

구조물의 비선형 동적 해석을 위한 무한요소의 개발

권민호^{1*}, 한길웅¹

¹경상대학교 공과대학 토목공학과, 공학연구원

Development of an Infinite Element for Non-linear Dynamic Analysis of Structures

Min-Ho Kwon^{1*} and Gil-Woong Han¹

¹Department of Civil Engineering, GyeongSang National University

요 약 지반과 구조물의 상호작용을 해석하는 한 방법으로 지반을 무한의 영역으로 가정하여 이를 무한요소로 모델링한 후 구조물과 연동하여 해석하는 기법이 사용되었으나 하지만 기존의 동적 무한요소는 대부분 시간영역이 아닌 주파수 영역에서 정식화되었고 증첩의 원리가 적용되어 구조물이나 지반의 비선형 거동을 해석에 포함하기 어렵다. 본 연구에서는 시간영역에서 정식화가 가능하고 비선형 거동해석도 가능한 무한 요소를 개발하였다. 개발된 무한요소를 다량의 유한요소를 사용한 결과와 비교하여 정확도를 검증하였고, 비선형 지반모델을 적용하여 비선형해석이 가능함을 확인하였다. 따라서 개발된 무한요소를 지반-구조물 상호작용에 적용할 수 있으며, 이를 바탕으로 구조물 내진 설계에도 활용할 수 있을 것으로 판단된다.

Abstract Infinite element approach has been widely used to analysis soil-structure interaction, in which the soil domain is treated as infinite domain. However, most of the developed infinite element has been formulated in the frequency domain rather than the time domain to include the frequency contents of the earthquake or vibration wave. Due to that, those approaches have a critical limitation which is restricted to the linear elastic analysis. To main objective of this research is to develop the infinite element in the time domain to cooperate the inelastic soil and structure behavior. Developed infinite element is verified with the results of finite element analysis modeled in large domain. The nonlinear analysis also conducted to demonstrate the application of developed infinite element. Hence, based on above-mentioned statements, it can be concluded that the propose approach would assist for structure-seismic design.

Key Words : Infinite Element, Time Domain, Nonlinear

1. 서론

90년대 말에 대형 지진들이 발생하였고, 이로 인하여 그동안 안전하다고 여겨졌던 지하 구조물의 붕괴와 손상이 발생하였다. 그로 인하여 지하 구조물의 지진에 대한 성능 평가와 성능 보강에 대한 중요성이 재평가되고 있다. 특히 지중, 지하 구조물의 거동은 지진에 의한 지반 가속도 보다는 지반 변위가 더 영향을 미치기 때문에 구조물과 구조물 주변의 지반과의 상호작용을 고려한 내진

해석이 필요하다.

이러한 지반과 구조물의 상호작용을 고려하기 위하여 지반을 무한의 영역으로 가정하여 이를 무한요소로 모델링한 후 지반과 구조물에 연동하여 해석하는 기법이 적용되었다. Ungless(1973) [1]에 의해 무한요소가 처음으로 소개되었고, 처음에는 탄성지반의 정역학적인 해석만 가능한 무한요소였다. 이후 주파수 영역에서의 반무한 탄성지반의 동역학적 문제에 관하여는 Chow와 Smith (1981) [2]가 지수 감쇠하는 무한요소의 형상함수를 사용

본 연구는 국토해양부 도시철도표준화2단계 연구개발사업의 연구비에 의해 수행되었습니다.

*교신저자 : 권민호(kwonm@gnu.ac.kr)

접수일 10년 01월 21일

수정일 (1차 10년 03월 08일, 2차 10년 03월 16일)

게재확정일 10년 03월 18일

하여 하나의 파만 전파 할 수 있는 수평 및 수직 무한요소를 개발하였고, Media와 Penzien(1982)[3]은 반무한 영역으로의 파동의 전파 형상을 고려한 형상함수를 사용하여 다중파동을 동시에 전파할 수 있는 수평 및 방사형 무한요소를 개발하였다. Zienkiewicz와 Bettess(1983)[4]는 사상함수를 이용하여 무한의 영역을 좌표 변환하여 강성행렬에 적용하여 해석할 수 있는 무한요소를 개발 하였다. Basu와 Chopra(2003)[5]가 PML기법을 이용하여 무한지반을 시간의 영역으로 해석하는 방법을 개발하여 개념적으로 적용하였다.

