

## 비정합 불확실성을 갖는 시스템을 위한 적응 슬라이딩 모드 제어기 설계

(Adaptive Sliding Mode Control Design for Mismatched Uncertain Systems)

최한호\*

(Han-Ho Choi)

### 요 약

본 논문에서는 불확실한 다변수 시스템을 위한 적응 슬라이딩 모드 제어기의 LMI 기반 설계방법이 제시된다. LMI를 사용하여 슬라이딩 평면의 존재조건을 구한다. 그리고 외란의 놈 경계치를 추정하고 안정성을 보장할 적응 스위칭 궤환 제어기 알고리즘을 제시한다. 마지막으로 제안된 방법의 유효성을 보이기 위해 크레인 모델을 제어하기 위한 설계 예를 제시한다.

### Abstract

This paper presents an LMI-based method to design an adaptive sliding mode controller for a class of uncertain systems. In terms of LMIs an existence condition of a sliding surface is derived. And an adaptive switching feedback control law to guarantee the asymptotic stability as well as to estimate the norm bound of disturbances is proposed. Finally, a numerical design example for controlling a overhead crane model is given to show the effectiveness of the proposed method.

Key Words : Linear Matrix Inequality(Lmi), Adaptive Control, Sliding Mode, Polytopic Model

### 1. 서 론

슬라이딩 모드 제어 이론은 불확실한 시스템을 위한 강인한 궤환 제어기 설계에 성공적으로 적용되었다. 대부분의 슬라이딩 모드 제어기는 시스템 행렬이나

입력행렬의 불확실성이 정합조건을 만족시키지 않는 경우에는 적용할 수 없는 단점을 갖고 있다[1-2]. 최근에 Choi[3]에서는 입력행렬의 불확실성이 정합조건을 만족시키지 않아도 적용할 수 있는 LMI 기반의 슬라이딩 평면 설계방법이 제안되었다. 이전 [1-3]의 슬라이딩 모드 제어기 설계 방법에서는 외란의 놈 경계치가 알려져 있다는 가정을 사용한다. 그러나 실제 응용에서 외란 입력의 놈 경계치는 정확하게 알기 어렵거나 측정하기 쉽지 않다. 이를 고려하여 본 논문에서는 외란의 경계치를 추정하고 이를 이용하여 전체 시스템

\* 주저자 : 동국대학교(서울) 교수  
Tel : 02-2260-3777, Fax : 02-2275-6012  
E-mail : hhchoi@dongguk.edu

접수일자 : 2009년 9월 23일  
1차심사 : 2009년 9월 25일, 2차심사 : 2009년 11월 5일  
심사완료 : 2009년 11월 26일

비정합 불확실성을 갖는 시스템을 위한 적응 슬라이딩 모드 제어기 설계

템의 안정을 보장하는 적응 슬라이딩 모드 설계방법을 제안한다. 여러 논문 [4-5]들에서도 외란 입력의 경계치를 추정하는 적응 슬라이딩 모드 제어방법이 제안되었으나 그 방법들 대부분은 시스템 행렬이나 입력 행렬의 불확실성이 정합조건을 만족시킨다는 가정하에서 제안되었음에 유의해야 한다.

## 2. 문제 설정

본 논문에서는 다음과 같은 폴리티픽 모델로 표현 가능한 시스템을 다룬다[6].

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \beta_i \left( A_i x(t) + B_i [u(t) + h(t)] \right) \quad (1)$$

여기에서  $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m$ 로 각각 상태, 입력을 가리키며  $h(t) \in R^m$ 는 외란 입력을 나타낸다.  $\beta_i$ 는 미지의 변수로 다음을 만족시킨다.

$$\sum_{i=1}^r \beta_i = 1, \quad 1 \geq \beta_i \geq 0 \quad (2)$$

시스템 (1)은 다음을 만족시킨다고 가정한다.

$$A1 : B = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r B_i \text{는 } \text{rank}(B) = m < n \text{를 만족시킨다.}$$

$$A2 : \|h(t)\| \leq \sum_{k=0}^p \rho_k \|x\|^k \text{을 만족시키는 미지의 상수 } \rho_k$$

가 존재한다[4-5].

