할 수 있다. 본 연구의 반경비($\eta = 0.878$)에서의 임계 테일러 수(Ta_c)는 선형 안정성 분석 결과 약 44.56으로, 본 연구의 수치결과와 잘 일치한다[9].

Fig. 3은 $Ta = 45$일 때의 축방향 파동수($q = 2\pi/\lambda$)를 계산한 결과이다. 여기서 파동수는 Fig. 2 (a)에 나타낸 시간-공간 도표를 스펙트럼 분석하여 계산하였다. 스펙트럼 분석에는 FFT(Fast Fourier Transform)을 이용하였다. 계산된 축방향 파동수는 3.12이며 선형 안정성 분석에서 계산된 파동수(3.13)와 일치한다.

Fig. 4는 주기적으로 변화하는 Taylor 와류가 형성된 평균 테일러 수($Ta_m = \Omega_{m1} r_i^{1/2} d^{3/2}/\nu$)가 45.51인 경우 시간에 따른 반경방향과 축방향으로 중앙인 위치($r = (r_i + r_o)/2, z = H/2$)에서 회전방향으로 평균된 반경방향의 속도($u_r$)와 안쪽 실린더의 회전속도를 기준으로 한 $Ta(= \Omega_1 r_i^{1/2} d^{3/2}/\nu)$의 변화를

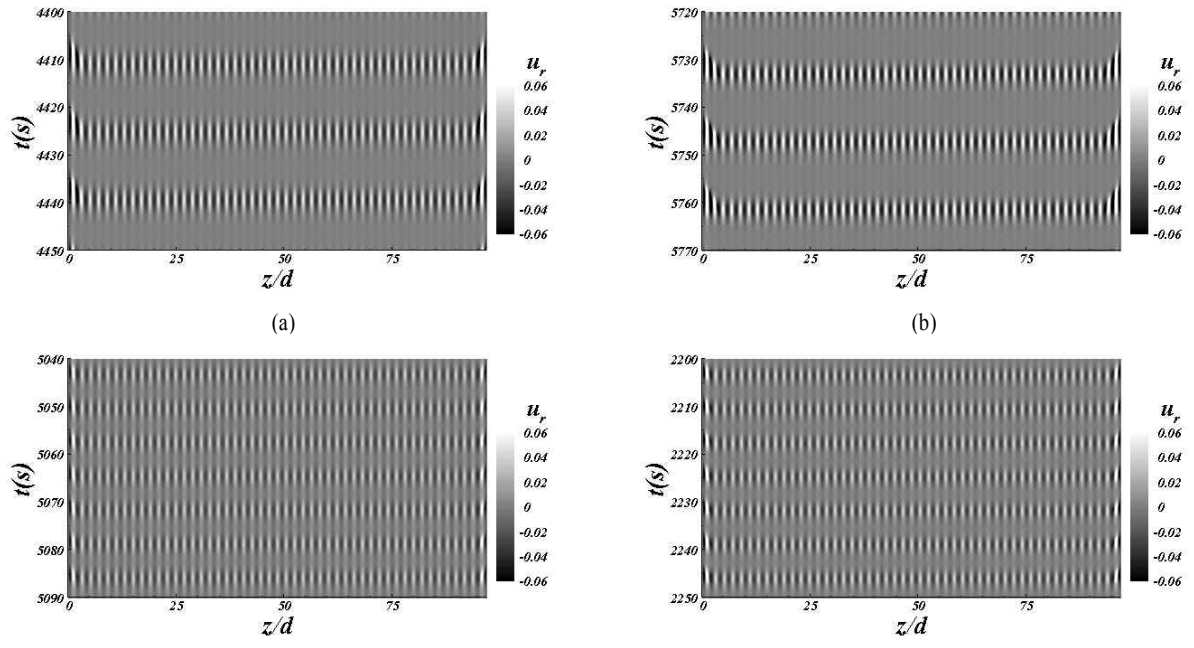


Fig. 5 Space-time contours for $Ta_m = 45.51$; (a) $\Omega_{o1} = 0.554 rad/s,\ \sigma = 8.46$ (b) $\Omega_{o1} = 0.554 rad/s,\ \sigma = 16.91$ (c) $\Omega_{o1} = 0.766 rad/s, \sigma = 8.46$ (d) $\Omega_{o1} = 0.766 rad/s, \sigma = 16.91$