국내에서는 양신추, 윤정방(1991)[6]은 적층지반과 같이 여러 가지 응력파가 동시에 전파되는 탄성지반의 외부영역을 효과적으로 모형화 할 수 있는 동적무한요소를 개발하였다. 김재민, 윤정방(1995)[7]은 다층 반무한 지반에서 지반-구조물 상호작용해석을 위한 수평무한요소, 수직무한요소, 모서리무한요소를 개발하였으며, 고광훈(1998)[8]은 무한영역에 따른 다양한 거동감쇠특성을 해석하기 위하여 고차의 형상함수를 구성하고, 유한요소법에 적용된 p-버전 개념을 도입함으로써 p-버전 무한요소를 개발하였다. 김재민, 윤정방, 김두기(2000)[9]는 유한요소법을 기초로 하여 2차원 평면변형 지반-구조물계의 지진해석을 수행할 수 있는 전산프로그램인 KIESSI-2D를 개발하였다. 김희석, 이종세(2007) [10]는 파동 전파 문제를 점성 감쇠기를 이용한 흡수경계조건식을 최적화하여 흡수경계의 기능을 향상시켜 시간영역으로 해석하였다. 이러한 국내, 외 연구는 주파수 영역에서 해석하였거나 시간영역의 해석이라도 지반 또는 구조물 비선형 해석까지 확장하지 않았다.

일반적으로 주파수 영역에서 구한 원역지반의 동적강성행렬은 각 주파수 별로 중첩의 원리를 사용하였기 때문에 구조물의 비선형 거동이나 지반의 비선형 거동을 해석에 포함하기 어려운 단점을 가지고 있다. 본 연구에서는 이러한 단점을 보완할 수 있도록 시간영역에서 정식화 가능한 무한 요소를 개발하였다. 본 연구에서 개발된 무한요소를 다량의 유한요소를 사용한 결과와 비교하여 정확도를 검증하였고, 비선형 지반모형을 적용하여 비선형해석이 가능한지 검증해 보았다.

2. 무한요소의 정식화

2.1 무한요소 강성행렬의 정식화

무한요소의 강성행렬은 형상함수와 사상함수의 식으로 이루어져 있다.

$$\begin{aligned} M_3 &= \frac{1+\eta}{2} \left(\frac{-2\xi}{1-\xi} \right), & M_4 &= \frac{1-\eta}{2} \left(\frac{-2\xi}{1-\xi} \right) \\ M_5 &= \frac{1+\eta}{2} \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right), & M_6 &= \frac{1-\eta}{2} \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

사상함수는 자연 좌표계와 요소 좌표계의 좌표변환을 해주는 함수이며, 식(1)과 같이 나타낼 수 있다. 형상함수는 기존의 등매개변수 유한요소의 형상함수와 동일하며, 무한의 영역인 두 개의 절점을 0으로 나타낸다. 형상함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} N_3 &= \frac{1}{4}\xi(1-\xi)(1+\eta), & N_5 &= \frac{1}{4}\xi(1-\xi^2)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}\xi(1-\xi)(1-\eta), & N_6 &= \frac{1}{4}\xi(1-\xi^2)(1-\eta) \end{aligned} \quad (2)$$

변형과 변위 관계를 나타내는 적합행렬 B는 형상함수의 미분 항으로 구성되어 진다. Jacobi- an행렬은 무한의 영역의 좌표 변환이므로 사상함수의 미분 항으로 구성되며 다음과 같이 정리 된다.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_3}{\partial \xi} & \frac{\partial M_4}{\partial \xi} & \frac{\partial M_5}{\partial \xi} & \frac{\partial M_6}{\partial \xi} \\ \frac{\partial M_3}{\partial \eta} & \frac{\partial M_4}{\partial \eta} & \frac{\partial M_5}{\partial \eta} & \frac{\partial M_6}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4)$$

가상일의 원리에 따른 무한요소의 강성행렬은 다음과 같다.

$$K^e = h \int_A B^T D_{mat} B dA = h \int_{-1}^1 \int_0^\infty B^T D_{mat} B d\xi d\eta \quad (5)$$

2.2 무한요소 감쇠행렬의 정식화

이차원 평면에서 독립적인 속력을 가지고 퍼지는 평면파인 P, S파의 속도는 다음과 같다.