선형 슬라이딩 평면을  $\Omega = \{x : \sigma = Sx = 0\}$ 로 정의하자. 여기에서  $S$ 는  $m \times n$  행렬로 다음 성질을 만족시키는 것을 찾아야 한다.

$$P1 : \sum_{i=1}^r \beta_i S B_i \text{는 역행렬이 존재한다.}$$

P2 : 슬라이딩 평면  $Sx=0$ 에 제한된  $(n-m)$ 차의 슬라이딩 모드 동역학은 점근적으로 안정하다.

결국 P1-P2를 만족시키는  $m \times n$  행렬  $S$ 를 찾고 외란의 놈 경계치  $\rho_k$ 를 추정하여 안정성을 보장하는 적응 스위칭 제어기를 제안하는 것으로 문제를 설정할 수 있다.

다음의 보조정리들은 제안된 방법을 유도하기 위해 논술하는 것이다.

보조정리 1 : [6] 임의의 행렬  $A, B$ 에 대해  $I+AB$ 의 역행렬이 존재한다고 가정하면 다음이 성립한다.

$$(I+AB)^{-1} = I - A(I+BA)^{-1}B$$

보조정리 2 : 임의의 적절한 차원을 갖는 행렬  $X, Y$ 와 양수  $\delta$ 에 대하여 다음이 항상 성립한다.

$$XY + Y^T X^T \leq \delta X X^T + \frac{1}{\delta} Y^T Y$$

## 3. 주요 결과

$H, F(\beta)$ 를 다음처럼 정의한다.

$$H = \frac{1}{2} [(B-B_1), \dots, (B-B_r)],$$

$$F(\beta) = [(1-2\beta_1)I, \dots, (1-2\beta_r)I]^T$$

그러면 위의 정의를 이용하여 식 (1)을 다음처럼 쓸 수 있다.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \beta_i A_i x + [B + HF(\beta)][u + h]$$

또한 (2)를 이용하여 다음을 보일 수 있다.

$$F^T(\beta)F(\beta) = \sum_{i=1}^r (1-2\beta_i)^2 I \leq rI$$

정리 1 : 다음 LMI (5)-(8)를 모든  $i=1, \dots, r$ 에 대하여 만족시키는 해  $X, \gamma, d_1, d_2$ 가 존재한다고 가정한다.

$$\begin{bmatrix} \Phi^T(A_i X + X A_i^T)\Phi & * & * & 0 \\ \gamma \Phi & -(1-\tau)I & 0 & 0 \\ A_i X \Phi & 0 & -I & * \\ 0 & 0 & \gamma I & -\tau I \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} X & I & 0 \\ I & d_1 I & 0 \\ 0 & 0 & d_2 I - X \end{bmatrix} > 0 \quad (6)$$

$$2\gamma > \frac{\eta}{\kappa} (d_1 + d_2) \quad (7)$$

$$1 - \phi - (1 + \phi)\gamma > 0 \quad (8)$$

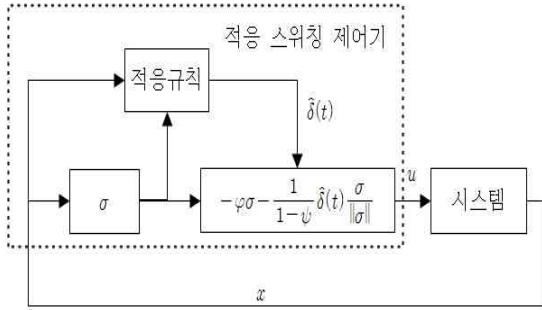


그림 1. 제안된 제어기의 블록선도  
Fig. 1. Block Diagram of Proposed Controller

여기에서  $X \in R^{n \times n}, \gamma \in R, \tau \in R, d_1 \in R, d_2 \in R$ 은 결정 변수들이고  $\eta = \sqrt{r \|SH\|}, \kappa = \sqrt{\lambda_{\min}(B^T B)}$ 이며  $\Phi$ 는  $B^T \Phi = 0, \Phi^T \Phi = I$ 를 만족시킨다. 적응 스위칭 제어기를 다음처럼 정의한다(그림 1 참조).