나타낸 것이다. 여기서 반경방향 속도는 안쪽 실린더의 평균 회전속도($r_i\Omega_{m1}$)로 무차원화 되었으며, 시간(t)은 실린더 사이의 간격(d)과 동점성 계수(ν)로 무차원화(d^2/ν) 되었다. Fig. 4를 보면 동일한 회전 진폭(Ω_{o1})에서 진동 주파수 ($\sigma = \omega d^2/\nu$)가 증가하면 u_r의 최대 크기와 진폭이 감소하는 것을 확인할 수 있다. 이는 실린더 내에 형성되는 Taylor 와류의 강도가 감소함을 의미한다. 또한 동일한 진동주파수(σ)에서 회전 진폭(Ω_{o1})이 증가하면 u_r의 최대 크기와 진폭이 증가하는 것이 확인되며, 이는 실린더 내 Taylor 와류의 강도가 증가함을 의미한다. 따라서 위의 결과로부터 Taylor 와류의 강도는 진동 주파수가 증가함에 따라 감소하며, 회전진폭이 증가함에 따라 증가하는 것을 알 수 있다.

Fig. 5는 Fig. 4의 각 경우에 대하여 반경방향으로 중앙인 위치($r = (r_i + r_o)/2, \theta = 0$)에서 시간에 따른 반경방향 속도 성분의 등고선을 나타낸 것이다. 시간에 따라 주기적으로 변화하는 Taylor 와류가 잘 나타나며, Taylor 와류가 형성될 때 실린더의 윗면과 바닥면에서부터 형성되는 것이 관찰된다.

Fig. 6은 Taylor 와류가 주기적으로 생성/소멸하는 경우 $r-z$ 평면에서 한 주기동안의 회전방향 와도(ω_θ)의 등고선을 나타낸 것이다. 실선은 양의 값을 나타내며 점선은 음의 값을 나타낸 것이다. 실선은 양의 값을 나타내며 점선은 음의 값을 나타낸다. 여기서 x는 $x = (r - r_i)/d$로 정의되는 무차원화된 반경방향 좌표이다. 실린더의 주기적인 회전속도 변화로 인해 $t = 2/8T$일 때와 같이 강도가 커진 Taylor 와류는 회전속도가 감소함에 따라 점차 강도가 줄어들어 $t = 5/8T$일 때와 같이 소멸되는 것을 확인할 수 있으며, 다시 실린더의 회전속도가 증가하면 $t = 8/8T$일 때와 같이 Taylor 와류가 다시 생성되는 것을 확인$r-z$할 수 있다. 또한 시간에 따라 Taylor 와류는 주기적으로 변화하지만 Taylor 와류 한 쌍의 축방향 길이는 일정함을 알 수 있다.

Fig. 7은 시간에 따라 주기적으로 변화하는 Taylor 와류의 3차원적 변화를 가시화하여 나타내기 위해서 Jeong and Hussain[10]이 제시한 $-\lambda_2$를 이용하여 한 주기 동안의 시간에 따른 와류의 구조를 나타낸 것이다. 여기서 주기(T)는 안쪽 실린더의 회전 주기이다. 회전방향으로 수평한 형태의 Taylor 와류가 주기적으로 생성/소멸되는 모습이 명확히 관찰된다. $t = 1/8T \sim t = 3/8T$ 일 때 Taylor 와류가 점점 강해지며, $t = 3/8T \sim t = 5/8T$ 일 때는 점점 약해져 $t = 6/8T$ 일 때 완전히 소멸되는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 8은 평균 테일러 수(Ta_m)가 45.51이고 회전진폭(Ω_{o1})이 0.554 ad/s 인 경우 진동 주파수 변화에 따른 스펙트럼 분