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, c_p = \frac{c_s}{S_p}, S_p = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} \quad (6)$$

여기서 G는 전단 계수이고, ρ는 밀도이다. 그리고 평면파의 전파에 대한 파동방정식은 다음과 같다.

$$\{U\} = A\{n\} e^{i\omega\{(k)^T(r)-t\}} \quad (7)$$

이 파동방정식의 변위를 이용하여 유한요소에서 무한요소로 입사되는 응력을 계산할 수 있다. 입사되는 응력

과 흡수되는 응력의 비가 최소가 되게 하여 흡수되는 에너지를 구할 수 있다. 따라서 입사되는 응력의 에너지 손실이 최소가 되어 모두 흡수될 수 있고, 흡수되는 응력을 유도하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a\rho c_p & 0 \\ 0 & b\rho c_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_n \\ \dot{U}_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a\rho c_p & 0 \\ 0 & b\rho c_s \end{bmatrix} P \begin{Bmatrix} \dot{u}_3 \\ \dot{v}_3 \\ \vdots \\ \dot{u}_6 \\ \dot{v}_6 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\text{여기서, } a = \frac{8}{15\pi} (5 + 2S_p - 2S_p^2)$$

$$b = \frac{8}{15\pi} (3 + 2S_p)$$

식(8)은 한 점에 대한 P, S파의 속력을 수평, 수직응력으로 표현되어져 있는 식에서 P행렬을 통하여 무한요소의 모든 점에 대하여 좌표 변환 한 것이다. P행렬은 다음과 같다.

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \\ & & \cos\theta & \sin\theta \\ & & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

감쇠효과를 나타내는 행렬은 다음과 같다.

$$C_i = P^T \begin{bmatrix} a\rho c_p & 0 \\ 0 & b\rho c_s \end{bmatrix} P \quad (10)$$

무한요소의 감쇠행렬은 다음과 같다.

$$C_e = \int_{-1}^1 H^s{}^T C_i H^s d\eta \quad (11)$$

여기서 H^s 는 면적적분이다.

2.3 소성론에 의한 비선형 지반해석

지반에 초기 항복이 발생한 후 소성 영역으로 진입하게 되면 재료의 변형률을 탄성 성분과 소성 성분으로 식(12)와 같이 분리할 수 있다.

$$d\epsilon_{ij} = (d\epsilon_{ij})_e + (d\epsilon_{ij})_p \quad (12)$$

식(12)에서 탄성 변형률 증분은 식(13)과 같이 편차응

력의 향으로 표현하면 다음과 같다.

$$(d\epsilon_{ij})_e = \frac{dS_{ij}}{2\mu} + \frac{(1-2\nu)}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} \quad (13)$$

여기서 편차 응력은 식(14)와 같이 정의되며 소성 변형률은 식(15)와 같다.

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_m \quad (14)$$

$$(d\epsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (15)$$

여기서, Q 는 소성포텐셜, $d\lambda$ 는 소성 계수의 향으로 정의되는 직교상수이다. 파괴포락선 F 가 Q 와 동일한 경우($F=Q$)에 소성흐름 법칙은 상관소성흐름(associates plastic flow)이 된다.

$$(d\epsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (16)$$

$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ 는 임의의 응력 점에서 항복면에 수직인 방향의 벡터이므로 직교조건이 된다. 따라서 탄소성 변형에 대한 응력-변형률 관계는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$d\epsilon_{ij} = \frac{dS_{ij}}{2\mu} + \frac{(1-2\nu)}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (17)$$

지반의 응력 상태를 결정할 파괴포락선으로 Drucker-Prager모형을 사용하였으며 식(18)로 정의된다.

$$F = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} = k \quad (18)$$

여기서 α 와 k 는 양의 상수이고, I_1 은 제1차 응력텐서 불변량이다. J_2 는 평면응력텐서의 2차 불변량이고, α 와 k 는 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}, \quad k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (19)$$

여기서, ϕ 는 내부마찰각이고, c 는 점착력이다. 평면 변형률 조건에서의 탄성행렬 D 는 다음과 같이 나타낼

수 있다.