$$u = -\phi\sigma - \frac{1}{1-\psi} \hat{\delta}(t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (9)$$

여기에서 슬라이딩 평면은 다음처럼 정의된다.

$$\sigma = Sx = (B^T X^{-1} B)^{-1} B^T X^{-1} x \quad (10)$$

$\hat{\delta}(t)$ 는 다음처럼 정의된다.

$$\hat{\delta}(t) = (1 + \psi) \sum_{k=0}^p \hat{\rho}_k \|x\|^k \cdot \|\sigma\| \quad (11)$$

$$\hat{\rho}_k = \nu_k \|\sigma\| \cdot \|x\|^k$$

그리고  $\psi = \sqrt{r \|SH\|}, \nu_k > 0$ 이다. 그러면  $\sigma$ 는 0으로 가며  $x, \rho_k$ 는 유한하다.

증명 : 이전 결과 [4-5]를 참조하여 (3), (10)를 이용하여 다음의 등가입력을 구할 수 있다.

$$u_{eq}(t) = -h(t) - [I + SHF(\beta)]^{-1} \sum_{i=1}^r \beta_i S A_i x \quad (12)$$

다음처럼 변환 행렬  $M$ 과 이와 연관된 벡터  $v$ 를 정의할 수 있다.

$$M = \begin{bmatrix} (\Phi^T X \Phi)^{-1} \Phi^T \\ (B^T X^{-1} B)^{-1} B^T X^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ S \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Zx \\ Sx \end{bmatrix} = Mx$$

(13)은  $v_2 = \sigma, M^{-1} = [X\Phi, B]$ 가 성립함을 의미한다. (13)의 변환행렬을 사용하면 식 (3)은 다음처럼 고쳐 써 질 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ZHF(\beta) \\ I + SHF(\beta) \end{bmatrix} [u + h] \quad (14)$$

여기에서  $\overline{A}_{ij}$ 는 다음처럼 정의된다.

$$\overline{A}_{11} = \sum_{i=1}^r \beta_i Z A_i X \Phi, \quad \overline{A}_{12} = \sum_{i=1}^r \beta_i Z A_i B$$

$$\overline{A}_{21} = \sum_{i=1}^r \beta_i S A_i X \Phi, \quad \overline{A}_{22} = \sum_{i=1}^r \beta_i S A_i B$$

등가 제어 방법[1-2]에 따라 슬라이딩 모드 동역학이 다음처럼 주어짐을 알 수 있다.

$$\dot{v}_1 = \overline{A}_{11} v_1 - ZHF(\beta)[I + SHF(\beta)]^{-1} \overline{A}_{21} v_1 \quad (15)$$

보조정리 1을 이용하여 (15)는 다음처럼 바꾸어 표현할 수 있다.

$$\dot{v}_1 = \sum \beta_i Z [I + HF(\beta)S]^{-1} A_i X \Phi v_1 \quad (16)$$

$$= \overline{A}_{11} v_1 - Z [I + HF(\beta)S]^{-1} HF(\beta) \overline{A}_{21} v_1$$

(16)의 동역학식은 다음 부등식을 만족시키는 리아푸노프 행렬  $P > 0$ 가 존재하면 안정하다.

$$P \overline{A}_{11} - PZ [I + HF(\beta)S]^{-1} HF(\beta) \overline{A}_{21} + * < 0 \quad (17)$$

보조정리 2를 이용하여  $0 < \tau < 1$ 에 대하여 다음이 성립함을 보일 수 있다.

$$[I + HF(\beta)S][I + HF(\beta)S]^T \geq (1 - \tau)(1 - \frac{\gamma^2}{\tau})I$$

비정합 불확실성을 갖는 시스템을 위한 적응 슬라이딩 모드 제어기 설계

위 부등식은 다음 부등식이 성립함을 의미한다.

$$PZ(I+HF(\beta)S)^{-1}HF(\beta)\overline{A_{21}}+ * \leq \frac{\gamma^2}{1-\tau}PZZ^TP+(1-\frac{\gamma^2}{\tau})^{-1}[\sum\beta_iA_iX\Phi]^T[\sum\beta_iA_iX\Phi] \quad (18)$$

식 (18)은 다음 식이 성립하면 식 (17)이 만족됨을 의미한다.