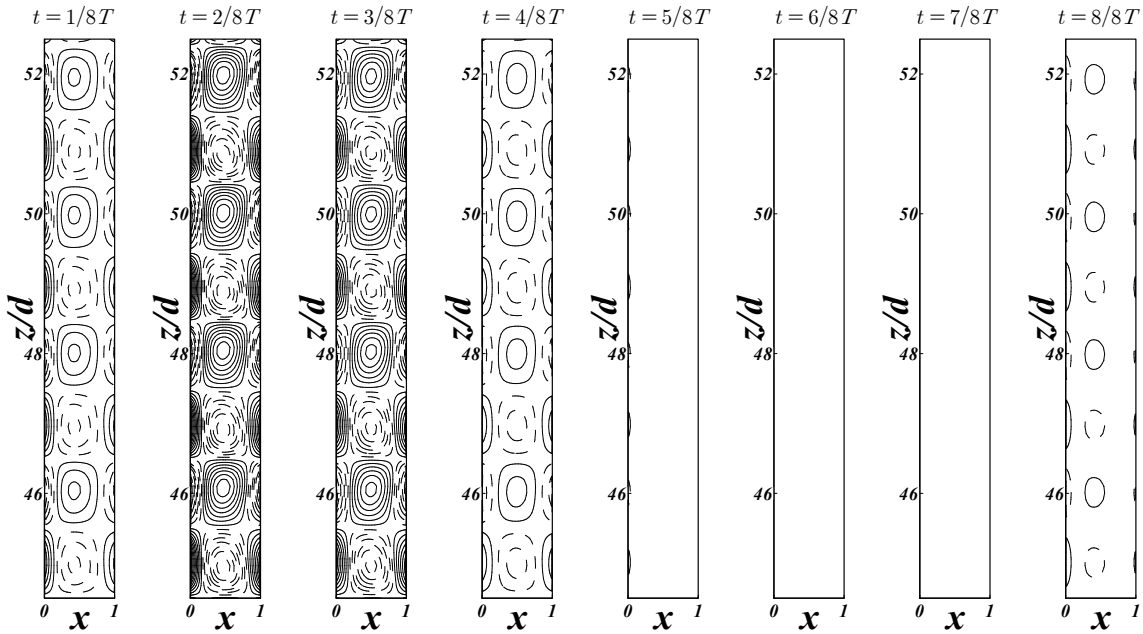


Fig. 6 Contours of azimuthal component of vorticity(ω_θ) over one period on $r-z$ plane for $Ta_m = 45.51$, $\Omega_{o1} = 0.554 rad/s$ and $\sigma = 8.46$; solid line : positive, dotted line : negative

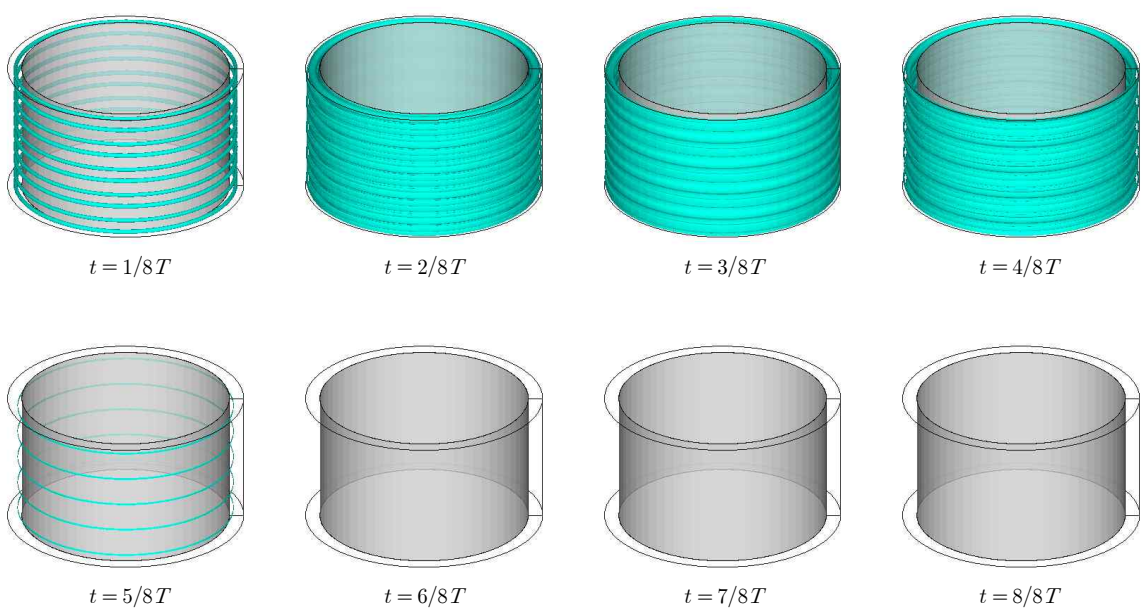
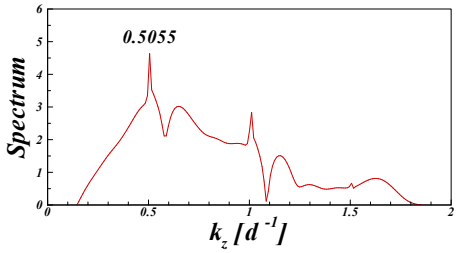
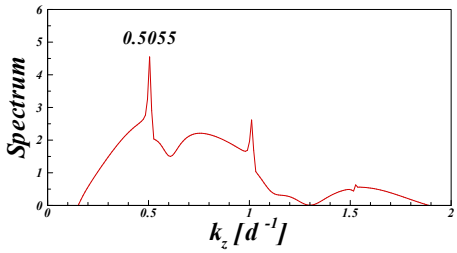