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

지반의 탄소성 응력-변형을 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d\sigma = D_{ep} d\epsilon \quad (21)$$

여기서, $D_{ep} = D - \frac{d_D d_D^T}{H + d_D^T}$, $d_D = Da$, $a = \frac{\partial F}{\partial \sigma}$ 이고,

a 는 흐름벡터를 나타낸다. H 는 경화함수이고, 일축 응력 소성변형을 곡선의 기울기로 나타낼 수 있다.

$$H = \frac{d\sigma}{d\epsilon_p} = \frac{d\epsilon}{d\epsilon - d\epsilon_e} = \frac{1}{d\epsilon/d\sigma - d\epsilon_e/d\sigma} = \frac{E_T}{1 - E_T/E} \quad (22)$$

여기서, E_T 는 탄소성접선계수 이다.

2.4 시간영역에서의 정식화

무한요소의 비탄성 시스템에 있어서 그 해를 시간의 영역으로 구하는 운동방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = p(t) \quad (24)$$

여기서, m 은 질량행렬로 무한요소에서는 무한의 영역을 나타내는 것이기 때문에 0으로 계산된다. c 와 k 는 앞에서 구한 감쇠행렬과 강성행렬을 나타낸다. $p(t)$ 는 외력이다.

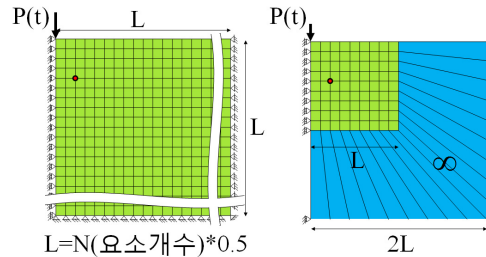
본 연구에서는 이 운동방정식을 시간의 영역에서 해석하기 위해 직접적분법 중 하나인 Newmark 알고리즘에 의해서 해석하였고, 매개변수는 $\beta = 0.25$, $\gamma = 0.5$ 로 무조건적으로 안정적인 상태를 사용하여 해석하였다.

3. 적용성 검토

본 연구에서 개발한 무한요소의 적용성을 검토하기 위하여 유한요소를 사용하여 해석한 결과와 유한요소와 무

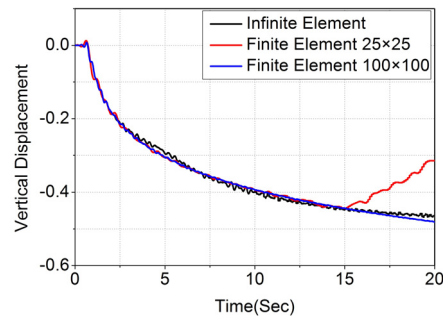
한요소를 같이 사용하여 해석한 결과를 비교해 보았다. 유한요소만 사용하여 해석한 모형은 좁은 영역을 가지는 유한요소를 사용한 모델과 무한의 영역이라고 볼 수 있을 만큼의 넓은 영역을 유한요소로 사용한 모델을 해석하였다. 그리하여 무한요소를 같이 사용한 모델과 유한요소를 사용한 모델의 해석 결과를 비교해 보았다.

해석에 사용된 탄성계수, 단위질량, 푸아송 비는 무한요소의 적용성을 검토하기 위하여 임의적으로 각각 $E = 10$, $\rho = 1$, $\nu = 0.1$ 로 결정하였다. 지반은 그림 1에서와 같이 절반만 모델 하였다. 사용된 유한요소 크기는 동일하게 하였다. 지반의 중앙에 1의 하중을 계속 일정하게 작용하였다. 가로 25개, 세로 25개의 유한요소를 사용하여 작은 범위를 고려한 유한요소와 가로 100개, 세로 100개를 사용하여 넓은 범위를 고려한 유한요소를 해석하였다.



[그림 1] 유한요소와 무한요소의 모형

무한요소는 하중의 근역 지반은 가로 9개, 세로 9개의 유한요소를 사용하고 원역 지반은 외곽의 유한요소에 무한요소를 결합하여 해석하였다.



[그림 2] 유한요소, 무한요소의 변위-시간 그래프

수직변위 측정지점은 하중제하 지점에서 y방향으로 1만큼, z방향으로 -2만큼 떨어진 지점의 z축 방향의 변위를 비교하였다.