$$P\overline{A_{11}}+\overline{A_{11}}^TP+\frac{\gamma^2}{1-\tau}PZZ^TP \quad (19) + (1-\frac{\gamma^2}{\tau})^{-1}[\sum\beta_iA_iX\Phi]^T[\sum\beta_iA_iX\Phi] < 0$$

Schur complement 보조정리[6]를 사용하면 다음 식이 모든  $i=1,\dots,r$ 에 대하여 성립하면 식 (19)이 만족됨을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} PZA_iX\Phi+* & * & * & 0 \\ \gamma Z^TP & -(1-\tau)I & 0 & 0 \\ A_iX\Phi & 0 & -I & * \\ 0 & 0 & \gamma I & -\tau I \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

위 식은 (5)가 성립하면  $P=X$ 에 의해 만족된다. 즉 슬라이딩 모드 동역학이 안정함을 의미한다.

$\sigma$ 가 0으로 가고 결국 전체 시스템이 안정함을 보이기 위해 다음의 리아푸노프 함수를 고려한다.

$$V(\rho,\tilde{\rho}_k) = \frac{1}{2}\sigma^T\sigma + \frac{\varpi}{2}\sum_{k=0}^p\tilde{\rho}_k^2 \quad (21)$$

여기에서  $\tilde{\rho}_k = \hat{\rho}_k - \rho_k$ ,  $\tilde{\rho}_1 = \hat{\rho}_1 - \rho_1 - \theta/\varpi$   $\varpi = 1 + \psi$ 이다. 리아푸노프 함수의 도함수는 다음처럼 주어진다.

$$\dot{V} \leq (\|\sum_{i=1}^r SA_i\| \cdot \|x\| + \rho + \psi[\rho + \|u\|])\|\sigma\| + \sigma^T u + \varpi \sum_{k=0}^p \tilde{\rho}_k \|x\|^k \cdot \|\sigma\|$$

위 식에 (9)를 대입하여  $\dot{V} \leq -\varphi(1-\psi)\|\sigma\|^2 < 0$ 를 얻을 수 있다. 결국 이전 결과 [4-5]를 이용하여  $x$ 가 0으로 수렴함을 알 수 있다.

#### 4. 수치적인 예

정경채 등 [7]과 배상욱 등 [8]은 크레인 모델의 제어에 관하여 다루었다. 이들의 결과를 참조하여 다음의 크레인 모델을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{1+\sin^2x_1}\{19.6\sin x_1 + \cos x_1[u - f_c + x_2^2\sin x_1]\} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{1+\sin^2x_1}\{4.9\sin 2x_1 + u - f_c + x_2^2\sin x_1\} \end{aligned} \quad (22)$$

여기에서  $x_1$ 은 화물의 진동각이며,  $x_3$ 는 목표점까지의 거리이고,  $f_c$ 는 마찰력으로 미지의 상수  $\rho_0, \rho_1 \geq 0$ 에 대하여  $\|f_c\| \leq \rho_0 + \rho_1\|x\|$ 를 만족시킨다. 이전 결과들을 이용하여 (22)를 다음의 데이터를 갖는 (1)의 모델로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -19.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9.8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -19.556 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9.769 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.997 \\ 0 \\ 0.998 \end{bmatrix} \\ h(t) &= x_2^2\sin x_1 - f_c \end{aligned} \quad (23)$$

위의 데이터는  $\phi=0, \|h(t)\| \leq \rho_0 + \rho_1\|x\| + \rho_2\|x\|^2$ 로 정할 수 있음을 의미한다. LMI (5)-(8)을 풀어 다음의 제어기를 얻을 수 있다.

$$u = -\sigma - \hat{\delta}(t)\text{sign}(\sigma) \quad (24)$$

여기에서  $\sigma = [-8.056, 0.511, 0.455, 1.511]x$ 이고  $\hat{\delta}(t)$ 는 다음처럼 정의된다.

$$\hat{\delta}(t) = \sum_{k=0}^2 \hat{\rho}_k \|x\|^k \cdot |\sigma|, \quad \hat{\rho}_k = 0.01|\sigma| \cdot \|x\|^k$$