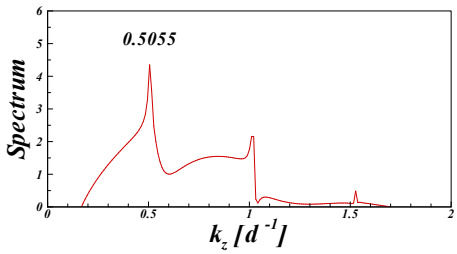
Fig. 7 Vortical structures over one period for $Ta_m = 45.51$, $\Omega_{o1} = 0.766 rad/s$ and $\sigma = 16.91$; $-\lambda_2 = 0.01$[10]



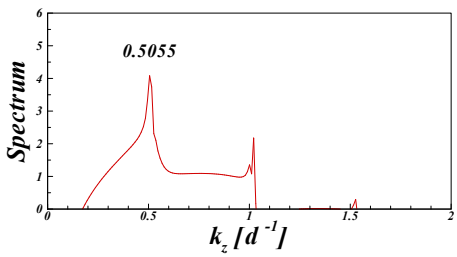
(a)



(b)



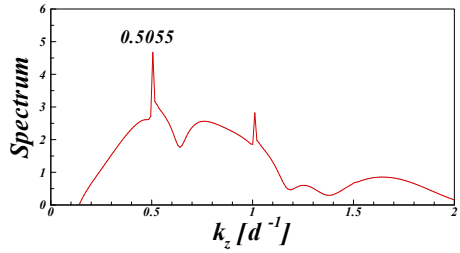
(c)



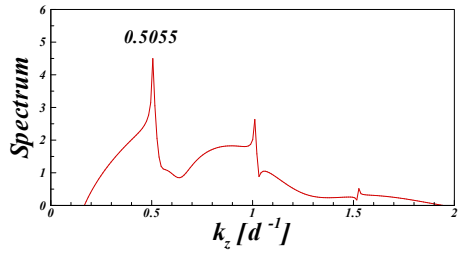
(d)

Fig. 8 Axial frequency for $Ta_m = 45.51$, $\Omega_{o1} = 0.554 rad/s$; (a) $\sigma = 4.23$, (b) $\sigma = 8.46$, (c) $\sigma = 16.91$, (d) $\sigma = 33.83$

석 결과를 보여준다. 여기서 각 스펙트럼 결과는 해당 반경방향 속도 성분의 축방향 분포를 FFT를 이용하여 계산한 것이다. 각 진동 주파수에서 축방향으로의 주파수(k_z)는 0.5055로 일정한 값을 보이고 있다. 이때의 파장 길이($\lambda = 1/k_z$)는 약 1.978이고, 축방향 파동수(q)는 약 3.176으로 계산된다. 실린더의 평균회전속도와 회전진폭이 일정한 경우 진동 주파수 변화에 따른 축방향 파동수는 선행연구[7]를 통해 비교적 낮은



(a)



(b)

Fig. 9 Axial frequency for $Ta_m = 45.51$, $\Omega_{o1} = 0.766 rad/s$;(a) $\sigma = 8.46$, (b) $\sigma = 16.91$