해석결과 그림 2와 같이 유한요소 해석에서는 많은 요

소를 사용하므로 상대적으로 해석에 많은 시간이 소요되었다. 또한 무한요소를 사용한 경우에는 최종 처짐이 넓은 영역을 유한요소로 모델 하여 계산된 해석결과와 유사하게 계산되었다. 그러나 적은 영역을 유한요소로 모델 하여 해석한 경우는 유한요소의 경계조건에 의해서 파동이 반사되어 회귀하는 것을 확인할 수 있었다.

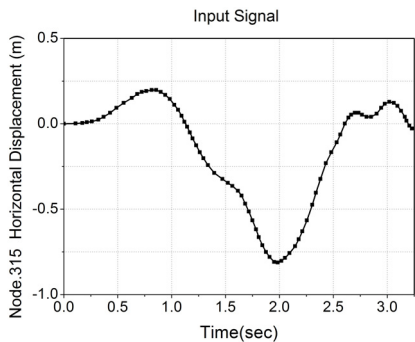
4. 예제 적용 및 검토

무한한 지반위에 구조물이 있는 경우에 지반을 유한요소와 무한요소를 사용하여 그림 4와 같이 모형화 하였다. 해석에 사용된 탄성계수, 단위질량, 푸아송 비는 표 1과 같이 결정하였다.

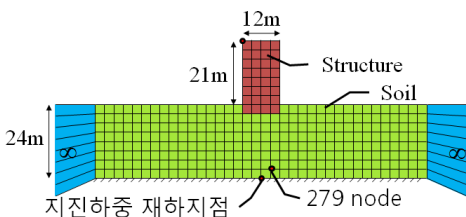
[표 1] 지반과 구조물 물성치

	$E(N/m^2)$	$\rho(N/m^3)$	ν
Structure	0.207×10^{11}	21966	0.167
Soil	0.26×10^8	16671	0.37

실측된 지반가속도로부터 지반이 변위를 산출하는 것은 쉽지 않으며, 따라서 본 연구에서는 그림 3과 같이 가정한 지반변위를 해석에 사용하였다.



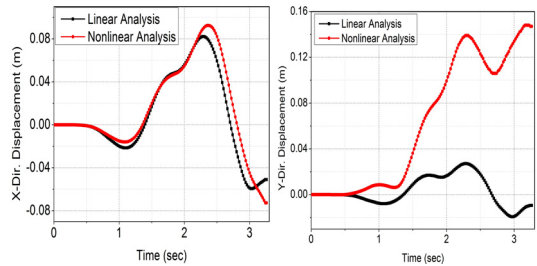
[그림 3] 시간에 따라 재하된 변위량



[그림 4] 지반과 구조물 모형

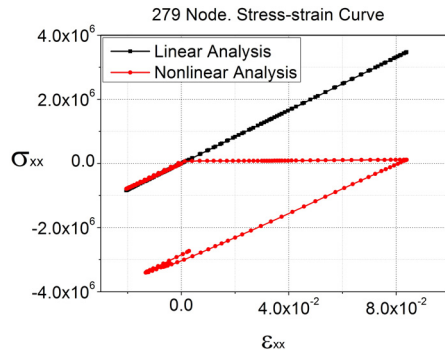
Drucker-Prager 모델을 비선형 거동 해석에 사용하였고, 사용된 계수는 $a=0.4$, $k=0.2 \times 10^6 N/m^2$ 이다.

그림 4와 같이 구조물 상단에서 선형해석과 비선형 해석에 의해 계산된 수평변위와 수직변위를 비교하여 그림 5에 나타내었다.



[그림 5] 선형, 비선형의 변위-시간 그래프

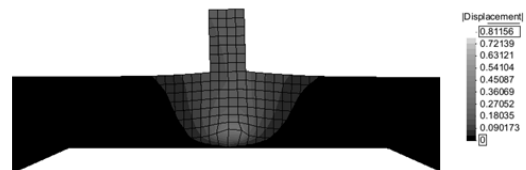
수평변위를 비교한 결과 비선형 해석이 선형해석 보다 최대변위가 12% 크게 나왔고, 수직변위를 비교한 결과 비선형 해석이 선형해석보다 최대변위가 4.5배 크게 나왔다.