그림 2는 초기값을  $x_1(0) = x_2(0) = x_4(0) = 0$  그리고

$x_3(0) = 10[m]$ 로 하고 제어기 (24)를 실제 시스템 모델 (22)에 가하였을 때 진동각, 거리, 진동각의 변화율, 거리의 변화율, 입력,  $\rho_k$  값의 변화를 보여준다. 시뮬레이션을 수행할 때  $f_c = 0.005\text{sign}(x_4) + 0.1x_4$ 이라고 가정했다. 불확실성의 높 경계치를 모르더라도 성공적으로 적용할 수 있음을 알 수 있다. [5]의 방법을 사용해서 제어기를 구성할 수도 있으나 이 경우  $\beta_i$ 를 알아야 하며 제어기가 매우 복잡한 형태임에 유의해야 한다.

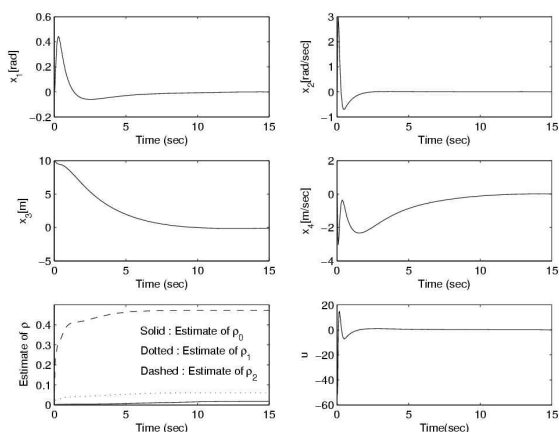


그림 2. (22)과 (24)의 폐회로 응답 (초기값  $x_1(0) = x_2(0) = x_4(0) = 0, x_3(0) = 10[m]$ )  
 Fig. 2. Closed-loop system responses of (22) and (24) with  $x_1(0) = x_2(0) = x_4(0) = 0, x_3(0) = 10[m]$ .

### 5. 결 론

본 논문에서는 비정합 불확실성이 존재하는 시스템 모델을 대상으로 슬라이딩 평면이 존재할 조건을 LMI 형태로 제시하였다. 또한 외란 입력의 높 경계치를 추정하고 전체 시스템의 안정도를 보장하는 적응 스위칭 케환 제어기를 제시하였다. 마지막으로 오버헤드 크레인 제어에 적용한예를 제시하여 효용성을 보였다.

### References

- [1] R.A. DeCarlo, S.H. Zak, and G.P. Mathews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial," IEEE Proceedings, vol. 76, pp. 212-232, 1988.
- [2] V.I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 22, pp. 212-222, 1977.
- [3] H.H. Choi, "LMI-based sliding surface design for integral sliding mode control of mismatched uncertain systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 52, no. 4, pp. 736-742, 2007.
- [4] D.S. Yoo, and M.J. Chung, M.J. "A variable structure control with simple adaption laws for upper bounds on the norm of the uncertainties," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 37, pp. 860-865, 1992.
- [5] H.H. Choi, "Adaptive controller design for uncertain fuzzy systems using variable structurecontrol approach," Automatica, vol. 45, pp. 2646-2650, 2009.
- [6] S. Boyd, L. El Chaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory, Philadelphia, SIAM, 1994.
- [7] K.-C. Jeong, D.-H. Lee, and H.-Y. Lee, "A study on simulator for designing controllers of anti-swing in overhead crane," Journal of KIIE, vol. 10, no.2, pp. 78-86, 1996.
- [8] S.-W. Bae, C.-K. Rho, Y.-H. Bae, and D.-K. Lee, "Anti-swing control algorithm for the automation of overhead crane," Journal of KIIE, vol. 17, no. 2, pp. 49-57, 2003.

### ◆ 저자소개 ◆

**최한호(崔漢浩)**  
 1966년 8월 25일생. 1988년 서울대학교 제어계측 공학과 졸업. 1994년 한국과학기술원 전기및전자공학과 졸업(박사). 2003년~현재 동국대학교 교수.  
 Tel : (02)2260-3777  
 Fax : (02)2275-6013  
 E-mail : hhchoi@dongguk.edu