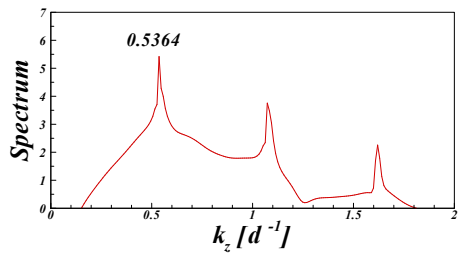
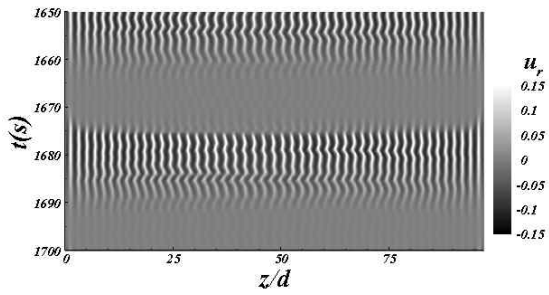


Fig. 10 Axial frequency for $Ta_m = 54.06$, $\Omega_{o1} = 0.554 rad/s$ and $\sigma = 4.23$

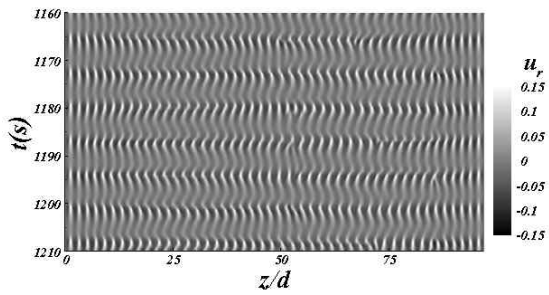
회전진폭과 진동주파수 범위($\sigma \leq 10$)에서 일정함을 확인하였으며, 위의 결과로부터 높은 진동 주파수 범위에서도 일정함이 확인되었다.

Fig. 9는 평균 테일러 수(Ta_m)가 45.51이고 회전진폭(Ω_{o1})이 0.766 rad/s 인 경우 진동 주파수(σ)가 8.46, 16.91일 때의 스펙트럼 분석 결과를 보여준다. 회전진폭이 0.554 rad/s인 경우의 축방향 주파수와 비교했을 때 변화가 없음을 확인할 수 있다. 이는 진동 주파수가 높은 범위에서 회전진폭 변화에 따른 축방향 파동수의 변화는 없음을 의미한다.

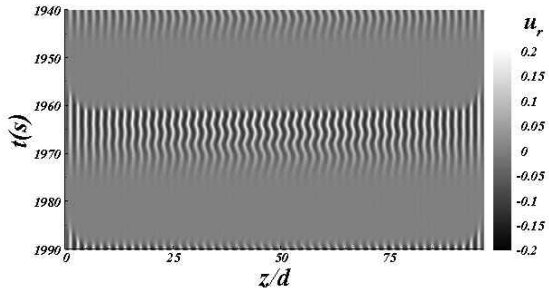
Fig. 10은 평균 테일러 수(Ta_m)가 54.06이고 회전진폭(Ω_{o1})이 0.554 rad/s, 진동 주파수(σ)가 4.23인 경우의 스펙트럼 분석 결과를 보여준다. 이때의 축방향 주파수(k_z)는 0.5364로 Ta_m이 45.51인 경우보다 증가하였음을 알 수 있다. 이때의 파장 길이는 약 1.864이고 축방향 파동수(q)는 약 3.37로 계산된다.



(a)



(b)



(c)

Fig. 11 Space-time contours for $Ta_m = 60$; (a) $\Omega_{o1} = 0.554 rad/s$, $\sigma = 4.23$ (b) $\Omega_{o1} = 0.554 rad/s$, $\sigma = 16.91$ (c) $\Omega_{o1} = 0.766 rad/s$, $\sigma = 4.23$

이는 축방향 파동수는 실린더의 평균 회전속도에 의존함을 의미한다. 즉, 실린더의 평균 회전속도가 증가함에 따라 축방향 파동수는 커짐을 의미한다.