[그림 6] 선형, 비선형의 응력-변형률 그래프

그림 6은 절점 279에서 수평응력성분(σ_{xx})과 변형률(ϵ_{xx}) 그래프이다. 지반에 인장파괴가 발생하여 소성영역에 진입했음을 보여주고 있다.

비선형 거동 해석에서 그림 7과 같이 지반변위 재하지점 주위 흙의 인장 파괴로 인하여 부풀어 오를 것을 알 수 있다.



[그림 7] 지반의 변위 형상

5. 결론

본 연구에서는 시간영역에서 정식화가 가능하고 비선형 거동해석도 가능한 무한 요소를 개발하였고, 이를 바탕으로 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 기존의 주파수 영역의 무한요소는 중첩의 원리를 사용하여 비선형해석에 적용하기 어려운 단점을 보완하기 위하여 비선형 해석이 용이한 무한요소를 개발하였다.

(2) 본 연구에서 개발된 무한요소의 경우 다량의 유한요소를 사용한 해석과 근접한 결과가 보여주고 있으며, 특히 소량의 유한요소를 사용한 해석에서 발생하는 경계조건에 의한 파동의 반사효과를 제거하였다.

(3) 본 연구에서 개발된 시간영역의 무한요소를 적용하여 적용성을 확인하였다. 그러므로 개발된 무한요소를 지반-구조물 상호작용에 적용가능하며, 이를 바탕으로 지진이 발생했을 시의 지상구조물의 거동이나 지중 구조물인 지하철이나 터널의 비선형 해석 및 내진 설계에도 활용할 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

[1] R. F. Ungless, An Infinite Finite Element , M.A.S.C. Thesis, University of British Columbia. 1973.

[2] Y. K. Chow, I. M. Smith, Static and Periodic Infinite Solid Element, International Journal for Numerical Method in engineering. vol. 17 : 503-526, 1981.

[3] F. Media, J. Penzien, Infinite Element for Elastodynamics, Earthquake Engineering and Structure Dynamics, vol. 10 : 699-709, 1982.

[4] O. C. Zienkiewicz, P. Bettess, C. Emsen, A Novel Boundary Infinite Element, International Journal For Numerical Methods In Engineering, vol 19 : 393-404, 1983.

[5] U. Basu, A. K. Chopra, Prefectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains, Comput. Methods appl. mech. Engrg., 192 : 1337-1375, 2003.

[6] 양신추, 윤정방, 지반구조물의 상호작용해석을 위한 동적무한요소, 대한 토목학회 11권 3호 : 47-58, 1991.

[7] 김재민, 윤정방, 다층 반무한 지반에서 지반-구조물 상호작용해석을 위한 동적 무한요소, 대한토목학회논문집 15권 1호 : 51-62, 1995.

[8] 고팡훈, 무한지반에서의 다양한 거동감쇠특성을 해석할 수 있는 p-버전 무한요소의 개발, 한국기술연구원,

박사학위논문, 1998.

[9] 김재민, 윤정방, 김두기, 유한요소와 무한요소를 사용한 2차원 선형 지반-구조물계의 지진응답해석법, 한국전산구조공학회 논문집 제13권 2호 : 231-244, 2000.

[10] 김희석, 이종세, 점성감쇠기를 이용하는 흡수경계의 성능 향상에 관한 연구, 한국전산구조공학회 논문집 vol.20 No.5 : 629-640, 2007.

권민호(Min-Ho Kwon)

[정회원]



- 1992년 2월 : 경북대학교 토목공학과 (공학사)
- 1994년 8월 : 경북대학교 대학원 토목공학과 (공학석사)
- 2000년 8월 : Univ.of Colorado, Boulder (공학박사)
- 2002년 3월 ~ 현재 : 경상대학교 토목공학과 부교수

<관심분야>

철근콘크리트 구조해석, 전산구조, 내진평가

한길웅(Gil-Woong Han)

[정회원]



- 2008년 2월 : 경상대학교 토목공학과 (공학사)
- 2008년 3월 ~ 현재 : 경상대학교 토목공학과 (석사과정)

<관심분야>

철근콘크리트 구조해석, 전산구조, 내진평가