안쪽 실린더의 평균 회전속도가 증가하게 되면 실린더 내에 주기적으로 변화하는 wavy Taylor 와류가 형성된다. Fig. 9는 평균 테일러 수(Ta_m)가 60인 경우 회전진폭(Ω_{o1})과 진동주파수(σ) 변화에 따른 반경방향으로 중앙인 위치 $(r = (r_i + r_o)/2, \theta = 0)$에서 시간에 따른 반경방향 속도성을 등고선으로 나타낸 것이다. Fig. 11 (a), (c)와 같이 진동 주파수가 비교적 낮은 경우에는 주기적으로 생성/소멸되는 wavy 형태의 와류가 관찰된다. 와류가 생성될 때 실린더의 윗면과 바닥면에서부터 생성되는 것이 관찰되며, 와류의 wavy 형태의 와류가 관찰된다. 와류가 생성될 때 실린더의 윗면과 바닥면에서부터 생성되는 것이 관찰되며, 와류의 wavy 형태는 실린더의 중앙부분에서 굴곡이 가장 심하며 양 끝단으로 갈수록 막힘 효과로 인해 굴곡이 점차 완만해지는 것을 확인할 수 있다. 반면 Fig. 11 (b)에서와 같이 진동 주파수가 높은 경우에는 완만하게 주기적으로 변화하는 형태의 wavy Taylor 와류가 관찰된다.

5. 결 론

본 연구에서는 동심 환형관 내 유동에서 안쪽 실린더가 평균 회전속도를 갖고 주기적으로 진동하고, 바깥쪽 실린더는 정지해있는 경우에 대하여 3차원 전산해석적 연구를 수행하였다. 실린더의 회전속도에 영향을 미치는 평균 회전속도, 회전진폭, 진동 주파수를 변화시켜가며 주기적으로 변화하는 Taylor 와류의 특성을 파악하였다.

실린더의 평균 회전속도가 일정할 경우 진동 주파수가 증가함에 따라 실린더 내에 형성되는 Taylor 와류의 강도는 감소하였으며, 회전진폭이 증가함에 따라 증가하였다. 또한 실린더 내 형성된 Taylor 와류의 스펙트럼 분석을 통하여 축방향 파동수는 평균 회전속도와 회전진폭이 일정할 경우에는 진동 주파수 변화에 따른 변화는 없었으며, 실린더의 평균 회전속도가 증가함에 따라 파동수는 증가하였다. 따라서 진동 주파수가 높은 범위에서 축방향 파동수는 실린더의 평균 회전속도에 의존됨을 알 수 있었다.

후 기

본 논문은 한국과학재단의 2008년도 국제협력연구사업 (F01-2008-000-10108-0)의 지원을 받아 수행된 연구임.

참고문헌

[1] 1964, Donnelly, R.J., "Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders. Ⅲ. Enhancement of stability by modulation," *Proc. R. Soc. Lond. A,* Vol.781, pp.130-139.

[2] 1987, Walsh, T.J., Wagner, W.T. and Donnelly, R.J., "Stability of modulated Couette flow," *Phys. Rev. Lett.* Vol.58, pp.2543-2546.

[3] 1980, Tustaniwskyj, J.I. and Carmi, S., "Nonlinear stability

of modulated finite gap Taylor flow," *Phys. Fluids*, Vol.23, pp.1732-1739.

[4] 1994, Ganske, A., Gebhardt, T. and Grossmann, S., "Taylor-Couette flow with time modulated inner cylinder velocity," *Phys. Lett. A*, Vol.192, pp.74-78.

[5] 1989, Kuhlmann, H., Roth, D. and Luecke, M., "Taylor vortex flow under harmonic modulation of the driving force," *Phys. Rev. A,* Vol.39, pp.745-762.

[6] 1989, Barenghi, C.F. and Jones, C.A., "Modulated Taylor-couette flow," *J. Fluid Mech.,* Vol.208, pp.127-160.

[7] 2009, 강창우, 양경수, Mutabazi, I., "실린더의 회전 주파수 진동이 Taylor 와류에 미치는 영향," *한국전산유체공학회지,* Vol.14, No.3, pp.95-104.

[8] 1985, Kim, J. and Moin, P., "Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equation," *J. Comput. Phys.*, Vol.59, pp.308-323.

[9] 1979, Di Prima, R. and Swinney, H., "Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders," *Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence*, Vol.45, pp.139-180.

[10] 1995, Jeong, J. and Hussain, F., "On the identification of a vortex," *J. Fluid Mech.*, Vol.285, pp.69-94.